Сиротенко Антон Володимирович, асистент кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Націо&shy;нального технічного університету України &laquo;Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського&raquo;: &laquo;Обме&shy;жені та інтегровані зі степенем р розв&rsquo;язки різнице&shy;вих та диференціальних рівнянь у банаховому просто&shy;рі&raquo; (01.01.02 - диференціальні рівняння). Спецрада Д

у Київському національному університеті іме&shy;ні Тараса Шевченка

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова

праця на правах рукопису

СИРОТЕНКО Антон Володимирович

УДК 517.98

ДИСЕРТАЦІЯ

ОБМЕЖЕНІ ТА ІНТЕГРОВНІ ЗІ СТЕПЕНЕМ р РОЗВ’ЯЗКИ

РІЗНИЦЕВИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У

БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

01.01.02 – диференціальні рівняння

подається на здобуття наукового ступеня кандидата фізикоматематичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,

результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне

джерело

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.В.Сиротенко

Науковий керівник Городній Михайло Федорович, доктор фізикоматематичних наук, професор

Київ – 2018

Зміст

Вступ 15

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури та основних результатів 22

1.1 Різницеві рівняння та їх розв’язки ......................................... 22

1.2 Різницево-операторні рівняння з неперервним аргументом 29

1.3 Диференціально-операторні рівняння та їх розв’язки.......... 32

РОЗДІЛ 2. Обмежені та сумовні зі степенем

p

розв’язки різницевого рівняння з цілочисельним аргументом 40

2.1 Постановка задачі ..................................................................... 40

2.2 Необхідні і достатні умови сумовності зі степенем

p

розв’язку різницевого рівняння .................................................... 41

2.2.1 Допоміжні леми................................................................ 41

2.2.2 Основний результат......................................................... 55

2.3 Приклади.................................................................................... 57

2.4 Висновки.................................................................................... 60

РОЗДІЛ 3. Інтегровні зі степенем

p

розв’язки різницевого рівняння з неперервним аргументом 61

3.1 Постановка задачі ..................................................................... 61

3.2 Необхідні і достатні умови інтегровності зі степенем

p

розв’язку різницевого рівняння з одним операторним коефіцієнтом на півосі .......................................................................... 63

3.2.1 Допоміжні леми................................................................ 63

13

3.2.2 Необхідні і достатні умови ............................................. 64

3.3 Приклади.................................................................................... 68

3.4 Необхідні і достатні умови інтегровності зі степенем

p

розв’язку різницевого рівняння з кількома операторними коефіцієнтами на півосі ..................................................................... 72

3.4.1 Постановка задачі ............................................................ 72

3.4.2 Необхідні і достатні умови ............................................. 73

3.5. Необхідні і достатні умови інтегровності зі степенем

p

розв’язку різницевого рівняння з одним операторним коефіцієнтом на всій дійсній осі .......................................................... 77

3.5.1 Постановка задачі ............................................................ 77

3.5.2 Допоміжні леми................................................................ 79

3.5.3 Необхідні і достатні умови ............................................. 83

3.6 Приклади...................................................................................... 88

3.7 Висновки...................................................................................... 90

РОЗДІЛ 4. Інтегровні з

p-м степенем розв’язки операторно-диференціального рівняння 92

4.1 Постановка задачі ....................................................................... 92

4.2 Необхідні і достатні умови інтегровності зі степенем

p

розв’язку операторно-диференціального рівняння на півосі..... 93

4.2.1 Допоміжні леми................................................................ 93

4.2.2 Необхідні і достатні умови ............................................. 98

4.3 Приклади...................................................................................... 102

14

4.4 Інтегровні зі степенем

p

розв’язки операторно-диференціального рівняння на всій осі.......................................................... 105

4.4.1 Постановка задачі ............................................................ 105

4.4.2 Допоміжні твердження.................................................... 107

4.4.3 Необхідні і достатні умови інтегровності зі степенем

p

розв’язків операторно-диференціального рівняння на

всій осі................................................................................ 109

4.5 Висновки...................................................................................... 120

Висновки 122

Список використаних джерел 124

15

Вступ

Обгрунтування вибору теми дослідження. Питання щодо

властивостей розв’язків диференціальних та різницевих рівнянь виникали

ще у роботах А. Пуанкаре, О. Перрона та О.М. Ляпунова. У XX столітті

почали з’являтися систематизовані виклади, в яких досліджувалися різні

властивості цих розв’язків. Методи, запропоновані О. Перроном і

А.Пуанкаре, отримали продовження в роботах великої кількості відомих

математиків, таких як В.І.Арнольд, М.Г.Крейн, Ю.Л.Далецький,

Х.Массера, Х.Шеффер, В.Коппель, Ю.О.Митропольський,

А.М.Самойленко, В.Ю.Слюсарчук, Д.І.Мартинюк, Д.Хенрі, А.Г.Баскаков,

О.А.Бойчук, Г.П.Пелюх, А.Я.Дороговцев, М.Ф.Городній Ю.В.Томілов,

О.О.Покутний, та багато інших.

Розвиток електронно-обчислювальної техніки дав новий поштовх

дослідженням різницевих і диференціальних рівнянь, як у

скінченновимірних, так і у абстрактних просторах. В середині XX століття

було отримано важливі результати щодо властивостей розв’язків

різницево-операторних та диференціально операторних рівнянь у зв’язку з

властивостями експоненціальної дихотомії у відповідних однорідних

лінійних систем. Результати М.Г. Крейна і В.Ю. Слюсарчука показали

зв’язок властивостей розв’язків різницевих та диференціальних рівнянь з

умовами на операторний коефіцієнт. Їхні результати були узагальнені

С.Я.Якубовим, М.К. Балаєвим, А.Г. Баскаковим, М.Ф. Городнім.

Важливість дослідження питання щодо існування єдиного сумовного

зі степенем

p

розв’язку різницево-операторного рівняння було показано

А.Г.Баскаковим, О.І. Пастуховим, В.Г. Мазьєю та М.Г. Сулімовим.

Отримані ними результати для обмежених та замкнених операторних

16

коефіцієнтів були використані в подальшому для досліджень існування

інтегровних зі степенем

p

розв’язків диференціально-операторних

рівнянь.

У дисертаційній роботі розглянуто різницево-операторні рівняння як

з дискретним, так і з неперервним аргументом, а також диференціальнооператорні-рівняння. Для кожного із зазначених типів рівнянь вивчалося

питання щодо існування обмежених або сумовних зі степенем

p

, або

інтегровних зі степенем

p

розв’язків відповідних рівнянь у тому випадку,

коли умови на операторний коефіцієнт, що забезпечували б існування

таких розв’язків для усіх правих частин, порушуються.

Аналогічне питання щодо різницево-операторного рівняння з

натуральним аргументом розглянуто М.Ф.Городнім та О.В.Вятчаніновим.

Отримані ними результати показують важливість дослідження

властивостей розв’язків рівнянь у вказаному випадку. Поширення

отриманих результатів на випадок цілочисельного аргументу, а також на

випадок неперервного аргументу, є нетривіальною задачею, що потребує

детального вивчення. Відтак виконані в дисертаційній роботі дослідження,

окрім своєї наукової новизни, мають вагоме теоретичне значення і можуть

бути застосовані в подальшому вивченні різницево-операторних та

диференціально-операторних рівнянь.

В результаті досліджень, викладених в дисертаційній роботі,

отримано критерії існування і єдиності обмеженого або сумовного зі

степенем

p

розв’язку різницево-операторного рівняння з цілочисельним

аргументом, а також інтегровного зі степенем

p

розв’язку різницевооператорного рівняння з неперервним аргументом за умови, що «вхідні»

послідовності або функції належать деякому спеціальному класу.

Аналогічні результати щодо існування обмеженого або інтегровного зі

17

степенем

p

розв’язку було отримано і для диференціально-операторного

рівняння.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційну роботу виконано в рамках державної бюджетної

дослідницької наукової теми №06БФ038-01 «Якісні та аналітичні методи

дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних

полів» (номер державної реєстрації 0106U005863).

Мета і завдання дослідження. Об’єктом дослідження є різницеві та

диференціальні рівняння у банаховому просторі.

Предмет дослідження – обмежені та сумовні зі степенем

p

розв’язки різницево-операторного рівняння; обмежені та інтегровні зі

степенем

p

розв’язки різницевих рівнянь з неперервним аргументом та

диференціально-операторних рівнянь.

Мета і завдання дослідження – у випадку, коли не виконуються

умови класичної теореми М.Г.Крейна про існування та єдиність

обмежених розв’язків диференціально-операторного рівняння або її

аналогів для різницево-операторних рівнянь отримати необхідні і достатні

умови, що забезпечують

- існування єдиного обмеженого або сумовного зі степенем

p

розв’язку різницево-операторних рівнянь з дискретним

(неперервним) аргументом для кожної «вхідної» послідовності

(функції) із деякого спеціального класу;

- існування єдиного обмеженого або інтегровного зі степенем

p

розв’язку диференціально-операторного рівняння для кожної функції

у правій частині, що належить деякому спеціальному класу.

18

Методи досліджень. У дисертаційній роботі використано методи

функціонального аналізу, теорії різницевих та диференціальних рівнянь, а

також теорії операторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Для різницевого

рівняння з дискретним аргументом в банаховому просторі доведено

критерій існування та єдиності обмеженого на

Z

або сумовного зі

степенем

p на

Z

розв’язку для кожної «вхідної» послідовності, елементи

якої належать деякій спеціальній множині банахового простору.

Отримано необхідні і достатні умови на операторний коефіцієнт, що

забезпечують існування єдиного обмеженого або інтегровного зі степенем

p

розв’язку різницевого рівняння з неперервним аргументом, визначеним

на додатній півосі або на всій числовій осі, для усіх «вхідних» функцій, які

належать деяким спеціальним класам.

Отримано необхідні і достатні умови, за виконання яких розв’язок

задачі Коші для диференціально-операторного рівняння буде обмеженим

або інтегровним зі степенем

p

для кожної функції у правій частині, що

належить деякому спеціальному класу, і кожної початкової умови з деякої

інваріантної відносно операторного коефіцієнта множини елементів

банахового простору.

Доведено критерій існування та єдиності обмеженого або

інтегровного зі степенем

p розв’язку диференціального рівняння з

операторним коефіцієнтом, заданого на всій числовій осі, для кожної

функції у правій частині, що належить деякому спеціальному класу.

У кожному з випадків, що розглядаються, «вхідні» функції із

спеціального класу набувають значення у деякій інваріантній відносно

операторного коефіцієнта множині елементів банахового простору.

Отримано умови на ці множини, які забезпечують відповідні властивості

19

розв’язків різницево-операторного або диференціально-операторного

рівняння.

Усі отримані результати є новими.

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи

отримано здобувачем самостійно. За результатами дисертації автором

опубліковано 5 робіт, серед яких 4 – у співавторстві з науковим керівником

Городнім М.Ф. У них Городньому М. Ф. належить постановка задач та

загальне керівництво роботою.

Апробація матеріалів дисертації. Основні результати дослідження

доповідалися та обговорювалися на таких конференціях і семінарах:

- Міжнародна наукова конференція молодих вчених

присвячена 70-річчю механіко-математичного факультету

КНУ (м. Київ, 13-15 грудня 2010 р.);

- Міжнародна наукова конференція «Диференціальні рівняння

та їх застосування», присвячена 65-річчю кафедри

інтегральних та диференціальних рівнянь Київського

національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ,

8-10 червня 2011 р. );

- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені

академіка М. Кравчука (м. Київ, 19-21 квітня 2012 р.);

- Міжнародна математична конференція «Диференціальні

рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та

математичні методи механіки» до 100-річчя від дня

народження члена-кореспондента НАН України Положого

Георгія Миколайовича (м. Київ, 23-24 квітня 2014 р. );

- Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені

академіка Михайла Кравчука (м. Київ, 14-15 травня 2015 р.);

20

- Засідання наукового семінару кафедри загальної математики

механіко-математичного факультету Київського

національного університету імені Тараса Шевченка

(керівники – проф. О.М.Станжицький, проф. Г.Л.Кулініч)

(м.Київ, 12 квітня 2017 р. );

- Засідання наукового семінару «Асимптотичні та аналітичні

методи для задач математичної фізики» кафедри

математичної фізики механіко-математичного факультету

Київського національного університету імені Тараса

Шевченка (керівники – проф. В.Г. Самойленко, проф.

Т.А.Мельник) (м. Київ, 27 квітня 2017 р.);

- Засідання наукового семінару кафедри інтегральних та

диференціальних рівнянь механіко-математичного

факультету Київського національного університету імені

Тараса Шевченка (керівники – академік НАН України

М.О.Перестюк, академік НАН України А.М. Самойленко) (м.

Київ, 15 листопада 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи було

опубліковано в 10 наукових публікаціях. З них

- 5 статей [1-5] у наукових фахових виданнях України, 2 статті

[3, 5] з яких надруковані у журналах, англомовна версія яких

включена до міжнародної наукометричної бази даних

Scopus;

- 5 тез доповідей на міжнародних математичних конференціях

[6-10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з

анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаної

21

літератури, що містить 126 найменувань. Повний обсяг роботи становить

137 сторінок друкованого тексту.

Висновки

Удисертаційнійроботірозглянуторізницевірівнянняубанаховому

просторіздискретнимтанеперервнимаргументоматакож

диференціальнерівняннязоператорнимкоефіцієнтомОтриманонові

результатищодообмеженостітасумовностізістепенем



розв’язків

різницевогорівняннязцілочисельнимаргументоміщодообмеженостіі

інтегровностізастепенем



розв’язківрізницевогорівнянняз

неперервнимаргументоматакождиференціальнооператорногорівняння

Основнимирезультатамидисертаційноїроботиєтакірезультати

Длярізницевогорівнянняздискретнимаргументомвбанаховому

просторідоведенокритерійіснуваннятаєдиностіобмеженогона



або

сумовногозістепенем

на



розв’язкудлякожноївхідної

послідовностіелементиякоїналежатьдеякійспеціальніймножині

банаховогопростору

Отриманонеобхідніідостатніумовинаоператорнийкоефіцієнтщо

забезпечуютьіснуванняєдиногообмеженогоабоінтегровногозістепенем



розв’язкурізницевогорівняннязнеперервнимаргументомвизначеним

надодатнійпівосіабонавсійчисловійосідляусіхвхіднихфункційякі

належатьдеякимспеціальнимкласам

Отриманонеобхідніідостатніумовизавиконанняякихрозв’язок

задачіКошідлядиференціальнооператорногорівняннябудеобмеженим

абоінтегровнимзістепенем



длякожноїфункціїуправійчастиніщо

належитьдеякомуспеціальномукласуікожноїпочатковоїумовиздеякої

інваріантноївідноснооператорногокоефіцієнтамножиниелементів

банаховогопростору



Доведенокритерійіснуваннятаєдиностіобмеженогоабо

інтегровногозістепенем

розв’язкудиференціальногорівнянняз

операторнимкоефіцієнтомзаданогонавсійчисловійосідлякожної

функціїуправійчастиніщоналежитьдеякомуспеціальномукласу

Укожномузвипадківщорозглядаютьсявхідніфункціїіз

спеціальногокласунабуваютьзначенняудеякійінваріантнійвідносно

операторногокоефіцієнтамножиніелементівбанаховогопростору

Отриманоумовинацімножиниякізабезпечуютьвідповіднівластивості

розв’язківрізницевооператорногоабодиференціальнооператорного

рівняння