МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Подоприхин Дмитрий Александрович

Неподвижные точки и совпадения отображений упорядоченных множеств

Специальность 01.01.04 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова”.

Научные руководители: **Фоменко Татьяна Николаевна,**
доктор физико-математических наук, доцент

Богатый Семеон Антонович,
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Семенов Павел Владимирович,**
доктор физико-математических наук, профессор, факультет математики НИУ “Высшая школа экономики”, профессор

Геворкян Павел Самвелович,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО “Московский педагогический государственный университет”, заведующий кафедрой математического анализа

Обуховский Валерий Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО “Воронежский государственный педагогический университет”, заведующий кафедрой высшей математики

Защита состоится 25 мая 2018 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова” по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.
E-mail: msu.01.17@mail.ru
С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале диссертаций Фундаментальной библиотеки ФГБОУ ВО “Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова” по адресу: Москва, Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте “Истина”: `https://istina.msu.ru/dissertations/109097282`

Автореферат разослан 25 апреля 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ
член-корреспондент РАН Шафаревич Андрей Игоревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию некоторых вопросов теории неподвижных точек и совпадений отображений упорядоченных множеств.

Основным вопросом теории неподвижных точек является поиск условий, которые гарантируют, что для отображения $F : X \to X$ некоторого множества X в себя найдется точка $x \in X$ такая, что $x = F(x)$. В диссертации рассматриваются проблемы, касающиеся вопросов существования неподвижных точек, когда на множестве X задан частичный порядок.

Классическим результатом в теории неподвижных точек отображений частично упорядоченных множеств является теорема Кнастера-Тарского[1] (Knaster-Tarski; см. также [2]) и теорема Цермело (Zermelo)[2] о неподвижной точке. Накладывая дополнительные предположения в теореме Кнастера-Тарского, можно получить итерационный алгоритм поиска неподвижной точки. Результатом такого рода является теорема Тарского-Канторовича (Tarksi-Kantorovich)[3]. Другим примером конструктивного метода поиска неподвижной точки является теорема Клини (Kleene)[4]. Данные теоремы имеют важные приложения в таких разделах математики, как теория приближений, алгебра, теория автоматов и математическая лингвистика. Существуют различные версии и обобщения теоремы Кнастера-Тарского. Наиболее известное обобщение теоремы Кнастера-Тарского на случай многозначного отображения дал в 1971 г. Смитсон (Smithson)[5]. В этой работе также было введено понятие многозначного изотонного отображения.

Важно отметить, что существует связь между теоремами о неподвижных точках в метрических пространствах и теоремами о неподвижных точках в частично упорядоченных множествах. Если задано метрическое пространство (X,ρ) с метрикой ρ, то имеется способ задания частичного порядка $\preceq_\rho$, определяемого метрикой ρ, на произведении $X \times \mathbb{R}_+$, предложенный в [6] (см. также [7]). Он задается по следующему правилу. Для любых $x,y \in X$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ положим

$$(x,r_1) \preceq_\rho (y,r_2) \Longleftrightarrow \rho(x,y) \leq r_1 - r_2. \tag{1}$$

[1] Abian, S., Brown, A. A theorem on partially ordered sets, with applications to fixed point theorems // Canad.J.Math. - 1961. – No. 13. – P. 78-82.

[2] Kirk W. A., Sims B. (ed.). Handbook of metric fixed point theory. – Springer Science & Business Media, 2013.

[3] Granas A., Dugundji J. Fixed point theory. – Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Stoltenberg-Hansen V., Lindström I., Griffor E. R. Mathematical theory of domains. – Cambridge University Press, 1994. – Vol. 22.

[5] Smithson R. E. Fixed points of order preserving multifunctions // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1971. – Vol. 28. – No. 1. – P. 304-310

[6] DeMarr R. Partially ordered spaces and metric spaces // The American Mathematical Monthly. – 1965. – Vol. 72. – No. 6. – P. 628-631.

[7] Ekeland I. On the variational principle // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1974. – Vol. 47. – No. 2. – P. 324-353.

В книге [2] в главе 18, написанной Ячимским (Jachymski), описывается полученное в [8] обобщение этого способа для случая полного хаусдорфова равномерного пространства с равномерностью, порожденной семейством псевдометрик. Имеются модификации этого способа (см., например, [9,10]). Такой переход от метрических пространств к частично упорядоченным множествам позволяет вывести некоторые теоремы о неподвижных точках в метрических пространствах из соответствующих теорем в частично упорядоченных множествах. Например, в [2] представлен такой вывод известной теоремы Надлера[11] о неподвижной точке из теоремы Смитсона[5]. Аналогичным образом теорема Банаха о сжимающих отображениях может быть получена из теоремы Кнастера-Тарского. Следовательно, теоремы о неподвижных точках в частично упорядоченных множествах могут быть использованы для получения новых теорем о неподвижных точках в метрических пространствах.

Развитием вопроса о существовании неподвижной точки является вопрос о существовании общей неподвижной точки семейства отображений, имеющий самостоятельный интерес и не сводящийся к вопросу о неподвижной точке одного отображения. Пусть X и A – некоторые непустые множества. В дальнейшем символ $\rightrightarrows$ будет использоваться для обозначения многозначных отображений, то есть отображений, которые ставят в соответствие каждому элементу $x \in X$ непустое подмножество $F(x) \subseteq X$. Элемент $x \in X$ является общей неподвижной точкой семейства отображений $F_\alpha : X \rightrightarrows X$, $\alpha \in A$, если $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha(x)$.

Широкое развитие получил вопрос о существовании общей неподвижной точки коммутирующего семейства отображений. Одними из первых работ, посвященных этой проблеме, являются работы [12,13]. Какутани[12] и Марков[13] показали, что если семейство непрерывных линейных отображений линейного топологического пространства переводит некоторое компактное выпуклое подмножество в себя, то данное семейство имеет общую неподвижную точку в этом подмножестве. ДеМарр в работе [14] исследует проблему существования общей неподвижной точки для коммутирующих семейств отображений без требования

---

[8] Jachymski J. R. Fixed point theorems in metric and uniform spaces via the Knaster-Tarski principle // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 1998. – Vol. 32. – No. 2. – P. 225-233.

[9] Frigon M. On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings // Recent Advances on Metric Fixed Point Theory. – 1996. – Vol. 48. – P. 19-30.

[10] Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps // Pacific Journal of Mathematics. – 1974. – Vol. 55. – No. 2. – P. 335-341.

[11] Nadler S. Multi-valued contraction mappings // Pacific Journal of Mathematics. – 1969. – Vol. 30. – No. 2. – P. 475-488.

[12] Kakutani S. Two fixed-point theorems concerning bicompact convex sets // Proceedings of the Imperial Academy. – 1938. – Vol. 14. – No. 7. – P. 242-245.

[13] Markov A. Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens // CR (Doklady) Acad. Sci. URSS. – 1936. – Vol. 1. – P. 311-313.

[14] DeMarr R. Common fixed points for commuting contraction mappings // Pacific Journal of Mathematics. – 1963. – Vol. 13. – No. 4. – P. 1139-1141.

линейности и получает положительный ответ для семейства сжимающих отображений банахова пространства в себя. В работе [15] ДеМарр исследует вопрос о существовании общих неподвижных точек семейств коммутирующих отображений упорядоченных множеств, что является продолжением исследований, начатых Тарским[16]. Тарский получил целый ряд теорем о неподвижных точках изотонных отображений полных решеток в себя. В [15] ДеМарр обобщил результаты Тарского о существовании общей неподвижной точки коммутирующего семейства, рассмотрев более общие упорядоченные множества, чем полные решетки. В работе [17] Смитсон обобщил результаты Тарского [16] на случай семейства коммутирующих многозначных изотонных отображений упорядоченного множества. Однако требование коммутируемости является достаточно сильным. Существует много работ, где условие коммутируемости ослаблено, например, [18,19]. Ряд работ [20,21,22,23,24] направлен на исследование проблемы существования общих неподвижных точек семейства отображений без требования коммутируемости.

Обобщением проблемы существования неподвижных точек является вопрос о существовании точек совпадения пары отображений множеств X,Y, то есть таких точек $\xi \in X$, что для отображений $\varphi, \psi : X \to Y$ верно $\varphi(\xi) = \psi(\xi)$. Теоремы существования неподвижных точек отображений, например, такие, как теорема Брауэра (Brouwer) и теорема Какутани (Kakutani), являются мощным инструментом для доказательства существования решений различных уравнений

[15] Demarr R. Common fixed points for isotone mappings // Colloquium Mathematicae. – Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1964. – Vol. 13. – No. 1. – P. 45-48.

[16] Tarski A. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications // Pacific journal of Mathematics. – 1955. – Vol. 5. – No. 2. – P. 285-309.

[17] Smithson R. Fixed points in partially ordered sets // Pacific Journal of Mathematics. – 1973. – Vol. 45. – No. 1. – P. 363-367.

[18] Jungck G. Compatible mappings and common fixed points // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1986. – Vol. 9. – No. 4. – P. 771-779.

[19] Sedghi S., Gholidahneh A., Rao K. P. R. Common fixed point of two R-weakly commuting mappings in S_b-metric spaces // Mathematical Science letters (to appear). – 2017.

[20] Azam A., Beg I. Common fixed points of fuzzy maps // Mathematical and computer modelling. – 2009. – Vol. 49. – No. 7-8. – P. 1331-1336.

[21] Karapınar E., Yüksel U. Some common fixed point theorems in partial metric spaces // Journal of Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 2011.

[22] Karapınar E. et al. A common fixed point theorem for cyclic operators on partial metric spaces // Filomat. – 2012. – Vol. 26. – No. 2. – P. 407-414.

[23] Yanagi K. A common fixed point theorem for a sequence of multivalued mappings // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. – 1979. – Vol. 15. – No. 1. – P. 47-52.

[24] Abbas M., Jungck G. Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 341. – No. 1. – P. 416-420.

как в теоретических, так и в прикладных разделах математики. Тем не менее для многих задач необходимы более общие теоремы о совпадении [25,26,27,28].

В работах [29,30,31] проблема совпадения пары отображений метрических пространств была исследована для случая, когда одно из отображений является накрывающим, а другое – липшицевым. Полученные результаты значительно расширили набор методов для исследования операторных уравнений. Отметим, что результаты этих работ были существенно обобщены Т. Н. Фоменко [32,33,34,35,36,37] при помощи разработанного метода так называемых (α,β)-поисковых функционалов и функционалов, (строго) подчиненных сходящимся рядам.

В работах [38,39,40,41] А. В. Арутюновым, Е. С. Жуковским и С. Е. Жуковским впервые было введено понятие упорядоченной накрываемости для однозначных и многозначных отображений упорядоченных множеств и исследован вопрос

---

[25] Ichiishi T. Game theory for economic analysis. – Elsevier, 2014.

[26] Florenzano M. General equilibrium analysis: existence and optimality properties of equilibria. – Springer Science & Business Media, 2003.

[27] Vohra R. An existence theorem for a bargaining set // Journal of Mathematical Economics. – 1991. – Vol. 20. – No. 1. – P. 19-34.

[28] Yang Z. An intersection theorem on an unbounded set and its application to the fair allocation problem // Journal of Optimization Theory and Applications. – 2001. – Vol. 110. – No. 2. – P. 429-443.

[29] Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады академии наук. – 2007. – Т. 416. – No. 2. – С. 151–155.

[30] Arutyunov A. et al. Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2009. – Vol. 5. – No. 1. – P. 105-127.

[31] Арутюнов А. В. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Матем. заметки – 2009. – Т. 86. – No. 2. – С. 163–169.

[32] Фоменко Т. Н. О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Математические заметки. – 2009. – Т. 86. – №. 1. – С. 110-125.

[33] Фоменко Т. Н. К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Математические заметки. – 2009. – Т. 86. – №. 2. – С. 304-309.

[34] Fomenko T. N. Cascade search principle and its applications to the coincidence problems of n one-valued or multi-valued mappings // Topology and its Applications. – 2010. – Vol. 157. – No. 4. – P. 760-773.

[35] Fomenko T. N. Approximation theorems in metric spaces and functionals strictly subordinated to convergent series // Topology and its Applications. – 2015. – Vol. 179. – P. 81-90.

[36] Фоменко Т. Н. Устойчивость каскадного поиска // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2010. – Vol. 74. – No. 5. – P. 171-190.

[37] Фоменко Т. Н. Каскадный поиск: устойчивость достижимых предельных точек // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2010. – №. 5. – С. 3-9.

[38] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. – 2013. – Т. 453. – №. 5. – С. 475-475.

[39] Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады академии наук. – 2013. – Т. 453. – №. 6. – С. 595-595.

[40] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. – 2015. – Vol. 179. – P. 13-33.

[41] Arutyunov A. V., Zhukovskiy E. S., Zhukovskiy S. E. Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. – 2016. – Vol. 201. – P. 330-343.

о совпадениях упорядоченно накрывающего и изотонного отображений упорядоченных множеств как в случае однозначных, так и в случае многозначных отображений.

Легко видеть, что вопрос о существовании неподвижной точки является частным случаем вопроса о существовании точки совпадения отображений множества в себя. А именно, достаточно задать одно из отображений равным тождественному. Однако в некоторых случаях справедлива и обратная редукция теорем о совпадении к теоремам о неподвижных точках. Например, как показано в работе [42] некоторые результаты работы А.В.Арутюнова [29] выводятся из теоремы Надлера о неподвижной точке.

Естественным обобщением проблемы совпадения пары отображений является вопрос о совпадении семейства более двух отображений. Одним из вопросов, исследованных в работах [32,33,34,35], является проблема совпадения конечного семейства отображений метрических пространств.

Как для отображений метрических пространств, так и в случае отображений упорядоченных множеств, важны вопросы, связанные со структурой множества неподвижных точек (точек совпадения). В частности, в упорядоченных множествах интересны вопросы о существовании минимальных элементов, а также наименьшего элемента во множестве неподвижных точек (точек совпадения). Существование наименьших неподвижных точек важно в таких областях, как математическая логика и информатика[43,44,45]. Вопрос существования минимального элемента во множестве неподвижных точек и точек совпадения рассматривался в работах [2,40,41].

В диссертации рассматривается также проблема сохранения свойства отображения (пары отображений) иметь неподвижную точку (точку совпадения) при так называемой упорядоченной гомотопии, обобщающей понятие изотонной упорядоченной гомотопии Уолкера[46].

Проблема сохранения при подходящей гомотопии свойства отображения иметь неподвижную точку рассматривалась в случае отображений метрических, псевдометрических и нормированных пространств [9,47,48,49]. В алгебраической

---

[42] Гельман Б. Д., Мусиенко В. К. О теореме АВ Арутюнова // Актуальные проблемы математики и информатики. Труды математического факультета. – 2010. – №. 2. – С. 81-91.

[43] Odifreddi P. Classical recursion theory: The theory of functions and sets of natural numbers. – Elsevier, 1992. – Vol. 125.

[44] Immerman N. Relational queries computable in polynomial time // Information and control. – 1986. – Vol. 68. – No. 1-3. – P. 86-104.

[45] Vardi M. Y. The complexity of relational query languages // Proceedings of the fourteenth annual ACM symposium on Theory of computing. – ACM, 1982. – P. 137-146.

[46] Walker J. W. Isotone relations and the fixed point property for posets // Discrete Mathematics. – 1984. – Vol. 48. – No. 2-3. – P. 275-288.

[47] Frigon M., Granas A., Guennoun Z. E. A. Alternative non linéaire pour les applications contractantes // Annales des sciences mathématiques du Québec. – 1995. – Vol. 19. – No. 1. – P. 65-68.

[48] Granas A. Continuation method for contractive maps // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 1994. – Vol. 3. – No. 2. – P. 375-379.

[49] Frigon M. Fixed point and continuation results for contractions in metric and gauge spaces // Banach Center Publications. – 2007. – Vol. 77. – P. 89.

топологии известен класс теорем о сохранении таких свойств для отображений (пар отображений) с ненулевым числом Лефшеца (числом Лефшеца для совпадений) при любой гомотопии, поскольку, как известно, число Лефшеца (число Лефшеца совпадений) является гомотопическим инвариантом (см., например, [50]).

В 1984 году Уолкер (Walker)[46] продолжил исследование вопросов существования неподвижных точек многозначных изотонных отображений, начатое в работах [5, 17]. В [46] Уолкер вводит понятие упорядоченной гомотопии для однозначных изотонных отображений. Ранее в работе [51] Стонг (Stong) исследовал конечные топологические пространства. В частности, он показал, что конструкция, впоследствии названная Уолкером упорядоченной гомотопией, является частным случаем топологической гомотопии для конечных упорядоченных множеств.

Цели и задачи работы.

Целью диссертации является решение следующих задач.

1. Исследовать связь между проблемой существования неподвижных точек отображений упорядоченного множества и проблемой существования точек совпадения пары отображений упорядоченных множеств.
2. Получить достаточные условия, гарантирующие сохранение свойства отображения иметь неподвижную точку (свойства пары отображений иметь точку совпадения) при подходящей упорядоченной гомотопии.
3. Изучить вопрос существования общих неподвижных точек семейств отображений упорядоченного множества.
4. Исследовать вопрос о существовании точки совпадения семейства отображений упорядоченных множеств.
5. Разработать итерационные методы поиска общих неподвижных точек семейства отображений упорядоченного множества.
6. Получить достаточные условия, гарантирующие существование наименьшего элемента во множестве общих неподвижных точек семейства отображений упорядоченного множества, а также существования минимальных элементов во множестве точек совпадения семейства отображений упорядоченных множеств.

Основные результаты.

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Показана возможность редукции вопроса о совпадении накрывающего и изотонного отображений упорядоченных множеств к вопросу о существовании неподвижной точки многозначного отображения упорядоченного множества. Доказано, что в некоторых случаях задача итерационного поиска точки совпадения пары отображений может быть

---

[50] Spanier E. H. Algebraic topology. – Springer Science & Business Media, 1989. – Vol. 55. – No. 1.

[51] Stong R. E. Finite topological spaces // Transactions of the American Mathematical Society. – 1966. – Vol. 123. – No. 2. – P. 325-340.

сведена к вопросу итерационного поиска неподвижной точки многозначного отображения.

2. Получены теоремы о сохранении свойства отображения упорядоченного множества иметь неподвижную точку и свойства пары отображений упорядоченных множеств иметь точку совпадения при подходящей упорядоченной гомотопии.
3. Введено понятие согласованно цепно изотонного семейства отображений упорядоченного множества. Получены достаточные условия для существования общих неподвижных точек такого семейства. Кроме того, получены теоремы о существовании общих неподвижных точек коммутирующего семейства изотонных отображений упорядоченного множества. Эти результаты обобщают соответствующие результаты [5,17].
4. Получена теорема существования точки совпадения конечного семейства многозначных отображений, обобщающая соответствующий результат [39,41].
5. Разработан итерационный метод поиска общих неподвижных точек семейства отображений упорядоченного множества.
6. Доказаны теоремы о существовании наименьшего элемента во множестве общих неподвижных точек для некоторых семейств отображений упорядоченного множества и о существовании минимальных элементов во множестве точек совпадения семейства отображений упорядоченных множеств. Эти теоремы представляют развитие соответствующих результатов [38,39,40,41].

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация имеет теоретический характер и представляет научный интерес для специалистов, занимающихся неподвижными точками и точками совпадения отображений метрических пространств, упорядоченных множеств, упорядоченных метрических пространств и пространств, наделенных равномерной структурой.

Основные методы исследования.

В диссертации использовался аппарат теории упорядоченных множеств, стандартные методы общей топологии.

Апробация работы.

Результаты диссертации неоднократно докладывались на Научно-исследовательском семинаре имени П. С. Александрова на Механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова (26 ноября 2015, 3 марта 2016 (совместный доклад с Т. Н. Фоменко), 16 марта 2017) и на следующих международных конференциях:

1. XXIII международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов” (Москва, 11 – 15 апреля 2016);
2. международная конференция “Александровские чтения” (Москва, 22–26 мая 2016);

3. международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (Казань, 26 июня – 2 июля 2016);
4. XXIV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (Москва, 10 – 14 апреля 2017);
5. международная конференция "Воронежская Зимняя Математическая Школа С. Г. Крейна-2018" (Воронеж, 26–31 января 2018);
6. XXV международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (Москва, 9 – 13 апреля 2018).

Публикации.

Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 публикациях, из которых 4 научные статьи – в журналах Scopus и RSCI, 2 статьи – в журналах Scopus, 6 – в материалах конференций.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 87 страниц, включая 8 рисунков. Список литературы содержит 67 наименований.

Содержание работы

Во **введении** к диссертации дается обзор литературы, формулируются постановки задач и основные результаты работы.

Первая глава посвящена проблеме существования неподвижных точек многозначного изотонного отображения упорядоченного множества в себя и смежным вопросам, таким как существование наименьшего и минимального элементов во множестве неподвижных точек, а также итерационным методам поиска неподвижных точек. Приведенные результаты используются в главе 3 для редукции задач о совпадении пары однозначных отображений упорядоченных множеств к задачам о неподвижной точке многозначных отображений упорядоченного множества. Кроме того, в данной главе вводятся основные определения и обозначения.

Пусть дано упорядоченное множество $(X, \preceq)$ и многозначное отображение $F : X \rightrightarrows X$. Фиксируем некоторые элементы $x_0, x_1 \in X$. Введем следующие обозначения[38]: $\mathcal{O}_X(x_0) = \{x \in X | x \preceq x_0\}$, $\mathcal{O}^*_X(x_0) = \{x \in X | x \succeq x_0\}$ и $\Omega_X(x_0, x_1) = \mathcal{O}_X(x_0) \cap \mathcal{O}_X(x_1)$.

Отображение $F : X \rightrightarrows X$ называется *изотонным*, если для любых элементов $x_1, x_2 \in X, x_1 \preceq x_2$ и для любого элемента $y_2 \in F(x_2)$ найдется элемент $y_1 \in F(x_1)$ такой что $y_1 \preceq y_2$.

Пусть даны некоторая цепь $S \subseteq X$. Однозначное отображение $g : S \to X$ (однозначное сечение многозначного отображения F) называется специальным F-селектором на цепи S, если выполнены следующие условия:

(i) $\forall x \in X, g(x) \in F(x), g(x) \preceq x$,

(ii) $\forall u, v \in S$ таких, что $u \prec v$, выполнено $u \preceq g(v) \preceq v$.

Обозначим через $\mathcal{C}(X,F)$ множество всевозможных пар вида (S,g), где $S \subseteq F(X)$ – цепь, а $g : S \to X$ – специальный F-селектор на S. Одним из основных результатов данной главы, который понадобится нам в третьей главе, является следующая теорема.

***Теорема* 1.** *Пусть $(X, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, $F : X \rightrightarrows X$ — многозначное изотонное отображение. Пусть для некоторой точки $x_0 \in X$ существует точка $x_1 \in F(x_0)$ такая, что $x_1 \preceq x_0$. Предположим также, что для любой пары $(S, g) \in \mathcal{C}(X,F)$ цепь $g(S)$ имеет нижнюю границу ξ такую, что существует $\xi' \in F(\xi), \xi' \preceq \xi$. Тогда множество $\mathrm{Fix}(F) = \{x \in X | x \in F(x)\}$ непусто и содержит минимальный элемент.*

Отметим, что Теорема 1 является обобщением теоремы Смитсона[5].

Кроме того, предложен метод итерационного поиска неподвижной точки многозначного изотонного отображения. Предположим, что отображение F является изотонным и существует элемент $z_0 \in X$ такой, что $z_1 \in F(z_0), z_1 \preceq z_0$. Тогда по свойству изотонности отображения F существует элемент $z_2 \in F(z_1), z_2 \preceq z_1$. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, построена последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{n}$ такая, что $z_k \preceq z_{k-1}, z_k \in F(z_{k-1})$ для $1 \leq k \leq n$. Построим элемент z_{n+1}. По свойству изотонности отображения F существует элемент $z_{n+1} \in F(z_n), z_{n+1} \preceq z_n$. Продолжая данный процесс, может быть построена *итерационная невозрастающая последовательность* $\{z_n\} \subseteq \mathcal{O}_X(z_0) \subseteq X$, обладающая следующими свойствами:

$$z_n \in F(z_{n-1}),\ z_n \preceq z_{n-1},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Зададим порядок $\trianglelefteq$ на $X \times X$ следующим образом:

$$(x_1, y_1) \trianglelefteq (x_2, y_2) \iff x_1 \preceq x_2 \text{ и } y_1 \preceq y_2.$$

Определение 1. [40] Подмножество $A \subseteq X$ называется *упорядоченно σ-полным по отношению к X*, если для любой невозрастающей последовательности $\{x_n\} \subseteq A$ существует $\inf\{x_n\}$ и $\inf\{x_n\} \in A$.

Определим множество

$$E(F,X) = \{(x,y) \in X \times X | y \preceq x, y \in F(x)\}.$$

***Теорема* 2.** *Пусть $F : X \rightrightarrows X$ является изотонным отображением, множество $E(F,X)$ является упорядоченно σ-полным по отношению к $(X \times X, \trianglelefteq)$, и, кроме того, для некоторого элемента $z_0 \in X$ существует элемент $z_1 \in F(z_0), z_1 \preceq z_0$. Тогда итерационная последовательность (2) имеет инфимум $\xi \in X$ такой, что $\xi \in F(\xi)$.*

В конце первой главы приведены результаты, полученные Т. Н. Фоменко в совместной работе [52], о существовании наименьшего элемента во множестве неподвижных точек многозначного изотонного отображения.

[52] Fomenko T. N., Podoprikhin D. A. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2016. – Vol. 18. – No. 4. – P. 823-842.

Связь приведенных в данной главе результатов с теоремами о совпадении как многозначных, так и однозначных отображений упорядоченных множеств, полученных в работах [38, 39, 40, 41], приведена в главе 3.

Вторая глава посвящена исследованию вопроса существования общих неподвижных точек семейств отображений упорядоченных множеств. В начале главы данный вопрос исследуется для семейства коммутирующих как однозначных, так и многозначных отображений. Сформулируем соответствующий результат для многозначных отображений. Пусть дано непустое множество A. Рассмотрим семейство $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ отображений $F_\alpha : X \rightrightarrows X, \alpha \in A$. Пусть фиксирован элемент $x_0 \in X$. Множество $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq X$ называется *множеством $\mathcal{F}$-значений* в точке $x \in X$, если $y_\alpha \in F_\alpha(x)$ для всех $\alpha \in A$. Обозначим через $\mathcal{S}(x_0; \mathcal{F})$ множество элементов $x \in O_X(x_0)$, для которых существует множество $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x такое, что $y_\alpha \preceq x, \alpha \in A$.

Теорема 3. *Пусть заданы упорядоченное множество $(X, \preceq)$, непустое множество A и семейство коммутирующих изотонных многозначных отображений $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in A}, F_\alpha : X \rightrightarrows X$, такие, что для каждых $x \in X$ и $\alpha \in A$ множество $F_\alpha(x)$ содержит наименьший элемент. Пусть, кроме того, найдутся элемент $x_0 \in X$ и множество $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x_0 такие, что $y_\alpha \preceq x_0$ для всех $\alpha \in A$. Тогда если для любой цепи $S \subseteq \mathcal{S}(x_0; \mathcal{F})$ существуют ее нижняя грань $z \in X$ и множество $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке z такие, что $z_\alpha \preceq z$ для всех $\alpha \in A$, то множество* $\mathrm{Comfix}(\mathcal{F}) = \{x \in X | x \in \bigcap\limits_{\alpha \in A} F_\alpha(x)\}$ *непусто и содержит минимальный элемент.*

Отметим, что Теорема 3 является обобщением теоремы Смитсона (Теоремы 2.3[17]). Требование коммутируемости является достаточно сильным, вследствие этого в диссертации исследуется вопрос о существовании общей неподвижной точки для семейства многозначных отображений без требования коммутируемости. Вводится понятие согласованно цепно изотонного семейства.

Пусть на A задан некоторый линейный порядок $\preceq_A$. Множество $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке $x \in X$ называется *невозрастающей (по отношению к порядку $\preceq_A$) цепью $\mathcal{F}$-значений* в точке x, если справедлива импликация $\alpha \preceq_A \beta \Longrightarrow y_\beta \preceq y_\alpha$ для всех индексов $\alpha, \beta \in A$.

Определение 2. Будем говорить, что семейство многозначных отображений $\mathcal{F}$ является *согласованно цепно изотонным* на множестве X, если для любого элемента $x \in X$, любой невозрастающей цепи $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x и любого элемента $x' \in X, x' \prec x$, существует невозрастающая цепь $\{z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x' такая, что $z_\alpha \preceq y_\beta$ для всех $\alpha, \beta \in A$.

Определение 3. Будем говорить, что на цепи $S \subseteq X$ задан *специальный цепной $\mathcal{F}$-селектор*, если дано семейство однозначных отображений $f = \{f_\alpha\}_{\alpha \in A}, f_\alpha : S \to X, \alpha \in A$, такое, что:

a) $x \succeq f_\alpha(x), \alpha \in A, x \in S$;

b) $\forall x \in S$, $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}$ является невозрастающей цепью $\mathcal{F}$-значений в точке x;

c) $\forall u,v \in S$, $v \prec u \Longrightarrow v \preceq f_\alpha(u)$ $\alpha \in A$.

Пусть фиксирован элемент $x_0 \in X$. Обозначим через $C_2(x_0;\mathcal{F})$ множество всех пар вида (S,f), где $S \subseteq O_X(x_0)$ является цепью, а семейство отображений $f = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ является специальным цепным $\mathcal{F}$-селектором, заданным на S, и, кроме того, цепь S удовлетворяет условию $(*)$.

| Для произвольного элемента $x \in S$ существуют элемент $x' \in O_X(x_0)$ и невозрастающая цепь $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x' такие, что $x = \inf\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$. | $(*)$

Для согласованно цепно изотонного семейства справедлив следующий результат.

Теорема 4. *Пусть дано частично упорядоченное множество $(X, \preceq)$, линейно упорядоченное множество $(A, \preceq_A)$ и семейство многозначных отображений $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$, отображающих X в себя. Предположим, что также выполнены следующие условия.*

1. *Семейство $\mathcal{F}$ является согласованно цепно изотонным;*
2. *для каждого элемента $x \in X$ каждая невозрастающая цепь $\mathcal{F}$-значений в точке x имеет инфимум;*
3. *для некоторого элемента $x_0 \in X$ существует невозрастающая цепь $\{y^0_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x_0 такая, что справедливы неравенства $x_0 \succeq y^0_\alpha, \alpha \in A$;*
4. *для каждой пары $(S,f) \in C_2(x_0;\mathcal{F})$, где $f = \{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, существуют общая нижняя граница $w \in X$ всех цепей $f_\alpha(S), \alpha \in A$, и невозрастающая цепь $\{w_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $\mathcal{F}$-значений в точке w такие, что $w \succeq w_\alpha, \alpha \in A$.*

Тогда множество $\mathrm{Comfix}(\mathcal{F})$ *непусто и содержит минимальный элемент.*

Т. Н. Фоменко в работе [53] введено понятие согласованно изотонного семейства отображений и получена теорема о существовании общей неподвижной точки согласованно изотонного семейства.

В этой главе приводятся примеры, показывающие, что Теорема 4 и теорема, полученная Т. Н. Фоменко в [53], не вытекают друг из друга. Кроме того, Теорема 4 является обобщением Теоремы 1 первой главы диссертации.

Далее в диссертации исследуется вопрос итерационного поиска общей неподвижной точки конечного семейства отображений. Пусть дано согласованно цепно изотонное семейство отображений $\mathcal{F} = \{F_i\}_{1\le i\le n}, F_i : X \rightrightarrows X, i = 1,\dots,n$, полагая, что на $\{1,\dots,n\}$ задан стандартный порядок. Сформулируем соответствующий результат.

[53] Fomenko T. N., Podoprikhin D. A. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered sets // Topology and its Applications. – 2017. – Vol. 221. – P. 275-285.

Предположим, что существует невозрастающая цепь $\{z_i\}_{i=1}^n$ $\mathcal{F}$-значений в некоторой точке $z_0 \in X$ и, кроме того, $z_1 \preceq z_0$.

Перейдем к построению итерационной последовательности, которая нам понадобится в дальнейшем. Если $z_n = z_0$, то положим $z_i = z_0$ для всех $i \geq n+1$. Иначе, в силу того, что справедливо неравенство $z_n \prec z_0$ и семейство отображений $\mathcal{F}$ является согласованно цепно изотонным, найдется невозрастающая цепь $\{z_{n+i}\}_{i=1}^n$ $\mathcal{F}$-значений в точке z_n такая, что справедливо неравенство $z_{n+1} \preceq z_n$.

Продолжая аналогичным образом, мы можем построить цепь $\{z_{i-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$, обладающую следующими свойствами

$$z_i \preceq z_{i-1}, \quad z_{n(k-1)+j} \in F_j(z_{n(k-1)}), \quad k,i \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Рассмотрим следующее множество

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}, X) = \{(y_0, y_1, \ldots, y_n) \in X^{n+1} | \\ y_n \preceq y_{n-1} \preceq \cdots \preceq y_1 \preceq y_0, y_i \in F_i(y_0), i = 1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Как и в случае прямого произведения двух упорядоченных множеств, существуют различные способы задания порядка на декартовом произведении X^{n+1} на основе порядка $\preceq$, заданного на X, где $n \in \mathbb{N}$.

Мы рассмотрим порядок $\preceq_C$, который определим следующим образом. Рассмотрим произвольные элементы $(x_0, x_1, \ldots, x_n), (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in X^{n+1}$. Мы будем говорить, что $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \preceq_C (y_0, y_1, \ldots, y_n)$, если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

1. $x_i \preceq x_{i-1}, y_i \preceq y_{i-1}, i = 1, \ldots, n$ и $x_0 \preceq y_n$;
2. $x_i = y_i, i = 0, 1, \ldots, n$.

Теперь сформулируем итерационный метод поиска общей неподвижной точки для согласованно цепно изотонного семейства отображений, а именно, справедлива следующая теорема.

***Теорема* 5.** *Пусть даны упорядоченное множество $(X, \preceq)$ и согласованно цепно изотонное конечное семейство $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i=1}^n$ многозначных отображений $F_i : X \rightrightarrows X, i = 1, \ldots, n$. Предположим, что множество $\mathcal{B}(\mathcal{F}, X)$ является σ-полным во множестве $(X^{n+1}, \preceq_C)$. Пусть также существует элемент $z_0 \in X$ и невозрастающая цепь $\{z_i\}_{i=1}^n$ $\mathcal{F}$-значений в точке z_0, для которых справедливо неравенство $z_1 \preceq z_0$. Тогда последовательность* (3)*, построенная выше, имеет инфимум $\xi \in X$ такой, что $\xi \in \mathrm{Comfix}(\mathcal{F})$.*

В то время как полученные Теоремы 1, 3, 4 гарантируют существование минимального элемента во множестве неподвижных точек и общих неподвижных точек, наименьший элемент во множестве общих неподвижных точек (неподвижных точек) может не существовать. Вследствие этого в главе 2 получены достаточные условия, гарантирующие существование наименьшего элемента во множестве общих неподвижных точек коммутирующих семейств, согласованно изотонных семейств, а также согласованно цепно изотонных семейств. Сформулируем соответствующий результат для коммутирующего семейства.

Введем в рассмотрение множество $\mathcal{S}(\mathcal{F}) = \bigcup\limits_{x \in X} \mathcal{S}(x; \mathcal{F})$.

Теорема 6. *Пусть выполнены все условия Теоремы 3 и, кроме того, для любой пары $x_1, x_2 \in X$ (соответственно $x_1, x_2 \in \mathcal{O}_X(x_0)$) множество $\mathcal{S}(\mathcal{F}) \cap \Omega_X(x_1, x_2) \neq \varnothing$, тогда во множестве* $\mathrm{Comfix}(\mathcal{F})$ *(соответственно* $\mathrm{Comfix}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{O}_X(x_0)$*) существует наименьший элемент.*

В **третьей главе** рассматривается вопрос о совпадении отображений.

В начале третьей главы показана связь между теоремами о совпадении пары однозначных отображений и теоремами о неподвижной точке многозначного отображения.

Утверждение 1. *Теорема 1 из работы* [40] *следует из Теоремы 1 первой главы диссертации.*

Показано, что при определенных условиях теоремы об итерационном поиске точек совпадения могут быть получены из теорем об итерационном поиске неподвижной точки.

Утверждение 2. *Теорема 3 из работы* [40] *при условии, что множество* $\mathrm{gph}(\varphi)$ *является упорядоченно σ-полным в $X \times Y$, вытекает из Теоремы 2 первой главы диссертации для изотонного отображения $F : \mathcal{O}_X(x_0) \rightrightarrows \mathcal{O}_X(x_0)$, $F(x) = \psi^{-1}(\varphi(x)) \cap \mathcal{O}_X(x_0), x \in \mathcal{O}_X(x_0)$.*

Далее рассматривается обобщение теорем о совпадении пары многозначных отображений упорядоченных множеств, доказанных в [41], на случай n отображений, где $n \geq 2$. В работе [53] Т. Н. Фоменко было введено понятие упорядоченной накрываемости одного семейства отображений другим семейством. Пусть даны упорядоченные множества $(X, \preceq)$, $(Y, \preceq)$ и семейство многозначных отображений $\mathcal{F} = \{F_i\}_{1 \leq i \leq n}, F_i : X \rightrightarrows Y$. Пусть фиксирован некоторый элемент $x_0 \in X$. Будем говорить, что отображения $F_1,\ldots,F_{n-1}$ *согласованно упорядоченно накрывают* отображения $F_2,\ldots,F_n$ на множестве $\mathcal{O}_X(x_0)$, если для произвольного элемента $x \in \mathcal{O}_X(x_0)$ и любой невозрастающей цепи $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ $\mathcal{F}$-значений в точке x, то есть $y_i \in F_i(x), i = 1,\ldots,n$, и $y_1 \succeq y_2 \ldots \succeq y_n$, найдется элемент $x' \in \mathcal{O}_X(x_0), x' \preceq x$, для которого $y_{i+1} \in F_i(x'), i = 1,\ldots,n-1$.

Отметим, что если даны два отображения $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ и элемент $x_0 \in X$, то из того, что F_1 упорядоченно накрывает множество $F_2(\mathcal{O}_X(x_0))$[39, 41] следует, что F_1 накрывает отображение F_2 на множестве $\mathcal{O}_X(x_0)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Обозначим через $C_3(x_0; \mathcal{F})$ множество всех пар (S, f), где подмножество $S \subseteq \mathcal{O}_X(x_0)$ является цепью и набор отображений $f = \{f_i\}_{1 \leq i \leq n}$, где $f_i : S \to Y$, удовлетворяют следующим условиям:

(1) для каждого элемента $x \in S$ справедливы неравенства $f_1(x) \succeq \ldots \succeq f_n(x)$;

(2) для любых элементов $x,z \in S$ справедлива импликация $x \prec z \Longrightarrow f_1(x) \preceq f_n(z)$;

(3) для каждого $x \in S$ справедливо вложение

$$f_i(x) \in \left(\bigcap_{j=i+1}^{n} F_j(\mathcal{O}_X(x_0)) \right) \bigcap F_i(x), \qquad i = 1,\ldots,n-1,$$

$$f_n(x) \in F_n(x).$$

Верна следующая теорема.

***Теорема* 7.** *Пусть $(X, \preceq), (Y, \preceq)$ – упорядоченные множества, $\mathcal{F} = \{F_1,\ldots,F_n\}$, $F_i : X \rightrightarrows Y, i = 1,\ldots,n$, – многозначные отображения и выполнены следующие условия.*

(1) Отображения $F_1,\ldots,F_{n-1}$ согласованно упорядоченно накрывают отображения $F_2,\ldots,F_n$ на $\mathcal{O}_X(x_0)$;

(2) для некоторой точки $x_0 \in X$ существует цепь $y_0 = \{y_{0,j}\}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ $\mathcal{F}$-значений в x_0, то есть $y_{0,j} \in F_j(x_0), j = 1,\ldots,n$, $y_{0,1} \succeq \ldots \succeq y_{0,n}$;

(3) отображение F_n изотонно;

(4) для каждой пары $(S,f) \in \mathcal{C}_3(x_0;\mathcal{F})$ цепь S имеет нижнюю границу $w \in X$ и существует цепь $z_0 = \{z_{0,j}\}_{1\le j\le n}$ $\mathcal{F}$-значений в точке w, $z_{0,j} \in F_j(w)$, $z_{0,1} \succeq \ldots \succeq z_{0,n}$, такие, что каждое значение $z_{0,j}$ есть нижняя граница множества $\{f_j(x)|x \in S\}$, $j = 1,\ldots,n$.

Тогда множество совпадений $\mathrm{Coin}(F_1,\ldots,F_n) = \{x \in X | \bigcap_{i=1}^{n} F_i(x) \neq \varnothing\}$ *отображений $F_1,\ldots,F_n$ непусто.*

Отметим, что, в силу замечания выше о связи между упорядоченной накрываемостью отображением множества и упорядоченной накрываемостью отображением другого отображения, в случае $n = 2$ Теорема 7 является уточнением Теоремы 1 из работы [41].

Накладывая дополнительные условия в Теореме 7, можно гарантировать существование минимального элемента во множестве точек совпадения семейства отображений. А именно верно следующее утверждение.

***Теорема* 8.** *Пусть выполнены все условия Теоремы 7. Дополнительно предположим, что для произвольной пары элементов $u,v \in \mathcal{O}_X(x_0), u \preceq v$, и произвольных значений $y \in F_n(u), z \in F_n(v)$ найдется элемент $\tilde{y} \in F_n(u) \cap \Omega_Y(y,z) \neq \varnothing$. Тогда множество точек совпадения* $\mathrm{Coin}(F_1,\ldots, F_n)$ *непусто и содержит минимальный элемент.*

В конце третьей главы приводятся результаты о существовании наименьшего элемента во множестве точек совпадения для n отображений, полученные Т.Н.Фоменко в совместной работе [53].

В **четвертой главе** исследуется задача о сохранении свойства отображения (пары отображений) упорядоченных множеств иметь неподвижную точку (точку совпадения) при упорядоченной гомотопии. В данной главе вводится понятие упорядоченной гомотопии, обобщающее ранее известное понятие изотонной гомотопии, введенное в [46]. Пусть даны упорядоченные множества $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$ и пара произвольных отображений $f,g : X \to Y$.

Определение 4. Отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *упорядоченно гомотопными* (*изотонно упорядоченно гомотопными*), если существует конечный набор отображений (изотонных отображений) $h_0, h_1, ..., h_n : X \to Y$ таких, что $f = h_0 \preceq_Y h_1 \succeq_Y h_2 \preceq_Y \cdots \succeq_Y h_n = g$, где $h_i \preceq_Y h_j \iff h_i(x) \preceq_Y h_j(x), \forall x \in X$.

Обозначим через $\mathcal{S}(f,g, \preceq_X, \preceq_Y)$ множество цепей $S \subseteq X$ таких, что: (1) $f(x) \preceq_Y g(x)$ для всех $x \in S$; (2) $x \prec_X y \implies g(x) \preceq_Y f(y)$, $x,y \in S$; (3) $g(S) \subseteq f(X)$. Введем также следующее обозначение $\mathcal{S}^*(f,g, \preceq_X, \preceq_Y) = \mathcal{S}(f,g, \preceq_X^*, \preceq_Y^*)$, где $\preceq_X^*, \preceq_X^*$ – двойственные порядки к $\preceq_X, \preceq_Y$ соответственно.

Доказано следующее утвреждение.

***Теорема* 9.** *Пусть даны упорядоченное множество $(X, \preceq)$, пара изотонных отображений f, $g : X \to X$ и упорядоченная изотонная гомотопия $h_0, \ldots, h_n$, где $h_i : X \to X, 0 \le i \le n$, соединяющая отображения f и g, а именно $f = h_0 \preceq h_1 \succeq \ldots \preceq h_{n-1} \succeq h_n = g$. Предположим, что, кроме того, выполнены следующие условия.*

(1) Отображение f имеет неподвижную точку x_0;

(2) для каждого индекса $s \in \mathbb{N}$, $1 \le 2s \le n$, и для любой цепи $S \in \mathcal{S}(h_{2s}, \mathrm{id}, \preceq, \preceq)$ существует нижняя граница $\xi \in X$ цепи S такая, что справедливо неравенство $h_{2s}(\xi) \preceq \xi$;

(3) для каждого индекса $s \in \mathbb{N}$, $1 \le 2(s-1)+1 \le n$, и для каждой цепи $S \in \mathcal{S}^*(h_{2(s-1)+1}, \mathrm{id}, \preceq, \preceq)$ существует верхняя граница $\xi \in X$ цепи S такая, что справедливо неравенство $h_{2(s-1)+1}(\xi) \succeq \xi$.

Тогда существует "забор" $x_0 \preceq x_1 \succeq \ldots \preceq x_{n-1} \succeq x_n$, где для нечетных k справедливо $x_k \in \mathrm{Fix}(h_k) \cap \mathcal{O}_X^*(x_{k-1})$ и x_k является максимальным элементом в $\mathrm{Fix}(h_k)$, для четных k справедливо $x_k \in \mathrm{Fix}(h_k) \cap \mathcal{O}_X(x_{k-1})$ и x_k является минимальным элементом в $\mathrm{Fix}(h_k), 1 \le k \le n$.

В четвертой главе также исследуется вопрос о сохранении при упорядоченной гомотопии пары отображений иметь точку совпадения.

Мы будем говорить, что отображение $g\colon X \to Y$ накрывает отображение $f\colon X \to Y$ (накрывает отображение $f\colon X \to Y$ сверху), если для всех $x \in X$ таких, что $f(x) \preceq_Y g(x)$ ($f(x) \succeq_Y g(x)$) найдется элемент $x' \in X, x' \preceq_X x$ ($x' \succeq_X x$) такой, что $f(x) = g(x')$.

Теорема 10. *Пусть даны упорядоченные множества* $(X, \preceq_X)$, $(Y, \preceq_Y)$ *и две пары* (f,g), $(\tilde{f}, \tilde{g})$ *однозначных отображений, действующих из* X *в* Y. *Предположим, что существуют гомотопии* $H = \{H_k\}_{0 \le k \le n}$ *и* $Q = \{Q_k\}_{0 \le k \le n}$ *между данными парами такие, что*

$$f = H_0 \preceq_Y H_1 \succeq_Y H_2 \preceq_Y \cdots \succeq_Y H_n = \tilde{f},$$

$$g = Q_0 \succeq_Y Q_1 \preceq_Y Q_2 \succeq_Y \cdots \preceq_Y Q_n = \tilde{g}.$$

Пусть, более того, отображения H_k *изотонны для всех индексов* k, $1 \le k \le n$. *Также предположим, что справедливы следующие условия.*

(1) Существует точка совпадения $x_0 \in \mathrm{Coin}(f,g)$;

(2) для каждого нечетного индекса s, $1 \le s \le n$, *и каждой цепи* $S \in \mathcal{S}^*(H_s, Q_s, \preceq_X, \preceq_Y)$ *существует верхняя граница* $\xi \in X$ *такая, что* $H_s(\xi) \succeq_Y Q_s(\xi)$, *и отображение* Q_s *накрывает отображение* H_s *сверху;*

(3) для каждого четного индекса $s, 1 \le s \le n$, *любая цепь* $S \in \mathcal{S}(H_s,Q_s, \preceq_X, \preceq_Y)$ *имеет нижнюю границу* $w \in X$ *такую, что* $H_s(w) \preceq_Y Q_s(w)$, *и, кроме того, отображение* Q_s *накрывает отображение* H_s.

Тогда существует "забор" $x_0 \preceq_X x_1 \succeq_X x_2 \preceq_X \cdots \succeq_X x_n$, *где для каждого нечетного индекса* k *элемент* $x_k \in \mathrm{Coin}(H_k,Q_k) \cap \mathcal{O}^*_X(x_{k-1})$ *и* x_k *является максимальным элементом во множестве* $\mathrm{Coin}(H_k,Q_k)$, *и для каждого четного индекса* k *элемент* $x_k \in \mathrm{Coin}(H_k,Q_k) \cap \mathcal{O}_X(x_{k-1})$ *и* x_k *является минимальным элементом во множестве* $\mathrm{Coin}(H_k,Q_k)$, $1 \le k \le n$.

В конце четвертой главы исследуются вопросы сохранения общей неподвижной точки для согласованно изотонного и согласованно цепно изотонного семейств отображений. Получены теоремы, являющиеся обобщениями Теорем 9 и 10 для случая семейства отображений.

В **заключении** изложены основные результаты диссертационной работы и сформулированы возможные применения полученных теорем и методов.

Заключение

В диссертации решены актуальные задачи. Автором получены следующие основные результаты. Доказаны теоремы существования точек совпадения конечного семейства отображений упорядоченных множеств и общих неподвижных точек бесконечного семейства отображений упорядоченного множества.

Получены достаточные условия, гарантирующие существование минимальных и наименьших элементов во множестве точек совпадения и общих неподвижных точек.

Разработаны методы итерационного поиска общих неподвижных точек конечного семейства отображений.

Получены условия, гарантирующие сохранение при упорядоченной гомотопии свойства отображения (пары отображений) упорядоченных множеств иметь неподвижную точку (точку совпадения).

Полученные результаты могут быть использованы в теории неподвижных точек и точек совпадения отображений метрических и упорядоченных метрических пространств. Кроме того, доказанные теоремы могут быть применены для получения новых теорем о совпадениях и общих неподвижных точках отображений равномерных пространств.

Благодарности

Автор выражает благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Татьяне Николаевне Фоменко за постановку задачи, полезную конструктивную критику и постоянное внимание к работе, а также доктору физико-математических наук, профессору Богатому Семеону Антоновичу за поддержку и консультации по смежным вопросам.

Автор благодарен сотрудникам кафедры Общей топологии и геометрии Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за создание творческой и комфортной обстановки для учебной и научной деятельности.

Автор благодарен своему школьному учителю математики Татьяне Викторовне Сабуровой, которая пробудила в нем интерес к занятию математикой.

Автор выражает благодарность своим друзьям Дарье Андреевне Арбузовой и Александру Владимировичу Трескову за поддержку.

Публикации автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus и RSCI

1. Podoprikhin D. A. Fixed points of mappings on ordered sets // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – №. 6. – P. 1069-1074. **Scopus, RSCI.**
2. Подоприхин Д. А. Неподвижные точки семейства коммутирующих отображений частично упорядоченных множеств // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2016. – №. 5. – С. 56-59.
   Transl: Podoprikhin D. A. Common fixed points of a family of commuting mappings of partially ordered sets // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2016. – V. 71. – №. 5. – P. 216-218. **Scopus, RSCI.**
3. Podoprikhin D. A., Fomenko T. N. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered sets // Topology and its Applications. – 2017. – V. 221. – P. 275-285. **Scopus.** Автору диссертации принадлежат примеры, Теоремы 2,3 и 4 и определение 6.
4. Podoprikhin D. A., Fomenko T. N. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // Journal of Fixed Point Theory and

Applications. – 2016. – V. 18. – №. 4. – P. 823-842. **Scopus.** Автору диссертации принадлежат Теоремы 2.3 и 3.7, Утверждения 2.5 и 3.11, примеры.
5. Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н. О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств // ДАН. – 2016. – Т. 471. – №. 1. – С. 16–18. Transl:Podoprikhin D. A., Fomenko T. N. On coincidences of families of mappings on ordered sets // Doklady Mathematics. – 2016. – V. 94. – №. 3. – P. 620-622. **Scopus, RSCI.** Автору диссертации принадлежат Теоремы 2, 3 и 4.
6. Подоприхин Д. А., Фоменко Т. Н. Сохранение свойства неподвижной точки и свойства совпадения при гомотопии отображений упорядоченных множеств // ДАН. – 2017. – Т. 477. – №. 4. – С. 402-405. Transl: Podoprikhin D. A., Fomenko T. N. Preservation of the existence of fixed and coincidence points under homotopy of mappings of ordered sets // Doklady Mathematics. – 2017. – V. 96. – №. 3. – P. 591-593. **Scopus, RSCI.** Автору диссертации принадлежат Теоремы 3 и 4.

Другие публикации:

1. Подоприхин, Д. А. Неподвижные точки и совпадения отображений упорядоченных множеств [Электронный ресурс] // материалы XXIII международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — Москва, 11 – 15 апреля 2016. – `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2016/data/8436/uid38819_report.pdf` (дата обращения 14.04.2018).
2. Подоприхин, Д. А., Фоменко, Т. Н. Неподвижные точки отображений упорядоченных множеств // тезисы докладов международной конференций “Александровские чтения”. — Москва, 22–26 мая 2016. — С. 26–26. Автору диссертации принадлежат результаты о существовании общей неподвижной точки согласованно цепно изотонного семейства.
3. Подоприхин, Д. А. Неподвижные точки и совпадения отображений упорядоченных множеств // материалы международной конференций по алгебре, анализу и геометрии. — Казань, 26 июня – 2 июля 2016. — С. 270–271.
4. Подоприхин, Д. А. О сохранении свойства семейства отображении упорядоченного множества в себя иметь общую неподвижную точку при гомотопии [Электронный ресурс] // материалы XXIV международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — Москва, 10 – 14 апреля 2017. – `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10839/uid38819_report.pdf` (дата обращения 14.04.2018).
5. Подоприхин, Д. А. Неподвижные точки отображений упорядоченных множеств // материалы междунарной конференции “Воронежская Зимняя Математическая Школа С.Г.Крейна-2018”. — Воронеж, 26–31 января 2018. — С. 296—298.

6. Подоприхин, Д. А. О сохранении свойства семейства отображении упорядоченного множества в себя иметь общую неподвижную точку при гомотопии [Электронный ресурс] // материалы XXV международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — Москва, 9 – 13 апреля 2018. – https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13556/69151_uid38819_report.pdf (дата обращения 14.04.2018).

Подписано в печать 18.04.2018
Формат 60x90 1/16
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Объём: усл. печ. л. 1,5
Тираж 100 экз. Заказ №3927.
Отдел полиграфии Научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова
119192 Москва, Ломоносовский проспект 27.

n°2