

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

на правах рукописи

Евгений Витальевич Репин

**Об эффектах магнитных примесей и взаимодействия на
свойства неупорядоченных металлов**

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физических наук

Москва - 2020

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Игорь Сергеевич Бурмистров, зам. директора Института теоретической физики им Л.Д.Ландау. Профессор факультета физики «НИУ ВШЭ»

ТЕМА ДИССЕРТАЦИИ

Данная диссертационная работа представляет собой исследование транспортных и мультифрактальных свойств неупорядоченной электронной системы с магнитными рассеивателями и/или электрон-электронным взаимодействием. Точнее, изучается время сбоя фазы электронов проводимости, поправки к проводимости за счет квантовых магнитных примесей и чисто скейлинговые операторы нелинейной сигма-модели. Задачи включают анализ времени сбоя фазы при рассеянии на квантовых точках и приложения к эксперименту, предсказание нового эффекта в электронной проводимости и нахождение собственных операторов ренормгруппы сигма-модельного действия в двупетлевом приближении.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Диссертация носит теоретический характер. Ценность результатов заключается в непосредственном значении исследования теоретических моделей, а также приложении к экспериментам по электронному транспорту в низкоразмерных системах с магнитными примесями: возможное объяснение результатов [18, 25] и предсказание новых эффектов в электронной проводимости. Используемые техники включают нелинейную сигма-модель со взаимодействием, методы квантовой механики многочастичных систем, ренормгрупповой анализ.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В двумерной неупорядоченной электронной жидкости линейное по температуре обратное время сбоя фазы (за счет e - e взаимодействия) может сопровождаться примерно Кюри-подобной магнитной восприимчивостью (за счет локализованных электронных капель), в согласии с экспериментом [18, 25].

2. Время сбоя фазы из-за рассеяния на квантовой точке вблизи Стоунеровской неустойчивости с кулоновской блокадой и сильной спин-орбитальной связью $\tau_\phi(T)$ зависит от четности числа электронов при низких температурах $T \ll \delta - J$, а в температурном диапазоне $\delta \gg T \gg \delta - J$ нечувствительно к четности, то есть похоже на случай магнитной примеси.

3. В случае сильно большего g -фактора для магнитных примесей, чем для электронов проводимости, поправка Альтшулера-Аронова к проводимости может сильно измениться.

4. Локальные собственные операторы ренормгруппы без

производных для нелинейной сигма-модели Финкельштейна в двухпетлевом приближении могут быть построены простым обобщением соответствующих операторов для невзаимодействующего случая в низкоэнергетическом пределе.

5. Все найденные собственные операторы могут быть выражены в терминах усредненных по беспорядку пространственных корреляционных функций одночастичной функции Грина или, как альтернатива, LDOS.

Все приведенные результаты получены автором лично при непосредственном участии руководителя.

ПУБЛИКАЦИИ И АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Результаты диссертации опубликованы в 3 статьях:

Публикации первого уровня

1. Неупругое рассеяние электронов на квантовой точке в режиме котуннелирования: признак мезоскопической стоуновской неустойчивости Е. В. Репин и И. С. Бурмистров Phys. Rev. B 93, 165425

2. Мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина на переходе Андерсона с кулоновским взаимодействием Е. В. Репин и И. С. Бурмистров Phys. Rev. B 94, 245442

3. Квантовые поправки к проводимости неупорядоченных электронов за счет неупругого рассеяния на магнитных примесях И. С. Бурмистров и Е. В. Репин Phys. Rev. B 98, 045414

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основная цель **главы 1** - рассмотреть влияние многоэлектронных капель с конечным спином на транспортные свойства двумерной электронной системы. В частности, мы оцениваем вклад во время дефазировки из-за неупругого электронного рассеяния на таких каплях при низких температурах (T). Основная мотивация состоит в следующем: недавно такие электронные капли со спином $S \approx 2$ (на одну каплю) были обнаружены в двумерной (2D) электронной системе в Si-MOSFET с помощью термодинамических измерений намагниченности образца [18, 25]. При наличии сильного обменного взаимодействия в двумерной неупорядоченной электронной системе при низких температурах спин электронной капли может быть конечным из-за явления мезоскопической неустойчивости Стонера [12], [15].

Конечный спин электронной капли приводит к поведению типа Кюри для спиновой восприимчивости. В этих экспериментах температурная зависимость измеренной намагниченности согласуется с законом Кюри для спиновой восприимчивости одной капли при условии, что их концентрация обратно пропорциональна температуре [18, 25]. В этой главе мы исследуем сечение неупругого рассеяния электронов на металлической квантовой точке, близкой к неустойчивости Стоунера. Мы сосредоточимся на режиме сильной кулоновской блокады, в которой в сечении рассеяния доминируют процессы котуннелирования.

Выражение для времени дефазировки в размерности $d = 2$ может быть записано как [14]

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \exp \left[\int d\varepsilon n'_F(\varepsilon) \ln \tau_{\text{inel}}(\varepsilon, T) \right]. \quad (1)$$

где мы вводим частоту неупругого рассеяния для электрона следующим образом

$$\tau_{\text{inel}}^{-1}(\varepsilon, T) = \frac{n_s}{\nu} \sum_{\sigma=\pm} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon). \quad (2)$$

где ν обозначает среднюю плотность состояний на одну проекцию спина для электронов в электронной жидкости, окружающей квантовые точки и величина $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ представляет собой неупругую часть величины

$$\mathcal{A}_{\text{tot}}^\sigma(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_{k\sigma}) \text{Im} \langle \mathbf{k}\sigma | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle, \quad (3)$$

которая представляет собой сечение рассеяния $\sigma_{\text{tot}}^\sigma = \frac{2}{v_F} \text{Im} \langle \mathbf{k}\sigma | \mathcal{T} | \mathbf{k}\sigma \rangle$, усредненное с одночастичной плотностью состояний в резервуаре (v_F - это скорость электронов в резервуаре на уровне Ферми). Неупругая часть определяется тем, что начальное и конечное состояния квантовой точки различны.

Мы моделируем электронные капли квантовой точкой. Тогда вся система описывается следующим гамильтонианом

$$H = H_{QD} + H_R + H_T. \quad (4)$$

Здесь первый член H_{QD} описывает электроны в квантовой точке. Мы рассматриваем металлическую квантовую точку, т.е. с большой безразмерной проводимостью, $g_{\text{Th}} = E_{\text{Th}}/\delta \gg 1$, где E_{Th} обозначает энергию Таулесса. В данном случае квантовая точка точно описывается так называемым универсальным гамильтоном [12],[1]:

$$H_{QD} = \sum_{\alpha,\sigma} \epsilon_{\alpha\sigma} d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma} + E_c(\hat{n} - N_0)^2 - J\mathbf{S}^2. \quad (5)$$

Здесь $d_{\alpha\sigma}$ и $d_{\alpha\sigma}^\dagger$ - операторы уничтожения и рождения электронов с энергией $\epsilon_{\alpha\sigma} = \epsilon_\alpha + \mu_B g_L B \sigma / 2$ в квантовой точке, где $\sigma = \pm 1$ обозначает спиновый индекс, g_L и μ_B - электронный g-фактор и магнитон Бора соответственно. Второй член в правой части Ур. (5) учитывает кулоновскую блокаду. В нем задействован оператор числа частиц,

$$\hat{n} = \sum_{\sigma} \hat{n}_{\sigma} = \sum_{\alpha} \hat{n}_{\alpha} = \sum_{\alpha, \sigma} d_{\alpha\sigma}^\dagger d_{\alpha\sigma}, \quad (6)$$

и внешний заряд N_0 . Последний член в правой части Ур. (5) описывает ферромагнитное взаимодействие Гейзенберга ($J > 0$). Оно выражается через оператор полного спина на квантовой точке,

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \mathbf{s}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \sigma, \sigma'} d_{\alpha\sigma}^\dagger \boldsymbol{\sigma}_{\sigma\sigma'} d_{\alpha\sigma}. \quad (7)$$

Здесь мы не рассматриваем взаимодействие в куперовском канале, которое отвечает за сверхпроводящие корреляции в квантовых точках [19, 29, 30, 21, 26, 2, 16, 17].

Далее, член H_R описывает электроны в резервуаре. Для простоты мы пренебрегаем взаимодействием электронов в резервуаре и записываем гамильтониан как

$$H_R = \sum_{k, \sigma} \epsilon_{k\sigma} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma}. \quad (8)$$

Здесь $a_{\alpha\sigma}^\dagger$ и $a_{\alpha\sigma}$ - операторы рождения и уничтожения электронов с энергией $\epsilon_{k\sigma} = \epsilon(k) + \mu_B \tilde{g}_L B \sigma / 2$ в резервуаре, где $\tilde{g}_L$ обозначает g-фактор в резервуаре. Мы отмечаем, что все энергии отсчитываются от химического потенциала.

Наконец, член H_T учитывает связь между квантовой точкой и резервуаром. Мы выбираем его в стандартном виде туннельного гамильтониана:

$$H_T = \sum_{\alpha, \sigma, k} t_{\alpha k} d_{\alpha\sigma}^\dagger a_{k\sigma} + h.c. \quad (9)$$

Подчеркнем, что при туннелировании из квантовой точки в резервуар или наоборот не происходит спин-флип электрона. Далее мы пренебрегаем влиянием электронов в резервуаре на динамику полного спина квантовой точки (см. ссылки [23, 24]).

Для расчета сечения рассеяния в четвёртом порядке по амплитудам туннелирования мы представим базис точных многочастичных собственных состояний $|i\rangle$ для гамильтониана (5) изолированной квантовой точки: $H_{QD}|i\rangle = E_i|i\rangle$. Затем, вычисляя функцию Грина

электронов на квантовой точке во втором порядке по туннелированию, мы находим следующий результат для полного сечения рассеяния:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{tot}}^{\sigma}(\varepsilon) &= \pi[1 + e^{-\beta\varepsilon}] \sum_{\alpha\beta\gamma\eta} \sum_{i,f,\sigma'} p_i \int d\varepsilon' \frac{Q_{\beta\alpha}^{\sigma}(\varepsilon)Q_{\gamma\eta}^{\sigma'}(\varepsilon')}{1 + e^{-\beta\varepsilon'}} \\
&\times \langle i | d_{\gamma\sigma'}^{\dagger} \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\alpha\sigma} + d_{\alpha\sigma} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\gamma\sigma'}^{\dagger} | f \rangle \\
&\times \langle f | d_{\beta\sigma}^{\dagger} \frac{1}{\varepsilon' - E_i + H_{QD}} d_{\eta\sigma'} + d_{\eta\sigma'} \frac{1}{\varepsilon + E_i - H_{QD}} d_{\beta\sigma}^{\dagger} | i \rangle \\
&\times \delta(\varepsilon + E_i - E_f - \varepsilon').
\end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $p_i = \exp(-\beta E_i)/Z$, где $Z = \sum_i \exp(-\beta E_i)$, является вероятностью Гиббса для начальных состояний квантовой точки,

$$Q_{\alpha\beta}^{\sigma}(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_{k\sigma}) t_{\alpha k} \bar{t}_{k\beta}. \tag{11}$$

Эта матрица характеризует туннельный контакт. Для многоуровневой квантовой точки при условиях, что зарядовая энергия E_c большая, $E_c \gg T, \varepsilon, \delta, J$, а внешний заряд N_0 имеет целое значение, опуская упругий вклад, т.е. член с $|i\rangle = |f\rangle$, из Ур. (10), мы получаем неупругий вклад в сечение рассеяния в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma}(\varepsilon) &= \frac{4\pi}{E_c^2} \sum_{\alpha,\gamma} \sum_{f \neq i, \sigma'} Q_{\gamma\alpha}(\varepsilon) Q_{\alpha\gamma}(\varepsilon + E_i - E_f) \\
&\times \frac{p_i[1 + e^{-\beta\varepsilon}]}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}} \langle i | d_{\alpha\sigma'}^{\dagger} d_{\alpha\sigma} | f \rangle \langle f | d_{\gamma\sigma}^{\dagger} d_{\gamma\sigma'} | i \rangle \\
&+ \frac{4\pi}{E_c^2} \sum_{\alpha \neq \gamma} \sum_{f \neq i, \sigma'} Q_{\alpha\alpha}(\varepsilon) Q_{\gamma\gamma}(\varepsilon + E_i - E_f) \\
&\times \frac{p_i[1 + e^{-\beta\varepsilon}]}{1 + e^{-\beta(\varepsilon + E_i - E_f)}} \langle i | d_{\gamma\sigma'}^{\dagger} d_{\alpha\sigma} | f \rangle \langle f | d_{\alpha\sigma}^{\dagger} d_{\gamma\sigma'} | i \rangle
\end{aligned} \tag{12}$$

Нас интересует случай, когда энергии электрона до (ε) и после ($\varepsilon' = \varepsilon + E_i - E_f$) рассеяния малы по сравнению с энергией Ферми электронов в резервуаре. Таким образом, мы можем пренебречь энергетической зависимостью в величинах $Q_{\alpha\gamma}$. Для металлической квантовой точки, $g_{\text{Th}} \gg 1$, усреднение амплитуд туннелирования по реализациям беспорядка может выполняться независимо от уровней энергии отдельных частиц ε_{α} . Используя следующие соотношения (мы предполагаем, что $Q_{\alpha\beta} \propto \phi_{\alpha} \bar{\phi}_{\beta}$, где ϕ_{α} случайный вектор с гауссовым

распределением, удовлетворяющий следующим соотношениям: $\langle \phi_\alpha \bar{\phi}_\beta \rangle = Q\delta_{\alpha\beta}$ и $\langle \phi_\alpha \phi_\beta \rangle = (2/\beta - 1)Q\delta_{\alpha\beta}$.

$$\overline{Q_{\alpha\gamma}Q_{\gamma\alpha}} = \begin{cases} Q^2, & \alpha \neq \gamma, \\ (2/\beta)Q^2, & \alpha = \gamma, \end{cases} \quad (13)$$

и

$$\overline{Q_{\alpha\alpha}Q_{\gamma\gamma}} = Q^2, \quad \alpha \neq \gamma, \quad (14)$$

где параметр $\beta = 1$ и 2 для ортогонального класса AI и унитарного класса A, соответственно, мы можем усреднять получаемые величины по беспорядку.

Используя все эти соображения, для квантовой точки вблизи Стоунеровской неустойчивости с изотропным обменом при больших энергиях $\varepsilon \gg E_f, E_i$, $T \rightarrow 0$ и условиях $\delta N_0, \delta J/[2(\delta - J)] \ll \varepsilon \ll E_c$ получим

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma = 4\pi Q^2 N_0 \varepsilon / E_c^2 \quad (15)$$

Для $T \lesssim \delta - J$ и низких энергий $|\varepsilon|, \delta - J \ll \delta, J$ мы находим следующий результат для сечения неупругого рассеяния:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} & \left\{ \frac{(2S+1)(S+1)}{3} + \frac{1}{2}F(\varepsilon, E_-) \right. \\ & \left. + \frac{2S+3}{2(2S+1)}F(\varepsilon, E_+) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

где мы ввели функцию

$$F(\varepsilon, E) = \frac{2 \cosh^2(\beta \varepsilon / 2)}{\cosh(\beta \varepsilon) + \cosh(\beta E)}. \quad (17)$$

Первый вклад в Ур.(16) представляет собой упругое спин-флип-рассеяние, следующие два соответствуют неупругому рассеянию с и без спин-флип. Отметим, что вклад в уравнение (16) из-за упругого спин-флип рассеяния, $(2S+1)(S+1)/3$, больше, чем результат для магнитной примеси, $2S(S+1)/3$. Это происходит за счет дополнительных корреляций между амплитудами туннелирования в случае ортогонального ансамбля ($\beta = 1$). Неупругое сечение при $\delta \gg T \gg \delta - J$ при энергиях $|\varepsilon| \lesssim \delta$

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[\frac{\delta(3\delta - 2J)}{6(\delta - J)^2} + \frac{T}{3(\delta - J)} \right]. \quad (18)$$

Подчеркнем, что неупругое сечение больше, чем можно ожидать для случая магнитной примеси со спином порядка $\delta/[2(\delta - J)]$.

Выше мы предположили, что расстояние между соседними одночастичными уровнями в квантовой точке постоянно. В общем случае это не так. Следуя статье [5] учтем флуктуации одночастичных уровней вблизи неустойчивости Стоунера, $\delta - J \ll \delta$. Тогда получим усредненное неупругое сечение при температурах $T \lesssim \delta - J$ и энергиях $\varepsilon \ll \delta$:

$$\overline{\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)} = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left\{ \frac{2\delta^2}{3(\delta - J)^2} \left[1 + \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{\delta}{\delta - J} \right] + \mathcal{F} \left(\varepsilon, 2(\delta - J), \frac{\delta}{\pi} \sqrt{2 \ln[\delta/(\delta - J)]} \right) \right\}. \quad (19)$$

Здесь мы пренебрегаем сублидирующими членами по сравнению с главным в первой строке Ур. (19), который соответствует упругому вкладу спин-флипа. Функция $\mathcal{F}(x, y, z)$ определяется как

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x - y}{z} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x + y}{z} \right), \quad (20)$$

где $\operatorname{erf}(z) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^z dt \exp(-t^2)$ обозначает функцию ошибок. Выражение (19) справедливо при выполнении

$$(1 - J/\delta)^2 \ll (2/\pi^2) \ln[\delta/(\delta - J)] \ll 1. \quad (21)$$

Это ограничивает значение полного спина в основном состоянии до интервала $2 \lesssim \bar{S} \lesssim 70$. В целом, флуктуации одночастичных уровней усиливают вклад упругого спин-флипа (аналогично усилению спиновой восприимчивости [12, 5, 13, 22]) и сглаживают ступени вкладов неупругого спин-флипа и неупругого рассеяния без спин-флипа.

Теперь рассмотрим поведение неупругого сечения при наличии магнитного поля B . Мы предполагаем, что в дополнение к расщеплению Зеемана это магнитное поле вызывает орбитальный эффект и нарушает симметрию по отношению к обращению времени. Тогда параметр β становится равным 2, $\beta = 2$. Рассмотрим случай расщепления Зеемана, которое сильно по сравнению с температурой, но мало по отношению к δ , $\delta \gg b = \mu_B g_L B \gg T$. Отсутствие вырождения по отношению к изменению проекции полного спина делает вклад упругого спин-флипа в неупругое сечение экспоненциально малым по параметру $\beta b \gg 1$. То же самое относится и ко вкладу из-за неупругого рассеяния без

спин-флипа. Таким образом, основной вклад в сечение неупругого рассеяния приходит от неупругого рассеяния без спин-флипа. Мы находим следующий результат для неупругого сечения при $|\varepsilon| \ll \delta$ и $T \lesssim (\delta - J) \ll b$:

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 - n_F(\varepsilon - E_\sigma(B)) + n_F(\varepsilon + E_{\bar{\sigma}}(B)) \right]. \quad (22)$$

где щели между основным состоянием с суммарным спином S и наинизшим многочастичным возбужденным состоянием обозначены $E_\pm(B) = E_\pm \mp b$. Поучительно сравнить результаты для $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ с магнитным полем и без него. Сначала магнитное поле подавляет упругий вклад спин-флип. Во-вторых, вместо четырех ступеней с высотой $1/2$ (при большом спине $S \gg 1$) при энергиях $E_\pm$ и $-E_\pm$ при отсутствии магнитного поля (см. Ур. (22)), при наличии расщепления Зеемана выживают только две ступени при $E_\sigma(B)$ и $-E_{\bar{\sigma}}(B)$ высотой 1. Мы подчеркиваем, что в отличие от случая магнитной примеси неупругое рассеяние в присутствии расщепления Зеемана на энергиях $|\varepsilon| \gg E_\sigma(B)$ не является экспоненциально малым по $\beta b \gg 1$. Для энергии $|\varepsilon| \ll E_\sigma(B)$ сечение неупругого рассеяния равно нулю при $T = 0$. Усредняя по статистике одночастичных уровней, мы находим неупругое сечение при $|\varepsilon| \ll \delta$ и $T \lesssim (\delta - J) \ll b \ll \delta$

$$\overline{\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)} = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\pi[\varepsilon - 2(\delta - J)]}{\delta \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{\pi[\varepsilon + 2(\delta - J)]}{\delta \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}} \right) \right]. \quad (23)$$

этот результат справедлив при условии выполнения следующего неравенства:

$$(\delta - J)^2 \ll \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{b}{\delta - J} \ll 1. \quad (24)$$

Левое неравенство в Ур. (24) означает, что эффективная температура $T_{\text{eff}} = (\delta/\pi) \sqrt{\ln[b/(\delta - J)]}$, сглаживающая ступени в $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ при $E_\sigma(B)$ и $-E_{\bar{\sigma}}(B)$ не слишком мала, $T_{\text{eff}} \gg \delta - J \gtrsim T$. Правое неравенство в Ур. (24) гарантирует, что флуктуации полного спина остаются гауссовыми.

Для квантовой точки с Изинговским обменом (сильное спин-орбитальное взаимодействие) без магнитного поля суммарный спин в основном состоянии равен 0 ($1/2$) в случае четного (нечетного) числа электронов. Для четного числа электронов, так как $S = 0$, упругое

спин-флип рассеяние исчезает. Для $T \lesssim \delta - J$ и $|\varepsilon| \lesssim \delta$, единственный вклад в $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ остается из-за неупругого спин-флип:

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,e}(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 - n_F(\varepsilon - \Delta_e) + n_F(\varepsilon + \Delta_e) \right]. \quad (25)$$

Здесь $\Delta_e = \delta - J$ означает щель между основным состоянием с $S = S_z = 0$ и состоянием с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$.

В случае нечетного числа электронов, поскольку $S = 1/2$, основное состояние дважды вырождено. Тогда упругое спин-флип рассеяние такое же, как и для магнитной примеси со спином $1/2$. Кроме того, неупругое спин-флип дает вклад в неупругое сечение. Тогда при $T \lesssim \delta - J$ и $|\varepsilon| \lesssim \delta$ находим

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,o}(\varepsilon) = \frac{2\pi Q^2}{E_c^2} \left[1 + 1 - n_F(\varepsilon - \Delta_o) + n_F(\varepsilon + \Delta_o) \right]. \quad (26)$$

Здесь $\Delta_o = 2(\delta - J)$ означает щель между основным состоянием с $S = 1/2$ и состояниями с $S = 1$ и $S_z = \pm 1$.

Отметим, что неупругое сечение рассеяния при $|\varepsilon| \gg \delta - J$ независимо от четности числа электронов в квантовой точке,

$$\mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,e}(\varepsilon) = \mathcal{A}_{\text{inel}}^{\sigma,o}(\varepsilon) = \frac{4\pi Q^2}{E_c^2}. \quad (27)$$

В случае температур $\delta \gg T \gg \delta - J$ низколежащие многочастичные состояния с полным спином $S \lesssim \sqrt{T/(\delta - J)}$ дают вклад в неупругое сечение при $|\varepsilon| \lesssim \delta$. Аналогично случаю низких температур главный вклад приходит от неупругого спин-флип. Тогда мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon) &= \frac{8\pi Q^2}{E_c^2} \left[\sum_{S_z=-\infty}^{\infty} e^{\beta(J-\delta)S_z^2} \right]^{-1} \sum_{S_z=-\infty}^{\infty} e^{\beta(J-\delta)S_z^2} \\ &\times F(\varepsilon, (\delta - J)(2S_z + 1)) = \frac{8\pi Q^2}{E_c^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Обратим внимание, что неупругое сечение при $|\varepsilon| \sim \delta$ и $\delta \gg T \gg \delta - J$ в два раза больше, чем при $T \ll \delta - J$.

Далее мы вычисляем наблюдаемое время дефазировки. Обсуждение $\tau_\phi(T)$ начнем со случая изотропного обменного взаимодействия в квантовой точке. Рядом с неустойчивостью Стоунера, $\delta - J \ll \delta$, при температурах $T \ll \delta - J$, неупругая частота рассеяния $\mathcal{A}_{\text{inel}}^\sigma(\varepsilon)$ дается Ур.

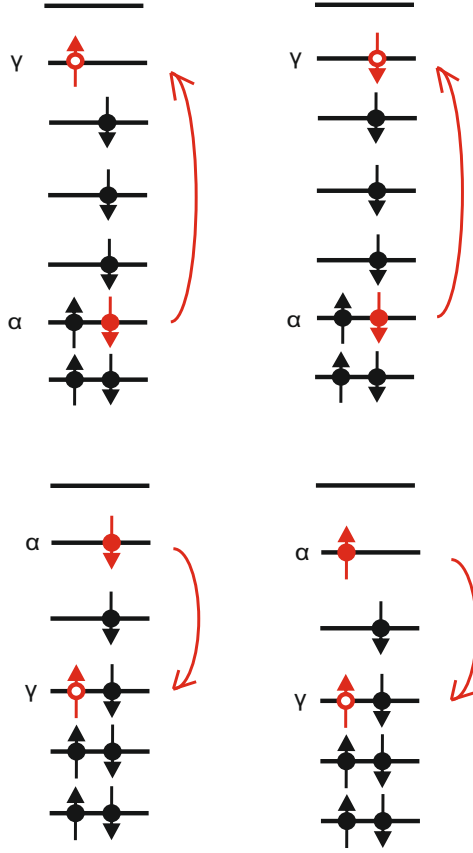


Figure 1: Иллюстрация неупругих переходов с (левая колонка) и без (правая колонка) спин-флипа. Общий спин увеличивается (уменьшается) на единицу при переходе в верхней (нижней) строке (см. текст).

(16). Выполняя разложение по малым членам, зависящим от энергии, находим из Ур. (1)

$$\tau_{\phi}^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} \left[\frac{(S+1)(2S+1)}{3} + \beta E_- e^{-\beta E_-} + \frac{2S+3}{2S+1} \beta E_+ e^{-\beta E_+} \right] \quad (29)$$

Слабая зависимость скорости дефазировки от температуры обусловлена возможностью неупругого рассеяния, которое включает переходы на нижним многочастичные уровни квантовой точки. Также

подчеркиваем, что вклад упругого спин-флип в скорость дефазировки отличается от стандартного выражения для магнитной примеси, которое пропорционально $S(S + 1)/3$. Повторяем, что это происходит из-за дополнительных корреляций между амплитудами туннелирования для переходов на различные уровни квантовой точки. Используя Ур. (18) мы получаем при высоких температурах $\delta - J \ll T \ll \delta$:

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} \left[\frac{\delta(3\delta - 2J)}{6(\delta - J)^2} + \frac{T}{3(\delta - J)} \right]. \quad (30)$$

Отметим, что на самом деле обе оценки (29) и (30) также справедливы в размерности $d = 3$. При наличии расщепления Зеемана упругий спин-флип подавляется. Тогда с помощью Ур. (22), мы находим следующую оценку скорости дефазировки при низких температурах $T \ll \delta - J$ и умеренных магнитных полях, $\delta \gg b \gg \delta - J$:

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{4\pi e^2 n_s Q^2}{\nu E_c^2} [e^{-\beta E_+(B)} + e^{-\beta E_-(B)}]. \quad (31)$$

Отметим, что скорость дефазировки в данном случае экспоненциально мала по температуре, $\tau_\phi^{-1}(T) \sim \exp(-2\beta(\delta - J))$.

В случае обменного взаимодействия Изинга в квантовой точке $\tau_\phi(T)$ зависит от четности числа электронов при низких температурах $T \ll \delta - J$. Используя Ур. (25) и (26), мы получаем

$$\tau_{\phi,e}^{-1}(T) = \frac{8\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} e^{-\beta \Delta_e} \quad (32)$$

для четного числа электронов и

$$\tau_{\phi,o}^{-1}(T) = \frac{4\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2} [1 + \pi e^{-\beta \Delta_o}] \quad (33)$$

для нечетного числа электронов. При более высоких температурах $\delta \gg T \gg \delta - J$, время дефазировки становится нечувствительно к четности числа электронов:

$$\tau_\phi^{-1}(T) = \frac{16\pi n_s Q^2}{\nu E_c^2}. \quad (34)$$

Таким образом, время дефазировки из-за рассеяния на квантовой точке с обменом Изинга в температурном диапазоне $\delta \gg T \gg \delta - J$ похоже на магнитную примесь.

Далее мы анализируем экспериментальные следствия. Предположим, что есть некоторые электронные капли в 2D электронной

жидкости. Тогда в такой капле может быть локализовано некоторое число электронов. Мы моделируем такую каплю размера $L_d \gg l \gg \lambda_F$ квантовой точкой с обменным взаимодействием Гейзенберга $J = -F_0^\sigma \delta$. Здесь λ_F обозначает длину волны Ферми. Тогда при температурах $T \ll T_\star = n_s S_g / \nu$, где, напомним, $S_g \approx J / [2(\delta - J)] = 1 / [2(1 + F_0^\sigma)] \gg 1$ - суммарный спин капли, ожидается, что в спиновой восприимчивости доминирует температурная зависимость типа Кюри, $\chi \sim n_s S_g^2 / T$. Используя Ур. (30) в качестве оценки вклада в скорость дефазировки из-за рассеяния на спиновых каплях, мы находим, что она доминирует над линейным вкладом по T при температурах $T \ll T_s \sim \eta^2 T_\star$, где параметр $\eta = (Q/E_c) \sqrt{g} \sim g_{\text{ch}} l / (r_s L_d \sqrt{g})$. При условии, что параметр взаимодействия $r_s \sim \lambda_F / a_B \sim 1$, где a_B обозначает радиус Бора, и $g \gtrsim 1$, мы находим $\eta \ll 1$. Здесь мы используем условие малого туннельного кондактанса на канал, $g_{\text{ch}} \ll 1$. Таким образом, в диапазоне температур $T_s \ll T \ll T_\star$ мы ожидаем температурную зависимость спиновой восприимчивости типа Кюри, но обычную, линейную по T , скорость дефазировки. Вклад в скорость дефазировки из-за рассеяния электронов на электронных каплях с конечным спином будет доминировать над вкладом рассеяния, возникающего из-за флуктуаций в триплетном канале [15], если следующее условие выполняется $n_s^{fl} \ll \eta^2 n_s$ или, эквивалентно, $T_\star \ll T_s$. Поскольку плотность капель спина n_s не может быть больше $1/L_d^2$, температура насыщения меньше среднего расстояния между уровнями на квантовой точке, $T_s \ll \delta$ при условии $\eta \ll 1/\sqrt{S_g}$. Для подтверждения нашего предложения существования двух характерных температур T_s и $T_\star$ необходимы более подробные данные о структуре и свойствах капель спина.

Основная идея **главы 2** - рассмотреть логарифмические температурозависимые поправки к проводимости электронной неупорядоченной жидкости с редкими квантовыми магнитными примесями в рамках приближения Борна для неупругого рассеяния на магнитных примесях. В отличие от предыдущих работ, (i) мы рассмотрели случай различных g -факторов для электронов и магнитных примесей, $|g_e| \ll |g_i|$; (ii) мы сосредоточились на промежуточном диапазоне температур $|g_e| \mu_B H \ll T \ll |g_i| \mu_B H$; (iii) мы приняли во внимание электрон-электронное взаимодействие в канале "частица-дырка". Мы обнаружили, что в приближении Борна неупругое рассеяние на магнитных примесях приводит к дополнительной температурозависимой поправке к проводимости. Также неупругое рассеяние изменяет поправку Альтшулера-Аронова к проводимости. Наши предсказания представляют задачу для экспериментальных исследований низкотемпературного электронного

транспорта в неупорядоченных системах с редкими магнитными примесями.

Мы рассматриваем двумерную взаимодействующую электронную систему при наличии короткодействующего потенциального беспорядка. Кроме того, мы предполагаем наличие слабого спин-флип рассеяния, обусловленного обменным взаимодействием редких магнитных примесей с электронами, описываемым следующим гамильтонианом

$$H_{\text{mag}} = J \sum_j \psi^\dagger(\mathbf{r}_j) \mathbf{S}_j \boldsymbol{\sigma} \psi(\mathbf{r}_j) . \quad (35)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{S}_j$ означают матрицы Паули и оператор спина магнитной примеси в точке $\mathbf{r}_j$ соответственно. Операторы рождения и уничтожения электронов обозначаются как $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$. Мы будем рассматривать редкий магнитный беспорядок при следующих допущениях: (i) позиции примесей $\mathbf{r}_j$ имеют распределение Пуассона; (ii) спины примесей $\mathbf{S}_j$ независимы, но имеют свою собственную квантовую динамику. В отсутствие магнитного рассеяния эффективная теория поля для неупорядоченных взаимодействующих электронов в диффузионном пределе, $T \ll 1/\tau$, где τ обозначает упругое среднее время свободного пробега, определяется стандартным образом (см. в обзорах [10, 4]).

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\sigma = & - \int d\mathbf{r} \text{Tr} \left[\frac{g}{32} (\nabla Q)^2 - 4\pi T Z_\omega \eta Q - i Z_s b_e t_{33} Q \right] \\ & - \frac{\pi T}{4} \sum_{\alpha, n, r, j} \Gamma_j \int d\mathbf{r} \text{Tr} I_n^\alpha t_{rj} Q \text{Tr} I_{-n}^\alpha t_{rj} Q. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь 16 матриц t_{rj} , $j, r = 0, 1, 2, 3$ действуют в тензорном произведении пространств спина (индекс j) и Намбу (индекс r):

$$t_{rj} = \tau_r \otimes s_j, \quad r, j = 0, 1, 2, 3. \quad (37)$$

Здесь матрицы τ_0 и s_0 означают 2×2 единичные матрицы и

$$\tau_1/s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2/s_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3/s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

эффективное действие (36) записано с использованием следующих матриц

$$\eta_{nm}^{\alpha\beta} = n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad (I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m, k} \delta^{\alpha\beta} \delta^{\alpha\gamma} t_{00}, \quad (38)$$

где $\alpha, \beta = 1, \dots, N_r$ означают индексы реплик, а индексы n, m соответствуют фермионным частотам Мацубары $\varepsilon_n = \pi T(2n + 1)$.

Общая (включая спин) безразмерная (в единицах e^2/h) проводимость Друде обозначается g . Амплитуды взаимодействия Γ_j (для синглетного канала $\Gamma_0 = \Gamma_s$, а для триплетного канала $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma_t$) описывают электрон-электронное взаимодействие в канале "частица-дырка". Далее также будет удобно использовать $\gamma_j = \Gamma_j/Z_\omega$ и $\gamma_{s,t} = \Gamma_{s,t}/Z_\omega$. Параметр Z_ω учитывает нетривиальную перенормировку частоты при ренормгруппе [8, 7, 9]. Отметим, что затравочное значение параметра Z_ω равно $\pi\nu/4$, где ν обозначает плотность состояний на уровне Ферми. Последний член в первой строке Eq. (36) описывает влияние параллельного магнитного поля на электроны. Этот член явно нарушает симметрию по обращению времени. Величина $Z_s = Z_\omega + \Gamma_t$ описывает Ферми-жидкостное усиление g-фактора (подробности см. в обзорах [10, 4]). Отметим, что в этой главе мы пренебрегаем электрон-электронным взаимодействием в куперовском канале.

По построению матрица $Q(\mathbf{r})$ описывает локальные вращения вокруг пространственно независимой матрицы Λ :

$$Q = \mathcal{T}^{-1} \Lambda \mathcal{T}, \quad \Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \text{sgn } \varepsilon_n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}. \quad (39)$$

Здесь матрицы $\mathcal{T}$ удовлетворяют следующему соотношению симметрии:

$$C(\mathcal{T}^{-1})^T = \mathcal{T}C, \quad \mathcal{T}^T C = C\mathcal{T}^{-1}, \quad (40)$$

где $C = it_{12}$. Символ $\mathcal{T}^T$ означает матричное транспонирование $\mathcal{T}$. Как следствие Ур. (39) и (40), матрица Q удовлетворяет локальной нелинейной связи, $Q^2(\mathbf{r}) = 1$, удовлетворяет условию $\text{Tr } Q = 0$ и условию зарядового сопряжения

$$Q = Q^\dagger = C^T Q^T C. \quad (41)$$

Для учета вклада магнитных примесей в действие необходимо проделать следующие шаги. Стандартный вывод сигма-модельного действия производится с учетом добавки к гамильтониану (35). Далее производится усреднение по Пуассоновской статистике положения магнитных примесей (корреляциями между примесями мы пренебрегаем). Далее мы разлагаем действие до второго порядка по J . Далее мы усредняем по температурной статистике изолированной магнитной примеси. Итого, для дополнительного вклада в действие за

счет редких магнитных примесей получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{mag}} = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{i}{2} n_s \pi \nu J \langle S_z \rangle \mathbf{s} \text{Tr } t_{33} Q + \frac{Z_\omega T}{4\tau_{s0}} \sum_n \chi_+(i\omega_n) \right. \\ \times \left[\text{Tr } t_- I_n Q t_+ I_{-n} Q - \frac{1}{2} \text{Tr } t_- I_n Q \text{Tr } t_+ I_{-n} Q \right] \\ \left. + \frac{Z_\omega}{2\tau_{s0}} M_2 \left[\text{Tr } t_{33} Q t_{33} Q - \frac{1}{2} \text{Tr } t_{33} Q \text{Tr } t_{33} Q \right] \right\}, \end{aligned} \quad (42)$$

где $t_\pm = t_{31} \pm it_{32}$ и

$$\frac{1}{\tau_{s0}} = \frac{n_s (\pi \nu J)^2 S(S+1)}{2Z_\omega} \quad (43)$$

обозначает классическую частоту спин-флип при нулевом магнитном поле.

В рамках формализма нелинейной сигма-модели статическую проводимость можно рассчитать по следующей формуле Кубо:

$$\begin{aligned} g' = -\frac{g}{16n} \left\langle \text{Tr} [J_n^\alpha, Q(\mathbf{r})] [J_{-n}^\alpha, Q(\mathbf{r})] \right\rangle + \frac{g^2}{64dn} \int d\mathbf{r}' \\ \times \left\langle \text{Tr } J_n^\alpha Q(\mathbf{r}) \nabla Q(\mathbf{r}) \text{Tr } J_{-n}^\alpha Q(\mathbf{r}') \nabla Q(\mathbf{r}') \right\rangle, \end{aligned} \quad (44)$$

где d означает размерность, предполагается предел $n \rightarrow 0$, и

$$J_n^\alpha = \frac{t_{30} - t_{00}}{2} I_n^\alpha + \frac{t_{30} + t_{00}}{2} I_{-n}^\alpha. \quad (45)$$

Вычисляя средние с пропагаторами диффузных мод, получаемых из квадратичного разложения полного действия стандартным образом, в случае $T \ll |b_i|$ до второго порядка по J (первого порядка по γ^{sf}), в двумерном случае, находим для модифицированной поправки Альтшулера-Аронова

$$\begin{aligned} \delta g^{\text{AA}} = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^3 \left[1 - \frac{1 + \gamma_j}{\gamma_j} \ln(1 + \gamma_j) \right] \ln \frac{1}{2\pi T \tau} \\ - \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma_s} - \frac{1 + \gamma_s}{\gamma_s^2} \ln(1 + \gamma_s) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} \\ - \frac{2\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[1 - \frac{1}{\gamma_t} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} \\ - \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{\gamma_t} + \frac{1 - \gamma_t}{\gamma_t^2} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \end{aligned} \quad (46)$$

Здесь в первой строке представлена стандартная поправка Альтшулера-Аронова к проводимости. Поскольку соответствующий вклад существует для частот больше $|b_i|$, то ультрафиолетовая обрезка для этой поправки - обратное время свободного пробега $1/\tau$. Во второй строке описывается поправка, обусловленная эффектом неупругого рассеяния на магнитных примесях в синглетном канале частица-дырка. Третья строка соответствует поправке от триплетного канала частица-дырка с общей спиновой проекцией равной ± 1 . Четвертая строка описывает поправку триплетного канала частица-дырка с нулевой суммарной спиновой проекцией. Отметим, что поправки, пропорциональные γ^{sf} , включают $\ln(|b_i|/2\pi T)$ и исчезают при отсутствии электрон-электронного взаимодействия. Мы упоминаем, что в стандартной поправке Альтшулера-Аронова (первая строка из Ур. (46))) синглетный канал благоприятствует локализации (так как $\gamma_s \leq 0$), в то время как триплетный канал благоприятствует антилокализации (так как $\gamma_t \geq 0$) при низкой температуре. Поправки, пропорциональные γ^{sf} , работают в обратном направлении, т.е. наличие неупругого рассеяния на магнитных примесях уменьшает эффект локализации (антилокализации) в каналах синглета (триплета) соответственно. Другая поправка из-за неупругого рассеяния

$$\delta g_2^{\text{sf}} = \frac{\gamma^{\text{sf}}}{\pi\gamma_t} \left[1 - \frac{1}{\gamma_t} \ln(1 + \gamma_t) \right] \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \quad (47)$$

Мы отмечаем, что эта поправка является положительной, т.е. работает в пользу антилокализации при низких температурах. В отсутствие электрон-электронного взаимодействия δg_2^{sf} является единственной поправкой к проводимости из-за неупругого рассеяния на магнитных примесях. Она приобретает следующую форму:

$$\delta g_2^{\text{sf}} \rightarrow \frac{\gamma^{\text{sf}}}{2} \ln \frac{|b_i|}{2\pi T} = \frac{1}{2\pi(S+1)\tau_{s0}|b_i|} \ln \frac{|b_i|}{2\pi T}. \quad (48)$$

Эта квантовая поправка работает в противоположном направлении по отношению к слабой локализации.

Основная идея **главы 3** - проанализировать структуру собственных операторов ренормгруппы сигма-модельного действия (36). Основная мотивация состоит в том, что в отсутствие электрон-электронного взаимодействия собственные операторы могут быть найдены посредством теоретико-группового анализа. При наличии же взаимодействия задача становится намного сложнее, и решение не очевидно. Мы, используя двухпетлевой анализ и метод перенормировки

фонового поля, показываем, что локальные операторы чистого скейлинга без производных в нелинейной сигма-модели Финкельштейна могут быть построены простым обобщением соответствующих операторов для невзаимодействующего случая. Эти операторы чистого скейлинга демонстрируют мультифрактальное поведение и описывают мезоскопические флуктуации одночастичной функции Грина.

Мы рассматриваем следующие операторы: простейший локальный оператор без производных дается

$$\mathcal{K}_1(E) = \frac{1}{4} \text{Re } \mathcal{P}_1^+(E), \quad (49)$$

где запаздывающая корреляционная функция $\mathcal{P}_1^+(E)$ может быть получена из ее мацубаровского аналога

$$\mathcal{P}_1(i\varepsilon_n) = \text{sp} \langle Q_{nn}^{\alpha\alpha} \rangle \quad (50)$$

после стандартного аналитического продолжения, $i\varepsilon_n \rightarrow E + i0^+$. Здесь символ sp обозначает след по спину и пространству Намбу. Сумма по репличному индексу α не подразумевается. Физически $\mathcal{K}_1(E)$ соответствует усредненной по беспорядку LDOS:

$$\mathcal{K}_1(E) = \frac{\langle \rho(E) \rangle_{\text{dis}}}{\rho_0}, \quad \rho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (51)$$

Здесь $G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ - это одночастичная функция Грина для данной реализации беспорядка. Величина ρ_0 обозначает плотность состояний (включая спин) на энергии $E \sim 1/\tau$. Отметим, что энергия E отсчитывается от уровня Ферми. Поскольку $\mathcal{K}_1(E)$ представляет собой усредненную по беспорядку плотность состояний, неудивительно, что это оператор чистого скейлинга под действием группы перенормировки.

Локальный оператор без производных, в котором задействованы две матрицы Q , можно записать следующим образом

$$\mathcal{K}_2(E_1, E_2) = \frac{1}{64} \sum_{p_1, p_2 = \pm} p_1 p_2 \mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}(E_1, E_2). \quad (52)$$

Здесь корреляционная функция $\mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2; p_1 p_2}(E_1, E_2)$ может быть получена из корреляционной функции Мацубары

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2^{\alpha_1 \alpha_2}(i\varepsilon_{n_1}, i\varepsilon_{n_2}) &= \langle \text{sp } Q_{n_1 n_1}^{\alpha_1 \alpha_1}(\mathbf{r}) \text{sp } Q_{n_2 n_2}^{\alpha_2 \alpha_2}(\mathbf{r}) \rangle \\ &+ \mu_2 \langle \text{sp } [Q_{n_1 n_2}^{\alpha_1 \alpha_2}(\mathbf{r}) Q_{n_2 n_1}^{\alpha_2 \alpha_1}(\mathbf{r})] \rangle \end{aligned} \quad (53)$$

стандартным аналитическим продолжением на реальные частоты: $\varepsilon_{n_1} \rightarrow E_1 + ip_1 0^+$ и $\varepsilon_{n_2} \rightarrow E_2 + ip_2 0^+$. Здесь α_1 и α_2 - два разных фиксированных репличных индекса. Оператор $\mathcal{K}_2(E_1, E_2)$ параметризован вещественным числом μ_2 . Для $\mu_2 = -2$ данный оператор описывает двухточечную корреляционную функцию LDOS, усредненную по реализации беспорядка:

$$\mathcal{K}_2(E_1, E_2) \Big|_{\mu_2=-2} = \rho_0^{-2} \langle \rho(E_1, \mathbf{r}) \rho(E_2, \mathbf{r}) \rangle_{\text{dis}}. \quad (54)$$

Недавно в двухпетлевом приближении в NLSM Финкельштейна было показано, что оператор $\mathcal{K}_2(E_1, E_2)$ в случае $\mu_2 = -2$ является оператором чистого скейлинга [6].

Общий оператор, который включает в себя q штук матричных полей Q , может быть определен как

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q(E_1, \dots, E_q) &= \frac{1}{2^{3q}} \sum_{p_1, \dots, p_q = \pm} \left(\prod_{j=1}^q p_j \right) \\ &\times \mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q; p_1, \dots, p_q}(E_1, \dots, E_q). \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь $\mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q; p_1, \dots, p_q}(E_1, \dots, E_q)$ можно получить из корреляционной функции в мнимом времени

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_q^{\alpha_1, \dots, \alpha_q}(i\varepsilon_{n_1}, \dots, i\varepsilon_{n_q}) &= \sum_{\{k_1, \dots, k_q\}} \mu_{k_1, \dots, k_q} \langle \mathcal{A}_{k_1, \dots, k_q} \rangle, \\ \mathcal{A}_{k_1, \dots, k_q} &= \prod_{r=k_1}^{k_q} \text{sp} [Q_{n_{j_1} n_{j_2}}^{\alpha_{j_1} \alpha_{j_2}} Q_{n_{j_2} n_{j_3}}^{\alpha_{j_2} \alpha_{j_3}} \dots Q_{n_{j_r} n_{j_1}}^{\alpha_{j_r} \alpha_{j_1}}], \end{aligned} \quad (56)$$

после аналитического продолжения на реальные частоты: $\varepsilon_{n_j} \rightarrow E_j + ip_j 0^+$. Сумма в Ур. (56) выполняется по разбиениям q , т.е. по всем наборам положительных целых чисел $\{k_1, \dots, k_q\}$, которые удовлетворяют следующим условиям: $k_1 + k_2 + \dots + k_q = q$ и $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_q > 0$. По индексам реплик, которые все считаются разными, нет суммы, $\alpha_j \neq \alpha_k$, если $j \neq k$ для $j, k = 1, \dots, q$. Далее мы выбираем такую нормировку, что $\mu_{1,1,1,\dots,1} = 1$. Выполняя перенормировку в схеме минимального вычитания (см., например [3]), получим условие конечности аномальной размерности операторов с q полей Q

$$\mu_{2,1,\dots,1}^2 + \mu_{2,1,\dots,1} = 3\mu_{3,1,\dots,1} + 2\mu_{2,2,\dots,1} + q(q-1). \quad (57)$$

Удивительно, но уравнение (57) не зависит от параметров взаимодействия γ_s и γ_t . Это означает, что Ур. (57) выполняется наборами $\{\mu_{k_1, \dots, k_q}\}$, определяющими операторы чистого скейлинга в теории без взаимодействия [11, 27, 28]. Упомянем, что для $q = 2$ Ур. (57) позволяет определить возможные значения коэффициента μ_2 (равного -2 и 1) и, следовательно, найти все возможные операторы чистого скейлинга при $q = 2$. Для того чтобы определить все коэффициенты $\{\mu_{k_1, \dots, k_q}\}$ для $q \geq 3$, необходимо проанализировать следующие порядки в петлевом разложении. Также мы представляем аргументы, основанные на методе перенормировки фоновым полем, в пользу того, что наборы $\{\mu_{k_1, \dots, k_q}\}$, определяющие операторы чистого скейлинга в невзаимодействующей задаче, также определяют операторы чистого скейлинга во взаимодействующей задаче.

При условии, что Ур. (57) выполнено, аномальная размерность соответствующего оператора чистого скейлинга в двухпетлевом приближении дается

$$\zeta_q^{(\mu)} = \mu_{2,1,1,\dots,1} \left[t + \frac{t^2}{2} \sum_{j=0}^3 c(\gamma_j) \right] + O(t^3). \quad (58)$$

где функция

$$c(\gamma) = 2 + \frac{2+\gamma}{\gamma} \text{li}_2(-\gamma) + \frac{1+\gamma}{2\gamma} \ln^2(1+\gamma) \quad (59)$$

включает в себя полилогарифм $\text{li}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$. Подчеркнем, что в двухпетлевом приближении аномальная размерность оператора чистого скейлинга $\zeta_q^{(\mu)}$ полностью определяется одним коэффициентом $\mu_{2,1,1,\dots,1}$. Критический индекс $\Delta_q^{(\mu)}$ для оператора чистого скейлинга $\mathcal{K}_q^{(\mu)}$ равен соответствующей аномальной размерности $\zeta_q^{(\mu)}$ в фиксированной точке.

Также для дополнительного свидетельства в пользу основного довода о том, что форма собственных операторов не меняется из-за наличия взаимодействия, мы анализируем перенормировку методом фонового поля в однопетлевом приближении. Также мы показываем, что найденные операторы могут быть выражены как пространственные корреляторы LDOS, что дает теоретическую возможность получить их из аккуратного анализа результатов туннельной микроскопии. Например, для квадратичных операторов, как уже упоминалось, оператор $\mathcal{K}_2^{(-2)}$ может быть выражен в виде второго момента LDOS, см. (54).

Другой оператор чистого скейлинга билинейный по Q может быть

аналогичным образом выражен через одночастичную функцию Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{(1)} \propto & \langle \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}') \\ & - \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \text{Im } G_E^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rangle_{\text{dis}}, \end{aligned} \quad (60)$$

где точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ удовлетворяют условию

$$\lambda_F \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll l, \quad (61)$$

где λ_F и l означают длину Ферми и среднюю длину свободного пробега соответственно.

Список литературы

- [1] I. Aleiner, P. Brouwer, and L. Glazman. Quantum effects in Coulomb blockade. *Phys. Rep.*, 358:309, 2002.
- [2] Y. Alhassid, K. N. Nesterov, and S. Schmidt. The coexistence of superconductivity and ferromagnetism in nano-scale metallic grains. *Physica Scripta*, 2012(T151):014047, 2012.
- [3] D. J. Amit. Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena. World Scientific, Singapore, 1993.
- [4] D. Belitz and T. R. Kirkpatrick. The Anderson-Mott transition. *Rev. Mod. Phys.*, 66(2):261, 1994.
- [5] I. S. Burmistrov, Y. Gefen, and M. N. Kiselev. Exact solution for spin and charge correlations in quantum dots: Effect of level fluctuations and Zeeman splitting. *Phys. Rev. B*, 85:155311, 2012.
- [6] I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Multifractality and electron-electron interaction at Anderson transitions. *Phys. Rev. B*, 91:085427, 2015.
- [7] A. M. Finkelstein. Influence of coulomb interaction on the properties of disordered metals. *JETP*, 57:97, 1983.
- [8] A. M. Finkelstein. On the frequency and temperature dependence of the conductivity near a metal-insulator transition. *JETP Lett.*, 37:517, 1983.
- [9] A. M. Finkelstein. Metal-insulator transition in a disordered system. *JETP*, 59:212, 1984.
- [10] A. M. Finkelstein. *Electron Liquid in Disordered Conductors*, volume 14 of *Soviet scientific reviews*. Harwood Academic Publishers, 1990.

- [11] D. Höf and F. Wegner. Calculation of anomalous dimensions for the nonlinear sigma model. *Nucl. Phys. B*, 275:561, 1986.
- [12] I. L. Kurland, I. L. Aleiner, and B. L. Altshuler. Mesoscopic magnetization fluctuations for metallic grains close to the Stoner instability. *Phys. Rev. B*, 62:14886, 2000.
- [13] D. S. Lyubshin, A. U. Sharafutdinov, and I. S. Burmistrov. Statistics of spin fluctuations in quantum dots with Ising exchange. *Phys. Rev. B*, 89:201304, 2014.
- [14] T. Micklitz, A. Altland, T. A. Costi, and A. Rosch. Universal dephasing rate due to diluted Kondo impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 96:226601, 2006.
- [15] B. N. Narozhny, I. L. Aleiner, and A. I. Larkin. Magnetic fluctuations in two-dimensional metals close to the Stoner instability. *Phys. Rev. B*, 62:14898, 2000.
- [16] K. N. Nesterov and Y. Alhassid. Thermodynamics of ultrasmall metallic grains in the presence of pairing and exchange correlations: Mesoscopic fluctuations. *Phys. Rev. B*, 87:014515, 2013.
- [17] K. N. Nesterov and Y. Alhassid. Magnetic response of energy levels of superconducting nanoparticles with spin-orbit scattering. *Phys. Rev. B*, 92:144508, 2015.
- [18] M. Reznikov, A. Y. Kuntsevich, N. Tenen, and V. M. Pudalov. Thermodynamic magnetization of two-dimensional electron gas measured over wide range of densities. *JETP Lett.*, 92:470, 2010.
- [19] M. Schechter. Spin magnetization of small metallic grains. *Phys. Rev. B*, 70:024521, 2004.
- [20] S. Schmidt and Y. Alhassid. Mesoscopic competition of superconductivity and ferromagnetism: Conductance peak statistics for metallic grains. *Phys. Rev. Lett.*, 101:207003, 2008.
- [21] S. Schmidt, Y. Alhassid, and K. V. Houcke. Effect of a Zeeman field on the transition from superconductivity to ferromagnetism in metallic grains. *EPL*, 80:47004, 2007.
- [22] A. U. Sharafutdinov, D. S. Lyubshin, and I. S. Burmistrov. Spin fluctuations in quantum dots. *Phys. Rev. B*, 90:195308, 2014.

- [23] A. Shnirman, Y. Gefen, A. Saha, I. S. Burmistrov, M. N. Kiselev, and A. Altland. Geometric quantum noise of spin. *Phys. Rev. Lett.*, 114:176806, 2015.
- [24] A. Shnirman, A. Saha, I. S. Burmistrov, M. N. Kiselev, A. Altland, and Y. Gefen. U(1) and SU(2) quantum dissipative systems: The Caldeira-Leggett vs. the Ambegaokar-Eckern-Schön approaches. *JETP*, 122:576, 2016.
- [25] N. Tenen, A. Y. Kuntsevich, V. M. Pudalov, and M. Reznikov. Spin-droplet state of an interacting 2D electron system. *Phys. Rev. Lett.*, 109:226403, 2012.
- [26] K. Van Houcke, Y. Alhassid, S. Schmidt, and S. M. A. Rombouts. The competition between superconductivity and ferromagnetism in small metallic grains: Thermodynamic properties. 2010.
- [27] F. Wegner. Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model in $2 + \epsilon$ dimensions (I). *Nucl. Phys. B*, 280:193, 1987.
- [28] F. Wegner. Anomalous dimensions for the nonlinear sigma-model, in $2 + \epsilon$ dimensions (II). *Nucl. Phys. B*, 280:210, 1987.
- [29] Z.-J. Ying, M. Cuoco, C. Noce, and H.-Q. Zhou. Coexistence of spin polarization and pairing correlations in metallic grains. *Phys. Rev. B*, 74:012503, 2006.
- [30] Z.-J. Ying, M. Cuoco, C. Noce, and H.-Q. Zhou. Field response of metallic grains with magnetic and pairing correlations. *Phys. Rev. B*, 74:214506, 2006.