МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Букин Дмитрий Борисович

ЗАДАЧИ МОНЖА И КАНТОРОВИЧА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2020

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель:	**Богачев Владимир Игоревич** доктор физико-математических наук, профессор,
Официальные оппоненты:	**Колесников Александр Викторович** доктор физико-математических наук, профессор факультета математики НИУ ВШЭ
	Петров Федор Владимирович доктор физико-математических наук, профессор факультета математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского государственного университета
	Шапошников Станислав Валерьевич доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится «24» апреля 2020 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский проспект, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/

Автореферат разослан «23» марта 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
кандидат физико-математических наук
доцент

Н.А. Раутиан

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика данной диссертации лежит на стыке функционального анализа, теории меры, стохастического анализа и теории экстремальных задач. Рассмотренные вопросы представляют интерес также и для уравнений с частными производными и дифференциальной геометрии (см. обзор В.И. Богачева и А.В. Колесникова[1]). Главными объектами исследования данной работы выступают функционалы в задачах Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки мер, а также метрики типа Канторовича–Рубинштейна. Основные результаты работы относятся к теории меры и теории экстремальных задач, они могут быть полезны и для теории уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова[2].

Задача Монжа возникла еще в XVIII веке и в первоначальной постановке заключалась в нахождении оптимальных путей переноса масс (скажем, грунта) с минимизацией произведенной работы. При этом считалось априори ясным, что оптимальная транспортировка есть, вопрос был в ее описании и исследовании различных свойств. Лишь почти через два столетия появилась точная постановка этой задачи, состоящая в следующем. Для вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^n$, заданных плотностями относительно меры Лебега, надо найти борелевское отображение T пространства $\mathbb{R}^n$, переводящее μ в ν, т.е. $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ для всех борелевских множеств B, и минимизирующее интеграл

$$\int |x - T(x)|\, \mu(dx)$$

среди всевозможных отображений, переводящих μ в ν. Однако доказательство существования оптимального отображения оказалось удивительно сложным и было получено уже в XXI веке, спустя более двадцати лет после появления первого математического доказательства В.Н. Судакова[3] в 1970-х, в котором позже были найдены существенные пробелы. В настоящее время известно несколько доказательств, одно из них следует методу Судакова и обходит выявленные в его работе пробелы (это связано с тем, что одно промежуточное техническое утверждение Судакова оказалось неверным), но все эти доказательства чрезвычайно длинны. Подробные комментарии можно найти в работе В.И. Богачева, А.Н. Ка-

[1]Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы// Успехи матем. наук. – 2012. – Т. 67. – №5. – С. 3–110.

[2]Богачев В.И., Крылов Н.В., Рёкнер М., Шапошников С.В. Уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. М. – Ижевск: ИКИ. – 2014. – 592 с.

[3]Судаков В.Н. Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений// Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1976. – Т. 140. – С. 1–190.

линина и С.Н. Поповой[4]. Также в 1970-х годах, начиная с А.М. Вершика[5,6], стала рассматриваться более общая задача минимизации интеграла от функции $c(x, T(x))$ для так называемой функции стоимости c на произведении множеств, на которых заданы меры μ и ν (скажем, метрики на произведении двух общих метрических пространств). В общей задаче Монжа в современной трактовке исследуются отображения T одного пространства с мерой (X, μ) в другое (Y, ν), которые переводят заданную меру μ в заданную меру ν. Эти меры называются маргинальными распределениями или маргиналами; обычно они считаются вероятностными. При этом на $X \times Y$ задана неотрицательная функция c, называемая функцией стоимости. Задача состоит в минимизации интеграла

$$\int_X c(x, T(x))\, \mu(dx)$$

по отображениям T, переводящим μ в ν. Значение указанного интеграла называют стоимостью транспортировки T.

Еще до всех этих событий второй половины XX века и начала XXI века в конце 1930-х – начале 1940-х годов Л.В. Канторович, тогда даже не знавший о задаче Монжа, поставил свою задачу оптимизации, вызвавшую весьма значительный поток исследований, продолжающихся и сегодня. Задача Канторовича тоже имеет дело с данными вероятностными мерами μ и ν на измеримых пространствах X и Y и измеримой функцией стоимости c на $X \times Y$, но найти требуется вероятностную меру π на $X \times Y$, проекции которой на X и Y есть μ и ν и которая минимизирует интеграл от функции стоимости c по всем мерам с данными проекциями. Меры с заданными проекциями называются планами Канторовича или транспортными планами. Минимизирующая мера (если она есть) называется оптимальным планом или решением задачи Канторовича; соответствующее минимальное значение интеграла называют стоимостью оптимальной транспортировки. Связь двух задач состоит в том, что всякое отображение T меры μ в меру ν приводит к мере σ на $X \times Y$ с проекциями μ и ν: в качестве такой меры берется образ μ при отображении $x \mapsto (x, T(x))$. Сам Л.В. Канторович рассмотрел случай, когда X и Y — метрические компакты и c — соответствующая метрика на их произведении, но вскоре стало понятно, что его задача имеет смысл в гораздо более широкой постановке. Узнав после выхода своей заметки о работах Г. Монжа,

---

[4] Богачев В.И., Калинин А.Н., Попова С.Н. О равенстве значений в задачах Монжа и Канторовича// Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2017. – Т. 457. – С. 53–73.

[5] Вершик А.М. Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования// Успехи матем. наук. – 1970. – Т. 25. – № 5. – С. 117–124.

[6] Вершик А.М. Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения// Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2004. – Т. 312. – С. 69–85.

Л.В. Канторович даже указал, что решение его задачи позволяет решить и задачу Монжа, но затем выяснилось, что это не совсем так. Оказалось, что задача Канторовича разрешима при значительно более широких предположениях, чем задача Монжа. В частности, с ней не возникло никаких технических проблем типа тех, с которыми имели дело В.Н. Судаков и его последователи. Например, для существования решения в задаче Канторовича достаточно полунепрерывности снизу функции стоимости на вполне регулярных топологических пространствах с мерами Радона, в то время как задача Монжа может не иметь решения даже для очень хороших функций стоимости на плоскости. Однако глубокая связь между задачами Монжа и Канторовича есть, одно из ее проявлений состоит в том, что для непрерывной функции стоимости и радоновских мер μ и ν без атомов значения инфимумов в обеих задачах равны при условии сепарабельности обеих мер (что автоматически имеет место для многих пространств в приложениях, например для суслинских пространств), см. работы В.И. Богачева, А.Н. Калинина и С.Н. Поповой[3], а также А.А. Липчюса[7] и А. Прателли[8]. По обеим задачам имеется обширная литература, ими занимались и занимаются многие известные математики, опубликовано множество обзоров и немало монографий, см. работы Л. Амброзио, Н. Джильи[9], В. Гангбо, Р. Дж. Маккэна[10], В.Л. Левина[11], С.Т. Рачева и Л. Рюшендорфа[12,13], С. Виллани[14,15]. В последнее десятилетие в этих исследованиях значительное внимание уделялось сингулярным функциям стоимости, не являющимся непрерывными и даже бесконечным на значительной части пространства, см. работы М. Байгелбека, С. Леонарда, В. Шахермайера[16,17], а также работу[18], где рассмотрены так называемые

[7]Липчюс А.А. Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича// Теория вероятн. и ее примен. – 2005. – Т. 50. – № 4. – С. 779–782.

[8]Pratelli A. On the equality between Monge's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation// Ann. Inst. H. Poincaré (B) Probab. Statist. – 2007. – Vol. 43, № 1. – P. 1–13.

[9]Ambrosio L., Gigli N. A user's guide to optimal transport// Lecture Notes in Math. – 2013. – Vol. 2062. – P. 1–155.

[10]Gangbo W., McCann R.J. The geometry of optimal transportation// Acta Math. – 1996. – №177. – P. 113–161.

[11]Левин В.Л. Двойственность Монжа – Канторовича и ее применение в теории полезности// Экономика и матем. методы. – 2011. – Т. 47. – № 4. – С. 1–40.

[12]Рачев С.Т. Задача Монжа – Канторовича о перемещении масс и ее применения в стохастике// Теория вероятн. и ее примен. – 1984. – Т. 29. – № 4. – С. 625–653.

[13]Rachev S.T., Rüschendorf L. Mass transportation problems. Vol. I, II. Springer, 1998.

[14]Villani C. Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2003. – xvi+370 p.

[15]Optimal transport, old and new. Springer, New York, 2009. – xxii+973 p.

[16]Beiglböck M., Leonard C., Schachermayer W. A general duality theorem for the Monge–Kantorovich transport problem// Studia Math. – 2012. – Vol. 209. – №2. – P. 151–167.

[17]Beiglböck M., Leonard C., Schachermayer W. On the duality theory for the Monge–Kantorovich transport problem. In: Optimal transportation, pp. 216–265. London Math. Soc. Lecture Note Ser., V. 413. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014.

[18]Вершик А.М., Затицкий П.Б., Петров Ф.В. Интегрирование виртуально непрерывных функций по

виртуально непрерывные функции. Часть основных результатов диссертации также лежит в этом русле, а другая часть относится, наоборот, к весьма регулярной ситуации, когда отображаются гауссовские меры, причем линейными операторами, но задача состоит в сравнении стоимостей транспортировок для двух важных классов отображений: собственно оптимальных и так называемых канонических треугольных.

Работу можно разделить на две основные части, соответствующие двум основным главам (помимо вспомогательной первой главы), причем эти части связаны идейно и технически.

Во второй главе исследуются задачи Монжа и Канторовича об оптимальной транспортировке на пространстве функций, непрерывных на отрезке, для распределений диффузионных процессов. При этом рассматривается функция стоимости, заданная нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера.

Вопросы, связанные с задачей об оптимальной транспортировке меры Винера с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина, как в постановке Монжа, так и в постановке Канторовича, изучались в работах многих авторов, в том числе Д. Фейеля, С. Устюнеля[19,20], впервые поставивших такой вопрос, а также Ш. Фанга, Ж. Шао, К.-Т. Штурма[21], В.И. Богачева и А.В. Колесникова[22]. Обширная библиография по современным исследованиям данных вопросов приведена в цитированной работе В.И. Богачева и А.В. Колесникова[1]. Значительной особенностью такой функции стоимости является то, что пространство Камерона–Мартина имеет меру нуль относительно меры Винера, а для многих мер на произведении (включая квадрат меры Винера) функция стоимости почти всюду бесконечна. Это делает задачу абсолютно не похожей на случай, когда используется обычная норма пространства непрерывных на отрезке функций, и значительно более сложной, так как рассматриваемая функция стоимости конечна только на очень малой части всего пространства, так что класс планов транспортировки, для которых функционал стоимости конечен, очень узок. Выбор этой функции стоимости обусловлен тем, что мера, полученная сдвигом меры Винера на

бистохастическим мерам и формула следа ядерных операторов// Алгебра и анализ. – 2015. – Т. 27. – № 3. – С. 66–74.

[19] Feyel D., Üstünel S. Monge–Kantorovitch measure transportation and Monge–Ampére equation on Wiener space// Probab. Theory Related Fields. – 2004. – Vol. 128. – №3. – P. 347–385.

[20] Feyel D., Üstünel S. Solution of the Monge–Ampere equation on Wiener space for general log-concave measures// J. Funct. Anal. – 2006. – Vol. 232. – №1. – P. 29–55.

[21] Fang S., Shao J., Sturm K.-T. Wasserstein space over the Wiener space// Probab. Theory Related Fields. – 2010. – Vol. 146. – №3–4. – P. 535–565.

[22] Bogachev. V.I., Kolesnikov A.V. On the Monge–Ampére equation in infinite dimensions// Infin. Dimen. Anal. Quantum Probab. Related Top. – 2005. – Vol. 8. – №4. – P. 547–572.

вектор из пространства Камерона–Мартина, эквивалентна мере Винера. Более того, как показано в работе В.И. Богачева, А.В. Колесникова и К.В. Медведева[23], всякая вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно меры Винера, может быть представлена в виде указанного сдвига. В работе Ф. Кавалетти[24] было показано, что для меры Винера существует оптимальное отображение такого вида, несмотря на указанную сингулярность функции стоимости. Аналогичный результат имеет место и для мер, абсолютно непрерывных относительно меры Винера.

Таким образом, возникает вопрос об обобщении этого результата на меры, являющиеся распределениями диффузионных процессов. Если коэффициент диффузии постоянный, то распределение диффузионного процесса будет абсолютно непрерывно относительно меры Винера, а задача Монжа в рассматриваемой постановке окажется разрешимой. Нетрудно построить пример, показывающий, что в случае постоянства коэффициента диффузии на некотором отрезке задача Монжа также разрешима: эта ситуация снова сводится к рассмотрению мер, абсолютно непрерывных относительно меры Винера.

Основной результат второй главы состоит в том, что для широкого класса распределений диффузионных процессов с непостоянным коэффициентом диффузии в задаче Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина, отсутствуют решения в случае несовпадающих исходных мер.

В третьей главе основным объектом исследования выступают некоторые специальные классы отображений пространства $\mathbb{R}^n$ и преобразования гауссовских мер при этих отображениях, а задача состоит в сравнении стоимостей соответствующих транспортировок. Кроме того, эти вопросы обсуждаются и в бесконечномерном случае. Особое внимание уделяется широко используемым классам треугольных отображений и оптимальных отображений, в частности проводится сравнение значений функционала стоимости в задаче Канторовича для этих классов отображений. Подобные вопросы для указанных классов отображений исследовались в цитированной работе В.И. Богачева, А.В. Колесникова, К.В. Медведева[21].

Метрика Канторовича–Рубинштейна впервые была введена в работе Л.В. Канторовича[25]; вопросы, связанные с ней рассматриваются в кни-

[23]Богачев В.И., Колесников А.В., Медведев К.В. Треугольные преобразования мер// Матем. сб. – 2005. – Т. 196. – №3. – С. 3–30.

[24]Cavalletti F. The Monge problem in Wiener space// Calc. Var. Partial Diff. Equat. – 2012. – Vol. 45. – №1-2. – P. 101–124.

[25]Канторович Л.В. О перемещении масс// ДАН СССР. – 1942. – Т. 37. – №7–8. – С. 227–229.

гах В.И. Богачева[26,27] и работах А. Такацу[28,29], М. Ловри, М. Мин-Оо, Е.А. Рух[30], К. Модин[31] и Л.Т. Сковгаард[32] (последние три работы посвящены римановой геометрии гауссовских распределений).

Вопросы, связанные с оценкой метрики Канторовича–Рубинштейна и с неравенствами для гауссовских мер, изучались многими авторами, среди которых М. Талагран[33], М. Леду[34], А.В. Колесников[35]. Известные неравенства, полученные Талаграном, являются основной предпосылкой к исследованию связи между оптимальными и треугольными отображениями. М. Талагран оценил функционал стоимости как для оптимального, так и для треугольного отображений, переводящих стандартную гауссовскую меру γ в меру μ, абсолютно непрерывную относительно γ, с помощью энтропии меры μ относительно меры γ. Если эта энтропия достаточно мала, то логично было бы предположить, что значения функционала стоимости сравнимы для оптимального и для треугольного отображений, переводящих γ в μ. В третьей главе показано, что класс мер, для которых эти два значения сравнимы, весьма узок, но все же и в бесконечномерном случае имеются конструктивные условия, при которых стоимость транспортировки при треугольном отображении оценивается с универсальной постоянной через оптимальную стоимость.

Цель работы.

• Исследовать задачу Монжа об оптимальном отображении распределения диффузионного процесса μ на пространстве непрерывных функций в абсолютно непрерывную относительно μ меру с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера.

• Исследовать задачу Канторовича для мер μ и ν, где μ — распределение диффузионного процесса в пространстве непрерывных функций,

---

[26]Bogachev V.I. Measure theory. V. 2. Springer, Berlin, 2007.

[27]Bogachev V.I. Weak convergence of measures. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2018.

[28]Takatsu A. On Wasserstein geometry of Gaussian measures// In: Probabilistic approach to geometry. Adv. Stud. Pure Math. – 2010. – Vol. 57. – P. 463–472.

[29]Takatsu A. Wasserstein geometry of Gaussian measures// Osaka J. Math. – 2011. – Vol. 48. – №4. – P. 1005–1026.

[30]Lovrić M., Min-Oo M., Ruh E.A. Multivariate normal distributions parametrized as a Riemannian symmetric space// J. Multivariate Anal. – 2000. – Vol. 74. – №1. – P. 36–48.

[31]Modin K. Geometry of matrix decompositions seen through optimal transport and information geometry// J. Geom. Mech. – 2017. – Vol. 9. – №3. – P. 335–390.

[32]Skovgaard L.T. A Riemannian geometry of the multivariate normal model// Scand. J. Statist. – 1984. – Vol. 11. – P. 211–223.

[33]Talagrand M. Transportation cost for Gaussian and other product measures// Geom. Funct. Anal. – 1996. – Vol. 6. – №3. – P. 587–600.

[34]Ledoux M. The concentration of measure phenomenon. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2001. – x+181 p.

[35]Kolesnikov A.V. Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures// J. Math. Pures Appl. – 2004. – Vol. 83. – №11. – P. 1373–1404.

а мера ν абсолютно непрерывна относительно μ.

• Исследовать связь значений функционала стоимости в задаче Монжа для треугольных и для оптимальных отображений гауссовских мер. Описать класс гауссовских мер на бесконечномерных пространствах, для которых эти значения сравнимы.

Научная новизна. 1. Для распределений диффузионных процессов в пространстве непрерывных функций получены условия на коэффициент диффузии, необходимые для того, чтобы соответствующая задача Монжа с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, была разрешима. Это дает простые и легко проверяемые условия, при которых указанная задача неразрешима.

2. Для задачи Канторовича с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, показано, что она не имеет нетривиальных решений для широкого класса распределений диффузионных процессов. В частности, так обстоит дело для непостоянных аналитических коэффициентов диффузии.

3. Для гауссовских мер на пространстве $\mathbb{R}^n$ проведено сравнение функционалов стоимости в задаче Монжа для треугольных и для оптимальных отображений, показано, что эти значения асимптотически не сравнимы для весьма широкого класса мер. Получены бесконечномерные аналоги этого утверждения. С другой стороны, указаны конструктивные условия, при которых даже в бесконечномерном случае стоимость транспортировки при треугольном отображении оценивается с универсальной постоянной через оптимальную стоимость.

Положения, выносимые на защиту.

1. Конструктивные условия на коэффициент диффузии, необходимые для разрешимости соответствующей задачи Монжа для распределений диффузионных процессов в пространстве непрерывных функций с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера.

2. Задача Канторовича с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, не имеет нетривиальных решений для широкого класса распределений диффузионных процессов.

3. Значения функционалов стоимости в задаче Монжа для треугольных и для оптимальных отображений гауссовских мер на $\mathbb{R}^n$ асимптотически не сравнимы для широкого класса мер. Условия, при которых в бесконечномерном случае стоимость транспортировки при треугольном отображении оценивается с универсальной постоянной через оптимальную стоимость.

Методы исследования. В работе используются методы общей теории меры и функционального анализа, а также некоторые конструкции автора.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут применяться в различных задачах теории меры, бесконечномерного анализа, стохастического анализа и теории вероятностей. Ее результаты и методы будут полезны в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Институте проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» и Новосибирском государственном университете.

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются меры на бесконечномерных пространствах, их линейные и нелинейные отображения, а также функционалы на бесконечномерных пространствах с мерами, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

1. Международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (Москва, РУДН, 2014 г.)
2. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2016 г.)
3. Международная конференция «Бесконечномерный анализ и теория управления» (Москва, МГУ, 2018 г.)
4. Международная конференция «Recent Advances in Mass Transportation». Poncelet Center and the Higher School of Economics (Москва, 2019 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, С.В. Шапошникова и Н.А. Толмачева (МГУ, многократно, 2013–2019 г.),
2. Международный научно-исследовательский семинар “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия (2015 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора (см. [1], [2], [3], [4], последние две из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах 3 международных конференций (см. [5]–[7]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации составляет 61 страницу.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектом 17-11-01058 Российского научного фонда (выполняемым при МГУ им. М. В. Ломоносова).

Краткое содержание диссертации.

Нумерация результатов в автореферате соответствует нумерации в самой диссертации.

Первая глава работы — вводная и содержит все нужные определения, обозначения и уже известные результаты, используемые в остальных главах работы. Проблемы, обсуждаемые во второй и третьей главе, имеют бесконечномерный характер.

Во второй главе исследуются задачи Монжа и Канторовича с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера. Эти задачи рассмотрены для распределений диффузионных процессов в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$.

Мера μ — образ меры Винера P_W на пространстве $X = C[0, 1]$ при отображении $F(x(\cdot)) = f \circ x(\cdot)$, где f — диффеоморфизм вещественной прямой, π — произвольная борелевская вероятностная мера на $X \times X$ с заданными проекциями μ и ν на первый и второй сомножители.

Теорема 2.1.1. *Пусть мера ν абсолютно непрерывна относительно меры μ. Тогда для π-почти всех $(x, y) \in X \times X$ верно равенство*

$$f'[f^{-1}(x(t))] = f'[f^{-1}(y(t))], \quad t \in [0, 1].$$

Смысл этого утверждения состоит в том, что указанное равенство накладывает весьма сильные ограничения на меру π, от которой даже не требуется никакой оптимальности. Например, в конечномерном случае в качестве π можно взять произведение мер μ и ν, здесь же произведение не подходит.

Теорема 2.2.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — возрастающий диффеоморфизм прямой, причем нули функции f'' изолированы. Предположим, что борелевская вероятностная мера π на $X \times X$, удовлетворяющая условию*

$$x - y \in H \quad \text{для } \pi\text{-почти всех} \quad (x, y) \in X \times X,$$

имеет проекции μ и ν такие, что ν абсолютно непрерывна относительно μ. Тогда $x = y$ для π-почти всех $(x, y) \in X \times X$ и $\mu = \nu$.

Следствие 2.2.2. *Пусть f — вещественно-аналитический, возрастающий, нелинейный диффеоморфизм прямой. Тогда мера π, удовлетворяющая условиям теоремы* 2.1.1, *сосредоточена на множестве*

$$\{(x, y)\colon x = y\}$$

и верно равенство $\mu = \nu$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — возрастающий диффеоморфизм вещественной прямой, причем множество нулей функции f'' имеет лебеговскую меру нуль. Предположим, что борелевская вероятностная мера π на $X \times X$ удовлетворяет условию*

$$x - y \in H \quad \text{для } \pi\text{-почти всех} \quad (x, y) \in X \times X,$$

причем имеет проекции μ и ν такие, что мера ν абсолютно непрерывна относительно μ. Тогда $x = y$ для π-почти всех $(x, y) \in X \times X$ и $\mu = \nu$.

В **третьей главе** проводится сравнение значений функционала стоимости в задаче Монжа для треугольных и оптимальных отображений гауссовских мер. Каноническим треугольным отображением борелевской вероятностной меры μ на $\mathbb{R}^n$ в борелевскую вероятностную меру ν называется такое борелевское отображение $T = (T_1, \ldots, T_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, переводящее μ в ν, что компонента T_1 есть функция только первой координаты, т. е. имеет вид $T_1(x_1)$, компонента T_2 имеет вид $T_2(x_1, x_2)$, компонента с номером k имеет вид $T_k(x_1, \ldots, x_k)$, причем функции

$$x_k \mapsto T_k(x_1, \ldots, x_k)$$

являются возрастающими при фиксированных значениях оставшихся переменных. В случае линейного отображения его матрица имеет треугольный вид. Известно, что такое отображение существует и единственно с точностью до переопределения на множестве меры нуль для всех пар абсолютно непрерывных мер (см. работу В.И. Богачева, А.В. Колесникова и К.В. Медведева[21]). В одномерном случае каноническое отображение строится с помощью функций распределения и их обратных. В данной главе оценивается константа K в неравенстве

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2\, \gamma(dx) \leqslant K \int_{\mathbb{R}^n} |T_0(x) - x|^2\, \gamma(dx),$$

где γ и μ — две центрированные гауссовские меры на $\mathbb{R}^n$, а T и T_0 — соответственно треугольное и оптимальное отображения, переводящие меру γ в меру μ.

Оказывается, что оба эти отображения в гауссовском случае линейны. Это вполне ожидаемое и кажущееся очевидным утверждение доказывается, как ни странно, довольно неэлементарно с привлечением глубоких результатов для общих оптимальных отображений.

Лемма 3.1.1. *Пусть γ и μ — две центрированные гауссовские меры на $\mathbb{R}^n$. Тогда оптимальное отображение T_0, переводящее меру γ в меру μ, линейно, а каноническое треугольное отображение T меры γ в меру μ также линейно.*

Несложные примеры показывают, что каноническое треугольное отображение гауссовских мер отнюдь не всегда оптимально. Это вполне естественно, так как выбор такого отображения тесно связан с выбором ортонормированного базиса, а оптимальное отображение не зависит от выбора ортонормированного базиса. Поэтому даже в том случае, когда оба отображения совпали, бывает несложно перейти к иному базису, где совпадения нет. Однако был открыт вопрос о том, сколь сильно могут отличаться стоимости транспортировок при этих двух отображениях. Этот вопрос естественно возник после того, как М. Талагран открыл свое замечательное неравенство, из которого вытекало, что обе стоимости при широких условиях допускают оценку через энтропию одного из маргиналов. Поэтому можно было рассчитывать, что они имеют одинаковый порядок. Однако, как показано в диссертации, такие ожидания не оправдываются, хотя при определенных дополнительных условиях сравнение все же оказывается возможным, причем в бесконечномерном случае.

Теорема 3.2.1. *Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ и M — симметричная положительно определенная матрица с собственными значениями μ_i и определителем, равным единице. Тогда в некотором ортонормированном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ центрированная гауссовская мера μ с ковариационной матрицей M обладает следующим свойством: для оптимального линейного отображения T_0, переводящего меру γ в меру μ (которое задается матрицей $\sqrt{M}$ в этом базисе) и для канонического треугольного отображения T меры γ в меру μ (в этом же базисе) справедлива оценка*

$$K \geqslant 1 + 2\frac{\sum_{i=1}^n(\lambda_i - 1)}{\sum_{i=1}^n(\lambda_i - 1)^2},$$

где λ_i — собственные числа матрицы A отображения T_0 в стандартном базисе, т. е. $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$.

Теорема 3.3.1. *Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Будем брать в качестве μ всевозможные невырожденные центрированные* *гауссовские меры на* $\mathbb{R}^n$. *Если* T — *треугольное, а* T_0 — *оптимальное отображение, переводящее меру* γ *в меру* μ, *то для наименьшей возможной постоянной* K *в неравенстве*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x) - x|^2 \, \gamma(dx) \leqslant K \int_{\mathbb{R}^n} |T_0(x) - x|^2 \, \gamma(dx)$$

верна оценка

$$K \geqslant n + \sqrt{n^2 - n}.$$

В частности, если рассматривать меры μ *с ковариационной матрицей, имеющей единичный определитель, то коэффициент* K *не может быть меньше* $\sqrt{n}$.

Пусть мера γ на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех последовательностей есть счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой, тогда $H = l^2$ — ее пространство Камерона–Мартина. Рассмотрим измеримый линейный оператор B следующего вида:

$$Bx = \sum_{i=1}^{\infty} x_i B_0 e_i,$$

где $B_0 \colon H \to H$ — линейный оператор, у которого норма Гильберта–Шмидта меньше 1.

Следствие 3.3.2. *Пусть норма Гильберта–Шмидта оператора* B_0 *не превосходит* $1/2$. *Тогда мера* $\mu = \gamma \circ (I + B)^{-1}$ *эквивалентна* γ, *имеет конечную энтропию и существует измеримое линейное треугольное отображение* T, *переводящее меру* γ *в меру* μ, *причем для оптимального отображения* T_0 *верна оценка*

$$\int |Tx - x|^2 \, \gamma(dx) \leqslant 25 \int |T_0 x - x|^2 \, \gamma(dx),$$

а также верны энтропийные неравенства Талаграна для интегралов от $|Tx - x|^2$ *и* $|T_0 x - x|^2$.

Смысл этого утверждения состоит в том, что при указанных условиях каноническое треугольное отображение одной гауссовской меры в другую приводит к стоимости транспортировки, оцениваемой в фиксированное число раз через стоимость оптимальной транспортировки. Это отличает данную более специальную ситуацию от общей, в которой нет не зависящего от размерности коэффициента, позволяющего сравнить заведомо неоптимальную в типичных случаях стоимость с оптимальной.

Заключение

В диссертации исследованы некоторые виды преобразований мер в бесконечномерных пространствах, а также задачи Монжа и Канторовича для этих мер. Показано, что для широкого класса распределений диффузионных процессов с непостоянным коэффициентом диффузии в пространстве непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций соответствующие задачи Монжа и Канторовича с функцией стоимости, заданной нормой пространства Камерона–Мартина меры Винера, не имеют нетривиальных решений. Доказано, что если распределение диффузионного процесса из построенного класса переходит в меру, не совпадающую с ним, то функционалы стоимости как в задаче Монжа, так и в задаче Канторовича не принимают конечных значений.

Также в диссертации исследованы некоторые свойства треугольных отображений гауссовских мер в бесконечномерных пространствах, а именно произведено сравнение значений функционала стоимости в задаче Монжа для оптимального и канонического треугольного отображений, переводящих одну гауссовскую меру в другую, и показано, что в общем случае стоимость транспортировки для треугольного отображения не оценивается через оптимальную стоимость. С другой стороны, найдены эффективные условия, при которых имеется оценка с универсальной постоянной.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях.

1. Исследование задач Монжа и Канторовича для распределений диффузионных процессов на пространстве непрерывных на отрезке $[0,1]$ траекторий с другими функциями стоимости.

2. Исследование класса гауссовских мер на пространстве $\mathbb{R}^\infty$, для которых значения функционала стоимости в задаче Монжа для оптимального и канонического треугольного отображения сравнимы.

Автор признателен своему научному руководителю В.И. Богачеву за постановку задач и полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Bukin D.B. On the Monge and Kantorovich problems for distributions of diffusion processes// Math. Notes. – 2014. – Vol. 96. – №5-6. – P. 864–870 (импакт-фактор WoS 0.612).

[2] Букин Д.Б. О задаче Канторовича для нелинейных образов меры Винера// Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – №5. – С. 682–688 (импакт-фактор WoS 0.612).

Bukin D.B. On the Kantorovich problem for nonlinear images of the Wiener measure// Mathematical Notes. – 2016. – Vol. 100. – №5-6. P. 660–665.

[3] Bukin D.B., Krugova E.P. Transportation costs for optimal and triangular transformations of Gaussian measures// Theory of Stochastic Processes. – 2018. – Vol. 23. – № 2. – P. 21–32 (импакт-фактор SJR 0.12).

[4] Bukin D.B., Krugova E.P. On triangular mappings of Gaussian measures// Mathematical Notes. – 2019. – Vol. 106. – №5. – P. 843–845 (импакт-фактор WoS 0.612).

В работе [3] диссертанту принадлежит лемма 1, теоремы 1 и 2, следствие 1. Е.П. Круговой принадлежит постановка задачи и идея доказательства теоремы 1. В заметке [4] диссертантом даны доказательства основных результатов. Е.П. Круговой принадлежит постановка задачи.

Тезисы докладов на научных конференциях

[5] Букин Д.Б. О задаче Канторовича для распределений диффузионных процессов// Сборник тезисов докладов международной научной конференции «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования». Москва. 2014. – С. 32–33.

[6] Букин Д.Б. О задаче Канторовича для нелинейных образов меры Винера// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016». М.: МГУ. 2016. – 1 с.

[7] Bukin D.B. On the Monge and Kantorovich problems for nonlinear images of the Wiener measure// Сборник тезисов докладов на международной научной конференции «Бесконечномерный анализ и теория управления». М.: МГУ. 2018. – 1 с.