Хуштова Фатима Гидовна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ И ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук»

Научный руководитель:	**Псху Арсен Владимирович**, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Пятков Сергей Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет», кафедра высшей математики, заведующий кафедрой
	Фёдоров Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»**

Защита состоится 11 июня 2019 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН `http://math.nsc.ru`.

Автореферат разослан 10 мая 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 003.015.04,
кандидат физико-математических наук М.А. Скворцова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертационная работа посвящена краевым задачам в ограниченных и неограниченных областях для дифференциального уравнения в частных производных

$$B_x u(x,y) - \frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} u(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где $u(x,y)$ – функция двух вещественных аргументов;

$$B_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$$

– оператор Бесселя, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}$ – дробная производная порядка $0 < \alpha \leqslant 1$ с началом в точке $y = 0$, которая понимается в одном из следующих смыслов: $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = D^\alpha_{0y}$ – производная Римана–Лиувилля, $\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha} = \partial^\alpha_{0y}$ – производная Капуто (известная также как производная Герасимова–Капуто).

Актуальность темы исследования. Уравнения математической физики с оператором Бесселя относятся к классу вырождающихся дифференциальных уравнений, для которых теория краевых задач в настоящее время является одним из важных разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка выступают в качестве основы при математическом моделировании процессов, протекающих в средах с фрактальной структурой.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$, то есть

$$u_{xx}(x,y) + \frac{b}{x}\, u_x(x,y) - u_y(x,y) = f(x,y), \tag{2}$$

совпадает с названным И.А. Киприяновым[1] B-параболическим уравнением и примыкает к уравнениям параболического типа со знакопеременной характеристической формой, рассмотренным А.М. Нахушевым[2].

Краевые задачи в ограниченной и неограниченной областях для уравнения (2) при различных значениях параметра b рассматривали многие авторы. Например, в работе V. Alexiades[3] для него решены первая, вторая и третья краевые задачи в области с подвижной границей, в работе D. Calton[4]

[1]Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997. 208 с.

[2]Нахушев А. М. О правильной постановке краевых задач для параболических уравнений со знакопеременной характеристической формой // Дифференциальные уравнения, 1973. Т. 9, № 1. С. 130-135.

[3]Alexiades V. Generalized axially symmetric heat potentials and singular parabolic initial boundary value problems // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1982. V. 79, Issue 4. pp. 325–350.

[4]Calton D. Cauchy's problem for a singular parabolic partial differential equation // Diff. Equations. 1970. V. 8, № 2. pp. 250–257.

исследована задача Коши. Уравнение вида (2), некоторые его многомерные обобщения и уравнения, сводящиеся к нему, рассматривались в работах Я.И. Житомирского[5], С.А. Терсенова[6], Ю.П. Горькова[7], M.S. Kepinski[8, 9], M. Gevrey[10, 11], O. Arena[12], C.D. Pagani[13] и других.

Дифференциальные уравнения, содержащие оператор Бесселя, наиболее подробно и полно исследованы в работах И.А. Киприянова и его учеников [1, 14, 15]. Следует отметить полученные В.В. Катраховым и С.М. Ситником[16], С.М. Ситником и Э.Л. Шишкиной[17] весьма важные результаты по применению операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах, в частности, с операторами Бесселя.

В случае, когда $b = 0,\ 0 < \alpha < 2,$ уравнение (1) совпадает с диффузионно-волновым уравнением. Различные краевые задачи для него, а также для многомерных его обобщений, богато и обстоятельно исследованы в работах многих авторов.

А.Н. Кочубей и С.Д. Эйдельман[18] исследовали задачу Коши для диффузионно-волнового уравнения с производной Капуто.

Первая, вторая и смешанные краевые задачи в прямоугольной области для диффузионно-волнового уравнения с оператором Римана–Лиувилля, а

---

[5]Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Математический сборник. 1955. Т. 36(78), № 2. С. 299–310.

[6]Терсенов С. А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. М.: Наука. Сибирское отделение, 1985. 105 с.

[7]Горьков Ю. П. Построение фундаментального решения параболического уравнения с вырождением // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. С. 66–70.

[8]Kepinski S. Integration der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 j}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial j}{\partial t} = 0$ // Bull. Int. de l'Acad. des Sci. de Cracovie. 1905. pp. 198–205.

[9]Kepinski S. Über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{m+1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{n}{x}\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ // Math. Ann. 1905. V. 61, Issue 3. pp. 397–405.

[10]Gevrey M. Sur les équations aux dérivées Partielles du type parabolique // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1913. 6 ^{e} série. V. 9. pp. 305–476.

[11]Gevrey M. Sur les équations aux dérivées Partielles du type parabolique (suite) // Journal de mathématiques pures et appliquées. 1914. 6 ^{e} série. V. 10. pp. 105–148.

[12]Arena O. On a Singular Parabolic Equation Related to Axiallly Symmetric Heat Potentials // Annali di Mat. Pura Appl. 1975. Ser. IV. 105. pp. 347–393.

[13]Pagani C. D. On the parabolic equation and a related one // Ann. Mat. Pura ed Appl. 1974. T. 99, № 4. pp. 333–339.

[14]Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М. О краевых задачах в областях общего вида для сингулярных параболических систем уравнений // ДАН СССР. 1976. Т. 230, № 6. С. 1271–1274.

[15]Киприянов И. А., Куликов А. А. Оптимальное управление процессами, описываемыми сингулярными уравнениями параболического типа // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 11. С. 1982–1987.

[16]Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, № 2. С. 211–426.

[17]Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2018. 246 с.

[18]Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Доклады АН. 2004. Т. 394, № 2. С. 159–161.

также задача Коши для него и многомерного диффузионно-волнового уравнения с оператором Джрбашяна–Нерсесяна исследованы А.В. Псху[19, 20, 21, 22].

А.А. Ворошилов и А.А. Килбас[23, 24] методом интегральных преобразований построили решения задачи Коши для многомерного диффузионно-волнового уравнения с производными Римана–Лиувилля и Капуто.

Задача Коши и первая краевая задача в полубесконечной области для уравнения диффузии с производной Римана–Лиувилля исследованы С.Х. Геккиевой[25, 26]. М.О. Мамчуевым[27] построено фундаментальное решение и исследована задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами. Уравнение диффузии дробного порядка и некоторые его обобщения рассматривали также F. Mainardi, Yu. Luchko, G. Pagnini[28] и многие другие.

Уравнение вида (1), а именно уравнение

$$D_{0t}^{2/d_w} P(r,t) = \frac{1}{r^{\,d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{\,d_s-1} \frac{\partial P(r,t)}{\partial r} \right),$$

где d_w и d_s характеризуют фрактальную размерность среды, $P(r,t)$ – плотность пространственного распределения частиц в момент времени t, было предложено R. Metzler, W. G. Glöckle, T. F. Nonnenmacher[29] для описания процессов переноса в средах, имеющих фрактальную размерность.

Интерес к изучению уравнений вида (1) вызван их приложениями при решении диффузионных задач физики, химии и других прикладных наук.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является исследование краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором

---

[19] Псху А. В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1430–1433.

[20] Псху А. В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 9. С. 1286-1289.

[21] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[22] Псху А. В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения // Известия РАН. Серия математическая. 2009. Т. 73, № 2. С. 141–182

[23] Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 5. С. 599–609.

[24] Ворошилов А. А., Килбас А. А. Задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с частной производной Римана–Лиувилля // Доклады Академии наук. 2006. Т. 406, № 1. С. 12–16.

[25] Геккиева С. Х. Задача Коши для обобщенного уравнения переноса с дробной по времени производной // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2000. Т. 5, № 1. С. 16–19.

[26] Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // Известия КБНЦ РАН. 2002. № 1 (8). С. 6–8.

[27] Мамчуев М.О. Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. Нальчик.: Изд-во КБНЦ РАН, 2013. 200 с.

[28] Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2001. V. 4, № 2. pp. 153–192.

[29] Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // Physica A. 1994. T. 211. pp. 13–24.

Бесселя и частными производными дробного порядка.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием метода функции Грина, метода интегральных преобразований, теории специальных функций и теории дробного исчисления.

Научная новизна. В работе исследованы основные краевые задачи для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, и частными производными Римана–Лиувилля и Капуто по временной переменной. Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

1. Теорема об общем представлении решения в прямоугольной области дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка.

2. Теоремы существования и единственности решения первой, второй и смешанных краевых задач в прямоугольной области для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной дробного порядка. Построение соответствующих функций Грина.

3. Построение решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя и частными производными дробного порядка.

4. Построение решений первой и второй краевых задач в неограниченных областях для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя и частными производными дробного порядка.

5. Доказательство единственности решения краевых задач в неограниченных областях в классах функций быстрого роста.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при математическом моделировании различных процессов переноса в средах с фрактальной структурой.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре по проблемам современного анализа, информатики и физики Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (ИПМА КБНЦ РАН) (руководитель – д.ф.-м.н., проф. А.М. Нахушев), на заседаниях отдела Дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель – д.ф.-м.н., доц. А.В. Псху), на научном семинаре кафедры Общей математики факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова (руководитель – д.ф.-м.н., проф. И.С. Ломов), на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» Института математики СО РАН им. С.Л. Соболева (руководитель – д.ф.-м.н., проф. Г.В. Демиденко), на заседаниях отдела САПР смешанных систем и управления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель – к.ф.-м.н., доц. А.Х. Аттаев), на научно-исследовательском семинаре по актуальным проблемам прикладной математики ИПМА КБНЦ РАН (руководитель – к.ф.-м.н. А.А. Алиханов), на Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики», посвященной памяти академика А.А. Самарского (Нальчик, 2014 г.), на Международной Российско-Китайской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Эльбрус, 2015 г.), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященной памяти А.В. Бицадзе (Москва, 2016 г.), на Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Эльбрус, 2017 г.), на Международной школе-конференции «Соболевские чтения», посвященной 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2018 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 16 работах, из них работы [1]-[6] – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих 13 параграфов, заключения, списка литературы из 107 наименований и содержит 2 рисунка. Общий объем составляет 125 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор литературы по вопросам, связанным с темой диссертации, показана актуальность темы исследований, излагается краткое содержание основных результатов работы.

В **первой главе** приводятся необходимые для дальнейшего изложения работы сведения из теории специальных функций, теории дробного исчисления и теории интегральных преобразований. В **§ 1.1** приводятся определения и некоторые свойства гамма-функции $\Gamma(z)$, бета-функции $B(\alpha,\beta)$, цилиндрических функций $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$, функции Райта $\phi(\rho,\delta;z)$, функции типа Миттаг-Леффлера $E_{\frac{1}{\rho}}(z;\mu)$. В этом параграфе также изучены некоторые свойства функции

$$\mathcal{J}_r^{\rho,\mu,\sigma}(z) = H_{2,3}^{2,1}\left[\frac{z^2}{4}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-\sigma/2,1),\,(\mu-\rho\sigma/2,\rho)\\ (r/2,1),\,(1-\sigma/2,1),\,(-r/2,1)\end{matrix}\right], \qquad (3)$$

где $H^{2,1}_{2,3}[...]$ – H-функция Фокса. В частности, приводятся асимптотические формулы, интегральное представление и представление в виде степенного ряда функции $\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)$, основанные на известных свойствах H-функции. Из интегрального представления функции (3) выводятся формулы дифференцирования целого порядка

$$\frac{d}{dz}\left[z^{r}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)\right]=z^{r}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma+1}_{r-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{-r}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)\right]=-z^{-r}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma+1}_{r+1}(z),$$

рекуррентные формулы

$$r\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)-z\frac{d}{dz}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)=z\,\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma+1}_{r+1}(z),$$

$$r\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)+z\frac{d}{dz}\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma}_{r}(z)=z\,\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma+1}_{r-1}(z)$$

и формула автотрансформации

$$\mathcal{J}^{\rho,\mu,\sigma+2n}_{r}(z)=(-1)^{n}\mathcal{J}^{\rho,\mu-n\rho,\sigma}_{r}(z),\quad n=0,1,2,...$$

В **§ 1.2** приводятся некоторые сведения из теории дробного исчисления, в частности, определение *оператора дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля* D^{γ}_{ay} порядка γ с началом в точке a и с концом в точке y, определение *регуляризованной дробной производной* ∂^{γ}_{ay}.

В **§ 1.3** приводится известное определение и некоторые свойства интегрального преобразования с функцией Райта в ядре (преобразование Станковича)[30]

$$A^{\alpha,\mu}v(y)=\int\limits_{0}^{\infty}v(t)\,y^{\mu-1}\phi\left(-\alpha,\mu;-t\,y^{-\alpha}\right)dt,\quad 0<\alpha<1,$$

где $v(y)$ – функция, заданная на положительной полуоси.

В случае, когда $\mu=0$, обозначается $A^{\alpha,0}v(y)=A^{\alpha}v(y)$. Если преобразование $A^{\alpha,\mu}$ применяется к функции, зависящей от нескольких переменных, то с помощью нижнего индекса обозначается переменная, по которой проводится преобразование. Например, $A^{\alpha,\mu}_{y}v(x,y)$.

Вторая глава посвящена построению и исследованию основных свойств фундаментального решения уравнения

$$\mathbf{L}\,u\equiv B_{x}u(x,y)-D^{\alpha}_{0y}u(x,y)=f(x,y),\tag{4}$$

[30]Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

где $B_x = |x|^{-b}\frac{\partial}{\partial x}\left(|x|^{b}\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{b}{x}\frac{\partial}{\partial x}$, $|b| < 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, а также построению общего представления решения и функций Грина первой, второй и смешанных краевых задач в прямоугольной области.

В **§ 2.1** строится и исследуются основные свойства фундаментального решения уравнения (4)

$$\Gamma^{\alpha,\mu,\beta} \equiv \Gamma^{\alpha,\mu,\beta}(x,\xi,y) = A_y^{\alpha,\mu}\, g(x,\xi,y), \tag{5}$$

$$g(x,\xi,y) = \frac{|x\xi|^{\beta}}{4y}\, e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}} \left[I_{-\beta}\left(\frac{|x\xi|}{2y}\right) + \operatorname{sign}(x\xi)\, I_{\beta}\left(\frac{|x\xi|}{2y}\right)\right],$$

где $\beta = (1-b)/2$. В случае $\mu = 0$ обозначается $\Gamma^{\alpha,0,\beta}(x,\xi,y) = \Gamma^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$.

В **§ 2.2** доказана теорема об общем представлении решения уравнения (4) в прямоугольной области.

Пусть $D = \{(x,y) : r_1 < x < r_2,\ 0 < y < T\}$, $D_y = \{(\xi,\eta) : r_1 < \xi < r_2,\ 0 < \eta < y\}$, $\bar{D}$ – замыкание области D.

Регулярным решением уравнения (4) в области D назовем функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (4) в области D, и такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\bar{D})$, $B_x u$, $D_{0y}^{\alpha} u \in C(D)$.

Теорема 1. *Пусть* $y^{1-\alpha}f(x,y) \in C(\bar{D})$, $\varphi(x) \in C[r_1;r_2]$, *функция* $v = v(x,y;\xi,\eta)$ *удовлетворяет условиям:*

1) *в области* D_y *функция* v *является решением уравнения*

$$\mathbf{L}^{*}v(x,y;\xi,\eta) \equiv B_{\xi}\, v(x,y;\xi,\eta) - D_{y\eta}^{\alpha}\, v(x,y;\xi,\eta) = q(x,y;\xi,\eta),$$

где $\eta^{1-\alpha}q \in L(D_y)$;

2) *для любой функции* $h(x) \in C[x_1;x_2]$, $r_1 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant r_2$, *выполняется соотношение*

$$\lim_{\eta\to y}\int\limits_{x_1}^{x_2} |\xi|^{b}\, h(\xi)\, D_{y\eta}^{\alpha-1}\, v(x,y;\xi,\eta)\, d\xi = h(x), \quad x_1 < x < x_2;$$

3) *функция* v *непрерывна в* $\bar{D}\times\bar{D}_y\setminus\{y=\eta\}$ *вместе с* $|\xi|^{b}v_{\xi}$, $D_{y\eta}^{\alpha}v$ *и* $y^{1-\alpha}v$, *и для любых точек* $(x,y)\in D$ *и* $(\xi,\eta)\in D_y$ *выполняется неравенство* $|v(x,y;\xi,\eta)| \leqslant const\cdot(y-\eta)^{\alpha\beta-1}$.

Если функция $u(x,y)$ *является регулярным решением уравнения* (4), *имеет непрерывную и интегрируемую производную с весом* $|x|^{b}u_x(x,y)$ *вплоть до участков границы* $x = r_1$ *и* $x = r_2$, *и удовлетворяет условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\, u(x,y) = \varphi(x), \quad r_1 < x < r_2,$$

то для любой точки $(x,y)\in D$ имеет место соотношение

$$u(x,y)=\int\limits_{r_1}^{r_2}|\xi|^{b}\,v(x,y;\xi,0)\,\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{0}^{y}\big[\,|r_2|^{b}\,v(x,y;r_2,\eta)\,u_\xi(r_2,\eta)-|r_1|^{b}\,v(x,y;r_1,\eta)\,u_\xi(r_1,\eta)-$$

$$-|r_2|^{b}\,v_\xi(x,y;r_2,\eta)\,u(r_2,\eta)+|r_1|^{b}\,v_\xi(x,y;r_1,\eta)\,u(r_1,\eta)\big]\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_{0}^{y}|\xi|^{b}\,[u(\xi,\eta)\,q(x,y;\xi,\eta)-v(x,y;\xi,\eta)\,f(\xi,\eta)]\,d\eta\,d\xi.$$

В **§ 2.3** в прямоугольной области $D_r=\{(x,y):0<x<r,\ 0<y<T\}$ исследуется первая краевая задача для уравнения

$$\mathbf{L}\,u(x,y)=0. \tag{6}$$

Задача 1. *Найти регулярное в области D_r решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to0}D_{0y}^{\alpha-1}\,u(x,y)=\varphi(x),\quad 0<x<r, \tag{7}$$

$$u(0,y)=\tau_0(y),\quad u(r,y)=\tau_r(y),\quad 0<y<T,$$

где $\varphi(x)$, $\tau_0(y)$ и $\tau_r(y)$ – заданные функции.

Функцию $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)$, которая является решением уравнения

$$\mathbf{L}^{*}\,G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)=0 \tag{8}$$

и вместе с условиями 2) и 3) теоремы 1 удовлетворяет условиям

$$\lim_{\xi\to0}G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)=0,\quad G^{\alpha,\beta}(x,r,y-\eta)=0,\quad y\neq\eta,$$

назовем *функцией Грина первой краевой задачи* для уравнения (6).

Функция Грина первой краевой задачи представима в виде

$$G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)=$$

$$=\frac{2}{r^{2}}\,\frac{x^{\beta}\xi^{\beta}}{(y-\eta)^{1-\alpha}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_\beta(\lambda_m x)\,J_\beta(\lambda_m\xi)}{J^{2}_{1+\beta}(\lambda_m r)}\,E_{\frac{1}{\alpha}}\big(-\lambda_m^{2}\,(y-\eta)^{\alpha};\alpha\big), \tag{9}$$

где λ_m – положительные корни уравнения $J_\beta(\lambda_m r)=0$, $m=1,2,...$, занумерованные в порядке их возрастания.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x) \in C[0,r]$, $y^{1-\alpha}\tau_0(y)$, $y^{1-\alpha}\tau_r(y) \in C[0,T]$ *и выполнены условия согласования*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tau_0(y) = \varphi(0), \;\; \lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\tau_r(y) = \varphi(r).$$

Тогда существует единственное решение задачи 1 *, представимое в виде*

$$u(x,y) = \int\limits_0^r \xi^{1-2\beta} G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi +$$

$$+\int\limits_0^y \xi^{1-2\beta} G_\xi^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)\big|_{\xi=0}\,\tau_0(\eta)\,d\eta - r^{1-2\beta}\int\limits_0^y G_\xi^{\alpha,\beta}(x,r,y-\eta)\,\tau_r(\eta)\,d\eta,$$

где $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta)$ *определяется из* (9).

В **§ 2.4** исследуется *вторая краевая задача* для уравнения (6) в прямоугольной области D_r.

Задача 2. *Найти регулярное в области* D_r *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям* (7) *и*

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y) = \nu_0(y), \;\; u_x(r,y) = \nu_r(y), \;\; 0 < y < T,$$

где $\nu_0(y)$ *и* $\nu_r(y)$ *– заданные функции.*

Функцию $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$, которая является решением уравнения (8) и вместе с условиями 2) и 3) теоремы 1 удовлетворяет условиям

$$\lim_{\xi\to 0} \xi^b G_\xi^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta) = 0, \;\; G_\xi^{\alpha,\beta}(x,r,y-\eta) = 0, \;\; y \neq \eta,$$

назовем *функцией Грина второй краевой задачи* для уравнения (6).

Функция Грина второй краевой задачи представима в виде

$$G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y-\eta) =$$

$$= \frac{2}{r^2}\,\frac{x^\beta \xi^\beta}{(y-\eta)^{1-\alpha}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{-\beta}(\lambda_m x)\,J_{-\beta}(\lambda_m \xi)}{J_{-\beta}^2(\lambda_m r)}\, E_{\frac{1}{\alpha}}\big(-\lambda_m^2 (y-\eta)^\alpha;\alpha\big), \qquad (10)$$

где λ_m – положительные корни уравнения $J_{1-\beta}(\lambda_m r) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(x) \in C[0,r]$, $y^{1-\alpha}\nu_0(y)$, $y^{1-\alpha}\nu_r(y) \in C[0,T]$. *Тогда существует единственное решение задачи* 2 *, представимое в виде*

$$u(x,y) = \int\limits_0^r \xi^{1-2\beta} G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int\limits_0^y G^{\alpha,\beta}(x,0,y-\eta)\,\nu_0(\eta)\,d\eta + r^{1-2\beta}\int\limits_0^y G^{\alpha,\beta}(x,r,y-\eta)\,\nu_r(\eta)\,d\eta,$$

где функция $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$ *определяется из* (10).

В **§ 2.5** построены функции Грина и найдены представления решений двух смешанных краевых задач для уравнения (6) в области D_r.

Задача 3. *Найти регулярное в области* D_r *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям* (7) *и*

$$u(0,y)=\tau_0(y),\ \ u_x(r,y)=\nu_r(y),\ \ 0<y<T.$$

Задача 4. *Найти регулярное в области* D_r *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям* (7) *и*

$$\lim_{x\to 0} x^b u_x(x,y)=\nu_0(y),\ \ \ u(r,y)=\tau_r(y),\ \ \ 0<y<T.$$

Третья глава посвящена исследованию краевых задач в неограниченных областях для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя, производными Римана–Лиувилля и Капуто.

В **§ 3.1** исследуется задача Коши в области $\Omega=\{(x,y):-\infty<x<\infty,$ $0<y<T\}$ для уравнения (4).

Регулярным решением уравнения (4) в области Ω будем называть функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (4) в области Ω, и такую, что $y^{1-\alpha}u\in C(\bar\Omega)$, $B_x u$, $D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega)$, $\bar\Omega$ – замыкание области Ω.

В случае, когда $f(x,y)\equiv 0$ исследована задача Коши и доказана соответствующая теорема существования и единственности решения.

Задача 5. *Найти регулярное в области* Ω *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее условию*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,y)=\varphi(x),\ \ \ -\infty<x<\infty,$$

где $\varphi(x)$ *– заданная функция.*

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x)\in C(-\infty,\infty)$ *и выполняется условие*

$$\lim_{|x|\to\infty}\varphi(x)\,\exp\left(-\rho\,|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0,\quad \rho<(2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,(\,\alpha\,/\,T\,)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}\,.$$

Тогда функция

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{1-2\beta}\,\Gamma^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

где $\Gamma^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$ *определяется из* (5), *является регулярным решением задачи* 5.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k *условию*

$$\lim_{|x|\to\infty} y^{1-\alpha} u(x,y) \exp\big(-k\,|x|^{\frac{2}{2-\alpha}}\big) = 0.$$

В этом параграфе также доказана теорема существования решения задачи Коши в случае, когда $f(x,y)\not\equiv 0$, и показана неулучшаемость показателя степени в условии единственности решения задачи Коши.

В **§ 3.2** исследуется первая краевая задача для уравнения (6) в области $\Omega^+ = \{(x,y): 0<x<\infty,\ 0<y<T\}$.

Регулярным решением уравнения (6) в области Ω^+ будем называть функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (6) в области Ω^+, и такую что $y^{1-\alpha}u\in C(\bar\Omega^+)$, $B_x u$, $D^{\alpha}_{0y}u\in C(\Omega^+)$, $\bar\Omega^+$ – замыкание области Ω^+.

Задача 6. *Найти регулярное в области* Ω^+ *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}\,u(x,y) = \varphi(x), \quad 0<x<\infty,$$

$$u(0,y)=\tau(y), \quad 0<y<T,$$

где $\varphi(x)$ *и* $\tau(y)$ *– заданные функции.*

Обозначим через

$$K^{\alpha,\beta}(x,y) = \frac{x^{\beta}\,y^{-\alpha\beta/2-1}}{2^{\beta}\,\Gamma(\beta)}\ \mathcal{J}^{\alpha,\,\alpha,\,2+\beta}_{\beta}\left(\frac{x}{y^{\alpha/2}}\right), \tag{11}$$

$$G^{\alpha,\mu,\beta}(x,\xi,y) = A^{\alpha,\mu}_{y}\, g(x,\xi,y), \tag{12}$$

где

$$g(x,\xi,y) = \frac{x^{\beta}\xi^{\beta}}{2y}\, e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}\, I_{\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right).$$

В случае $\mu=0$ будем обозначать $G^{\alpha,0,\beta}(x,\xi,y) = G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi(x)\in C[0,\infty)$, $y^{1-\alpha}\tau(y)\in C[0,T]$,

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)\,\exp\left(-\rho\, x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right) = 0, \quad \rho < (2-\alpha)\,2^{-\frac{2}{2-\alpha}}\,(\,\alpha\,/\,T\,)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}, \tag{13}$$

и выполнено условие согласования $\lim\limits_{y\to 0} D^{\alpha-1}_{0y}\,\tau(y) = \varphi(0)$. *Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^{\infty} \xi^{1-2\beta}\, G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^{y} K^{\alpha,\beta}(x,y-\eta)\,\tau(\eta)\,d\eta,$$

где $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$ *определяется из* (12), $K^{\alpha,\beta}(x,y)$ *– из* (11), *является регулярным решением задачи* 6.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k *условию*

$$\lim_{x\to\infty} y^{1-\alpha}\, u(x,y)\, \exp\big(-k\, x^{\frac{2}{2-\alpha}}\big) = 0. \tag{14}$$

В **§ 3.3** исследуется вторая краевая задача в области Ω^+.

Задача 7. *Найти регулярное в области* Ω^+ *решение уравнения* (6), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-1}\, u(x,y) = \varphi(x), \;\; 0<x<\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} x^{b}\, u_x(x,y) = \nu(y), \quad 0<y<T,$$

где $\varphi(x)$ *и* $\nu(y)$ *– заданные функции.*

Обозначим через

$$K^{\alpha,\beta}(x,y) = -\frac{x^{\beta}\, y^{\alpha\beta/2-1}}{2^{1-\beta}\,\Gamma(1-\beta)}\; \mathcal{J}_{-\beta}^{\alpha,\,\alpha,\,2-\beta}\left(\frac{x}{y^{\alpha/2}}\right), \tag{15}$$

$$G^{\alpha,\mu,\beta}(x,\xi,y) = A_y^{\alpha,\mu}\, g(x,\xi,y), \tag{16}$$

где

$$g(x,\xi,y) = \frac{x^{\beta}\xi^{\beta}}{2y}\, e^{-\frac{x^2+\xi^2}{4y}}\, I_{-\beta}\left(\frac{x\xi}{2y}\right).$$

В случае $\mu = 0$ будем обозначать $G^{\alpha,0,\beta}(x,\xi,y) = G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(x)\in C[0,\infty)$, $y^{1-\alpha}\nu(y)\in C[0,T]$ *и выполнено условие* (13). *Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^{1-2\beta}\, G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^y K^{\alpha,\beta}(x,y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta,$$

где $G^{\alpha,\beta}(x,\xi,y)$ *определяется из* (16), $K^{\alpha,\beta}(x,y)$ *– из* (15), *является регулярным решением задачи* 7.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих условию (14).

В **§ 3.4** исследуются краевые задачи в неограниченных областях для уравнения

$$B_x u(x,y) - \partial_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{17}$$

где $|b|<1$, $0<\alpha\leqslant 1$.

Регулярным решением уравнения (17) в области Ω будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (17) в области Ω, и такую, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $B_x u$, $\partial_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega)$.

Задача 8. *Найти регулярное в области Ω решение уравнения (17), удовлетворяющее условию*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

где $\varphi(x)$ – заданная функция.

Теорема 7. *Пусть функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 и условию Гельдера по переменной x. Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\,1-2\beta}\, \Gamma^{\,\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $\Gamma^{\,\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)$ определяется из (5), является регулярным решением задачи 8.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k условию

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,y)\, \exp\big(-k\,|x|^{\,\frac{2}{2-\alpha}}\big) = 0.$$

Регулярным решением уравнения (17) в области Ω^+ будем называть функцию $u = u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (17) в области Ω^+, и такую, что $u \in C(\bar{\Omega}^+)$, $B_x u, \partial_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+)$.

Первая краевая задача в области Ω^+ для уравнения (17) формулируется следующим образом.

Задача 9. *Найти регулярное в области Ω^+ решение уравнения (17), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty, \quad u(0,y) = \tau(y), \quad 0 < y < T.$$

Теорема 8. *Пусть функция $\varphi(x) \in C[0,\infty)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x, $\tau(y) \in C[0,T]$, $\varphi(0) = \tau(0)$ и выполнено условие* (13). *Тогда функция*

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{\infty} \xi^{\,1-2\beta}\, G^{\,\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{0}^{y} K^{\,\alpha,\,\beta}(x, y-\eta)\, \tau(\eta)\, d\eta,$$

где $G^{\,\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)$ определяется из (12), $K^{\,\alpha,\,\beta}(x,y)$ – из (11), является регулярным решением задачи 9.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих при некотором положительном k *условию*

$$\lim_{x\to\infty} u(x,y)\,\exp\left(-k\,x^{\frac{2}{2-\alpha}}\right)=0. \tag{18}$$

Вторая краевая задача в области Ω^+ для уравнения (17) ставится следующим образом.

Задача 10. *Найти регулярное в области* Ω^+ *решение уравнения* (17), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<\infty,\quad \lim_{x\to 0} x^{b}\,u_x(x,y)=\nu(y),\quad 0<y<T.$$

Теорема 9. *Пусть функция* $\varphi(x)\in C[0,\infty)$ *удовлетворяет условию Гельдера по переменной* x, $\nu(y)\in C[0,T]$ *и выполнено условие* (13). *Тогда функция*

$$u(x,y)=\int\limits_0^\infty \xi^{\,1-2\beta}\,G^{\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^y K^{\alpha,\beta}(x,y-\eta)\,\nu(\eta)\,d\eta,$$

где $G^{\alpha,\,1-\alpha,\,\beta}(x,\xi,y)$ *определяется из* (16), $K^{\alpha,\beta}(x,y)$ *– из* (15), *является регулярным решением задачи* 10.

Решение единственно в классе функций, удовлетворяющих условию (18).

В **§ 3.5** рассматривается уравнение с переменным младшим коэффициентом, соответствующее уравнению (4). Устанавливается условие на младший коэффициент, при котором задача Коши будет иметь единственное решение в классе ограниченных функций с весом.

В **заключении** приводятся основные результаты диссертации.

Выражаю благодарность судьбе за годы, проведенные рядом с Адамом Маремовичем Нахушевым, за теплое отношение и внимание к моим работам. Искреннюю признательность выражаю своему научному руководителю Арсену Владимировичу Псху, а также Олегу Игоревичу Маричеву за ценные советы, полезные консультации и неоценимую помощь при выполнении диссертационной работы.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Хуштова, Ф. Г. Фундаментальное решение модельного уравнения аномальной диффузии дробного порядка / Ф. Г. Хуштова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2015. – Т. 19, № 4. – С. 722–735.

2. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Математические заметки. – 2016. – Т. 99, вып. 6. – С. 921–928.

3. Хуштова, Ф. Г. Задача Коши для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2016. – Т. 20, № 1. – С. 74–84.

4. Хуштова, Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Известия вузов. Математика. – 2017. – № 7. – С. 84–93.

5. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для дробно-дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Уфимский математический журнал. – 2017. – Т. 9, вып. 4. – С. 117–128.

6. Хуштова, Ф. Г. Вторая краевая задача в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Математические заметки. – 2018. – Т. 103, вып. 3. – С. 460–470.

7. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа / Ф. Г. Хуштова // Материалы Международной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». – Белгород. – 2013. – С. 243–244.

8. Хуштова, Ф. Г. Краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа в неограниченной области / Ф. Г. Хуштова // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики», посвященной памяти академика А.А. Самарского. – Нальчик. – 2014. – С. 130–132.

9. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача в видоизмененной постановке для нагруженного уравнения параболического типа / Ф. Г. Хуштова // Материалы конференции «Современные методы и проблемы теории операторов

и гармонического анализа и их приложение-V». – Ростов-на-Дону. – 2015. – С. 146–147.

10. Khushtova, F. G. The second boundary value problem in a half-strip for a degenerate parabolic equation with the Riemann–Liouville operator / F. G. Khushtova // Proceedings of International Russian-Chinese Conference «Actual Problems of Applied Mathematics and Physics» and School for Young Scientists «Nonlocal Boundary Problems and Modern Problems of Algebra, Analysis and Informatics». – Elbrus. – 2015. – P. 90–92.

11. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для вырождающегося уравнения параболического типа с оператором Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Материалы I Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп. – 2015. – С. 220–222.

12. Хуштова, Ф. Г. Первая и вторая краевые задачи в полуполосе для уравнения параболического типа с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ. – 2016. – С. 85–88.

13. Хуштова, Ф. Г. Первая краевая задача в полуполосе для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Тезисы докладов Международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященной памяти академика А.В. Бицадзе. – М.: МАКС Пресс. – 2016. – С. 60.

14. Хуштова, Ф. Г. Задача Коши для уравнения дробной диффузии с оператором Бесселя / Ф. Г. Хуштова // Материалы Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». – Нальчик. – 2017. – С. 215–216.

15. Хуштова, Ф. Г. Смешанная краевая задача для дифференциального уравнения с оператором Бесселя и частной производной Римана–Лиувилля / Ф. Г. Хуштова // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики». – Нальчик. – 2018. – С. 269.

16. Хуштова, Ф. Г. К единственности решения задачи Коши для дробного уравнения диффузии с оператором Бесселя / Ф. Г. Хуштова // Тезисы докладов Международной школы-конференции «Соболевские чтения», посвященной 110-летию со дня рождения С.Л. Соболева. – Новосибирск: Изд-во Института математики. – 2018. – С. 184.