На правах рукописи

Гадзова Луиза Хамидбиевна

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
Псху Арсен Владимирович

Официальные оппоненты: *Асхабов Султан Нажмудинович*
доктор физико-математических наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Чеченский государственный университет”, профессор кафедры Математического анализа, алгебры и геометрии

Шишкина Элина Леонидовна
кандидат физико-математических наук,
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования “Воронежский государственный университет”, доцент кафедры Математического и Прикладного Анализа

Защита состоится 12 ноября 2019 г. в 16 ч 00 мин на заседании диссертационного совета БелГУ.01.01 при ФГАОУ ВО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет"по адресу: 308015, г. Белгород, ул. Победы 85, корп. 17, ауд. 331.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет"и на сайте *library.bsu.edu.ru.*

Автореферат разослан “__”__________________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Полунин Виктор Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. За последние годы существенно возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка, который стимулируется практическими приложениями в различных областях науки, например, в физике и математическом моделировании. На сегодняшний день имеется достаточно большой список работ, посвященных как собственно теории дробного исчисления (см., например, М.М. Джрбашян, А.Б. Нерсесян, K.B. Oldham, J. Spanier, С.Г. Самко, О.И. Маричев, А.М. Нахушев, А.А. Килбас, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, I. Ozturk, А.В. Псху, А.В. Глушак, В.Е. Федоров, М.О. Мамчуев, Б.И. Эфендиев), так и различным ее приложениям (R.L. Bagley, P.J. Torvik, В.В. Учайкин, В.Е. Тарасов, R. Hilfer и др.). Подробное описание применения дробного исчисления к различным областям науки и техники на современном этапе дано в монографии I. Podlubny. В частности, особый интерес представляют математические модели с ядрами дробного порядка, являющиеся обобщением "классических" вязкоупругих моделей. Например, для полимеров с резко изменяющимися свойствами в пространстве и во времени, в качестве математической модели можно взять дифференциальные уравнения дробного порядка (А.М. Нахушев, Р.Б. Тхакахов). В теории вязкоупругости Ю.Н. Работнов предложил модель на основе ядра интегрального уравнения, которая сводится к уравнениям дробного порядка с производными Римана-Лиувилля. Такой метод дает возможность сравнительно просто доводить до получения числовых результатов решение многих задач в теории вязкоупругости. Ряд работ Т.А. Сургуладзе посвящены некоторым аспектам применения дробного исчисления в вязкоупругости.

Одной из первых работ, посвященных обыкновенным дифференциальным уравнениям дробного порядка является работа Дж.Х. Барретта. В работах М.М. Джрбашяна и А.Б. Нерсесяна исследованы задача типа Коши и задача типа Штурма-Лиувилля для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Работы I. Ozturk посвящены краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными и со спектральным параметром.

В работах А.М. Нахушева даны постановки видоизмененных задач Коши и Неймана для уравнения второго порядка с дробной производной порядка $\alpha \in (1, 2)$ и исследована двухточечная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с производной Римана-Лиувилля в группе младших членов.

Дифференциальные уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования можно интерпретировать как оператор дробного дифференцирования, распределенного (сегментного) порядка с мерой, сосредоточенной на дискретном множестве. К исследованиям, посвященным дифференциальным уравнениям с операторами дискретно распределенного дифференцирования и операторами непрерывно распределенного дифференцирования относятся работы M. Caputo, Z. Jiao, Y.Qu. Chen, I. Podlubny, K. Diethelm, N.J. Ford, Y. Luchko и A.N. Kochubei, которые используют уравнения с операторами дискретно распределенного дифференцирования при поиске приближенных решений уравнений с операторами непрерывно распределенного дифференцирования.

Цель работы. Основной целью работы является исследование краевых задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с оператором дробного дифференцирования дискретно распределенного порядка с постоянными коэффициентами.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием метода функции Грина, методов интегральных преобразований, теории интегральных уравнений, теории специальных функций, методов теории дробного исчисления.

Научная новизна. Исследованы краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного дискретно распределенного порядка с постоянными коэффициентами, которые найдут применение во многих разделах анализа и математического моделирования.

Основные результаты диссертации, выносимые на защиту.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования:

1. Построено фундаментальное решение и изучены его свойства. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши.

2. Развит метод функции Грина решения задачи Дирихле, задачи Неймана и краевой задачи с условиями Штурма-Лиувилля. Построены представления решений и соответствующие функции Грина. Доказаны теоремы существования и единственности.

3. Доказана конечность числа вещественных собственных значений основных двухточечных краевых задач.

4. Исследованы нелокальные краевые задачи, включая задачи с локальным и интегральным смещениями. Доказаны теоремы существования и единственности решений, получены явные представления решений поставленных задач.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты внесут вклад в развитие современной теории дифференциальных уравнений дробного порядка. Практическая ценность обусловлена прикладной значимостью дробного исчисления и теории дробных дифференциальных уравнений в математическом моделировании и других областях.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре по проблемам современного анализа, информатике и физике ИПМА КБНЦ РАН (руководитель д.ф.-м.н., проф. Нахушев А.М.), на научно-исследовательском семинаре по актуальным проблемам прикладной математики ИПМА КБНЦ РАН (руководитель к.ф.-м.н. Алиханов А.А.), на заседаниях отдела Дробного исчисления ИПМА КБНЦ РАН (руководитель д.ф.-м.н., доц. Псху А.В.), на научном семинаре "Дифференциальные уравнения и математическое моделирование" при Совете молодых ученых и специалистов ИПМА КБНЦ РАН (председатель к.ф.-м.н. Мамчуев М.О.), на Международных и Всероссийских конференциях: Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXX"(Воронеж, 2019), Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики, V конференция посвященная 80-летию Адама Маремовича Нахушева (Нальчик, 2018), XIV Владикавказская молодежная математическая школа "Математический анализ и математическое моделирование"(Цей, 2018), Воронежская весенняя математическая школа "Понтрягинские чтения - XXVIII"(Воронеж, 2017), Актуальные проблемы прикладной математики (Терскол, 2018, 2017, 2016), Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование (Дивноморское, 2016), On actual problems of applied mathematics and physics and School for young scientists "Nonlocal boundary problems of algebra, analysis and informatics" (Elbrus, 2015), Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования (Цей, 2015), Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики (Нальчик, 2014), Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики (Нальчик, 2011; Терскол, 2010, 2012), на IX – XII Школах молодых ученых "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики" (Нальчик – Эльбрус, 2011 – 2014).

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в работах [1] – [14], список которых приводится в конце автореферата. Из них [1] – [8] опубликованы в изданиях, включенных в список изданий, рекомендованных ВАК.

Структура и объем. Диссертация состоит из введения, вводных сведений, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и списка литературы, содержащего 113 наименований и изложена на 91 страницах.

Основное содержание работы

В **Вводных сведениях** приведены определения и свойства специальных функций, а также формулы из теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для дальнейшего изложения.

Основными объектами исследования являются уравнения

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)=f(x),\qquad 0<x<1, \tag{1}$$

где $\alpha_1\in(n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_m, \beta_1>0, \lambda, \beta_j\in\mathbb{R}$, ∂_{0x}^{γ} – дробная производная Герасимова-Капуто, и

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i D_{0x}^{\alpha_i}u(x)=f(x),\qquad 0<x<1, \tag{2}$$

где $\alpha>0$, $\alpha\in(n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$; $\alpha>\alpha_1>\alpha_2>...>\alpha_m$; $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,...,m$; D_{0x}^{α} – дробная производная Римана-Лиувилля.

В **первой главе** найдено общее представление решения уравнения (1). Построено фундаментальное решение, исследованы его свойства и решена задача Коши.

В **параграфе §1.1** приводится постановка задачи с условиями Коши для уравнения (1) : найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u^{(l)}(0)=u_l,\quad l=\overline{0,n-1}, \tag{3}$$

где u_l – заданные действительные числа.

Определение 1. Регулярным решением уравнения (1) назовем функцию $u=u(x)$, имеющую абсолютно непрерывные производные до порядка $n-1$ на отрезке [0,1] и удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x\in(0,1)$.

В **параграфе §1.2** для уравнения (1) получена формула Лагранжа.

Дифференциальное выражение $L^*v(x)$, определенное формулой $L^*v(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j D_{0x}^{\alpha_j}v(x)+\lambda v(x)$, назовем сопряженным к дифференциальному выражению $Lu(x)=\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}u(x)+\lambda u(x)$.

Лемма 1. *Пусть $u(x)$, $v(x)$ – произвольные функции, $u^{(n-1)}(x)\in AC[0,1]$ и $D_{0x}^{\alpha_1-n}v(x)\in C^n[0,1]$, $v(x)\in L[0,1]$. Тогда справедлива формула*

$$(Lu*v)(x)=(u*L^*v)(x)+Q(x), \tag{4}$$

где $(g*h)(x)=\int\limits_0^x g(x-t)h(t)dt-$ свертка Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$,

$$Q(x)=\sum_{l=0}^{n-1}u^{(l)}(t)\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{xt}^{\alpha_j-l-1}v(x-t)\Big|_{t=0}^{t=x},$$

Соотношение (4) назовем формулой Лагранжа для дифференциальных операторов L и L^* .

В **параграфе §1.3** строится фундаментальное решение уравнения (1).

Введем в рассмотрение функцию $G_m^\mu(x)$

$$G_m^\mu(x) = G_m^\mu(x;\nu_1,...,\nu_m;\gamma_1,...,\gamma_m) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-t} S_m^\mu(x;\nu_1 t,...,\nu_m t;\gamma_1,...,\gamma_m)dt,$$

в терминах которой далее будет построено общее представление решения уравнения (1).

Здесь и далее

$$\nu_1 = -\frac{\lambda}{\beta_1}, \quad \nu_j = -\frac{\beta_j}{\beta_1}, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_j = \alpha_1 - \alpha_j, \quad (j = \overline{2,m})$$

$$S_m^\mu(x;z_1,...,z_m;\gamma_1,...,\gamma_m) = (h_1 * h_2 * ... * h_m)(x),$$

$$h_j = h_j(x) \equiv x^{\mu_j - 1}\phi(\gamma_j,\mu_j;z_j x^{\gamma_j}), \quad \phi(\rho,\zeta;z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\zeta)}$$

– функция Райта (Wright E.M., 1933).

Далее считаем, что параметры функции $G_m^\mu(x)$ изменяются в диапазонах

$$x>0, \quad \nu_j \in \mathbb{R}, \quad \gamma_j > 0, \quad \mu_j > 0.$$

Заметим, что функция $G_m^\mu(x)$ не зависит от распределения чисел $\mu_j > 0$, а лишь от их суммы $\mu = \sum\limits_{j=1}^m \mu_j$.

Лемма 2. *Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$ обладает следующими свойствами: является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям*

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^m \nu_j D_{0x}^{\alpha_j-1}\right) G_m^{\alpha_1}(x) = 1, \tag{5}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\sum_{j=1}^m \nu_j D_{0x}^{\alpha_j-l-1}\right) G_m^{\alpha_1}(x) = 0, \quad l=\overline{1,n-1}. \tag{6}$$

Функция $G_m^{\alpha_1}(x)$, удовлетворяющая свойствам (5), (6) является фундаментальным решением уравнения (1).

В **параграфе §1.4** найдена асимптотика фундаментального решения уравнения (1) и построено его представление в виде контурного интеграла.

Теорема 1. *Пусть* $0 < x < 1$. *Справедлива асимптотическая формула*

$$G_m^{\mu}(x,\lambda) = -\beta_1 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{Q_l}{(-\lambda)^{l+1}} + O\left(\frac{1}{\left|\lambda\right|^{n+1}}\right), \quad \lambda \to +\infty,$$

где

$$Q_l = \sum_{l_1+l_2+\ldots+l_m=l} \frac{l!}{l_1!l_2!\ldots l_m!} \prod_{j=1}^{m} \beta_j{}^{l_j} \frac{x^{\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j l_j - 1}}{\Gamma\left(\mu-\alpha_1-\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j l_j\right)}.$$

В **параграфе §1.5** выписывается представление решения задачи Коши для уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$x^{1-\mu} f\left(x\right) \in C[0,1], \quad f\left(x\right) = D_{0x}^{\alpha_1-n} g\left(x\right), \quad g\left(x\right) \in L[0,1], \quad \mu > 0.$$

Тогда решение задачи (3) для уравнения (1) существует, единственно и имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1} \int\limits_0^x f(t) G_m^{\alpha_1}(x-t)dt + \sum_{l=0}^{n-1} u_l \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j}{\beta_1} G_m^{\alpha_1-\alpha_j+l+1}(x).$$

Вторая глава посвящена решению основных двухточечных краевых задач для уравнения (1) при $\alpha_j \in (1,2)$. Решены основные краевые задачи, доказаны теоремы существования и единственности решений, найдены явные их представления решения. В терминах специальных функций построены фундаментальные решения и соответствующие функции Грина, изучены их, а также возникающих при этом специальных функций, качественные и структурные свойства.

В **параграфе §2.1** для уравнения (1) найдено решение задачи Дирихле: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = a, \quad u(1) = b, \tag{7}$$

где a, b – заданные постоянные.

Лемма 3. *Пусть функция* $f(x)$ *представима в виде*

$$x^{1-\mu} f(x) \in C[0,1], \quad f(x) = D_{0x}^{\alpha_1-2} g(x), \quad g(x) \in L[0,1], \quad \mu > 0. \tag{8}$$

Тогда справедливо равенство

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j\partial_{0x}^{\alpha_j}+\lambda\right]\frac{1}{\beta_1}(f*G_m^{\alpha_1})(x)=f(x).$$

Лемма 4. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (8). Тогда:*
1) если функция $u(x)$ *– регулярное решение уравнения (1), то она представима в виде*

$$u(x)=\frac{1}{\beta_1}(f*G_m^{\alpha_1})(x)+u(0)\left[1+\nu_1G_m^{\alpha_1+1}(x)\right]+u'(0)\left[x+\nu_1G_m^{\alpha_1+2}(x)\right];\quad(9)$$

2) функция, определенная равенством (9), является регулярным решением уравнения (1).

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (8) и выполнено неравенство*

$$1+\nu_1G_m^{\alpha_1+2}(1)\neq0.\qquad(10)$$

Тогда функция $u(x)$, *определяемая равенством*

$$u(x)=\frac{1}{\beta_1}\int\limits_0^1\mathcal{G}_1(x,t)f(t)dt-$$

$$-a\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_jD_{1t}^{\alpha_j-1}\mathcal{G}_1(x,t)\right]_{t=0}+b\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_jD_{1t}^{\alpha_j-1}\mathcal{G}_1(x,t)\right]_{t=1},$$

где

$$\mathcal{G}_1(x,t)=H(x-t)G_m^{\alpha_1}(x-t)-G_m^{\alpha_1}(1-t)\frac{x+\nu_1G_m^{\alpha_1+2}(x)}{1+\nu_1G_m^{\alpha_1+2}(1)},$$

является регулярным решением задачи (1), (7).
Решение задачи (1), (7) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (10).

В **параграфе §2.2** для уравнения (1) решена задача Неймана: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u'(0)=c,\quad u'(1)=d,\qquad(11)$$

где c,d – заданные постоянные.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (8) и выполнено неравенство*

$$\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1) \neq 0. \tag{12}$$

Тогда функция $u(x)$, определяемая равенством

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1}\int\limits_0^1 \mathcal{G}_2(x,t)f(t)dt+$$

$$+c\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathcal{G}_2(x,t)\right]_{t=0} - d\left[\sum_{j=1}^{m}\beta_j D_{1t}^{\alpha_j-2}\mathcal{G}_2(x,t)\right]_{t=1},$$

где

$$\mathcal{G}_2(x,t) = H(x-t)G_m^{\alpha_1}(x-t) - G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\frac{1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)}{\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1)},$$

является регулярным решением задачи (1), (11).

Решение задачи (1), (11) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (12).

В **параграфе §2.3** для уравнения (1) решена краевая задача с условиями Штурма-Лиувилля: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$au(0) + bu'(0) = 0, \quad cu(1) + du'(1) = 0, \tag{13}$$

где a, b, c, d – заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$.

Теорема 5. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (8) и выполнено условие*

$$\tilde{\triangle} = ac\left[1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1)\right] + ad\left[1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1)\right] -$$

$$- bc\left[1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(1)\right] - bd\nu_1 G_m^{\alpha_1}(1) \neq 0. \tag{14}$$

Тогда функция $u(x)$, определяемая равенством

$$u(x) = \int\limits_0^1 \mathcal{G}_3(x,t)f(t)dt,$$

где

$$\mathcal{G}_3(x,t)=\frac{1}{\beta_1\tilde{\triangle}}\int\limits_0^1\Big\{H(x-t)\tilde{\triangle}G_m^{\alpha_1}(x-t)+$$

$$+G_m^{\alpha_1}(1-t)\left[cb\left(1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)\right)-ac\left(x+\nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)\right)\right]+$$

$$+G_m^{\alpha_1-1}(1-t)\left[bd\left(1+\nu_1 G_m^{\alpha_1+1}(x)\right)-ad\left(x+\nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)\right)\right]\Big\}f(t)dt,$$

является регулярным решением задачи (1), (13).

Решение задачи (1), (13) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (14).

В **параграфе §2.4** развит метод функции Грина для исследуемых задач и построены функции Грина краевых задач для уравнения (1). В **параграфе §2.5** для уравнения (1) изучаются спектральные вопросы исследуемых краевых задач.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 6. *Пусть* $\lambda>0$. *В случае, когда* $a^2+c^2\neq 0$,

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\frac{ac}{\Gamma(2-\alpha_j)}+\frac{ad-bc}{\Gamma(1-\alpha_j)}\right)\neq 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{m}\beta_j\frac{bd}{\Gamma(-\alpha_j)}\neq 0,$$

если $a^2+c^2=0$. *Тогда задача (1), (13) имеет единственное решение для всех вещественных значений* λ *за исключением, быть может, конечного их числа.*

Теорема 7. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\Gamma(-\alpha_j)}\neq 0.$$

Тогда задача (1), (11) имеет единственное решение для всех вещественных значений λ *за исключением, быть может, конечного их числа.*

Теорема 8. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{R}$ *и*

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j}{\Gamma(2-\alpha_j)}\neq 0.$$

Тогда задача (1), (7) имеет единственное решение для всех вещественных значений λ за исключением, быть может, конечного их числа.

Третья глава посвящена решению нелокальных краевых задач для уравнения (1) и уравнения (2).

Определение 2. Регулярным решением уравнения (2) назовем функцию $u = u(x), u(x) \in L(0,1)$, $D_{0x}^{\alpha-n}u(x) \in C^n(0,1)$, удовлетворяющую уравнению (2) для всех x из интервала $(0,1)$.

В **параграфе §3.1** для уравнения (2) исследуется следующая задача: найти регулярное решение уравнения (2) при $n \geq 2$ в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to 0}(\ell^k u)(x) = a_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{15}$$

$$\lim_{x\to 1} D_{0x}^{\mu_j}u(x) = b_j, \quad j = \overline{1,q}, \tag{16}$$

где $p + q = n$, $\mu_j < \alpha$, a_k, b_j – заданные вещественные числа,

$$(\ell^k u)(x) = D_{0x}^{\alpha-k}u(x) - \sum_{i=1}^{M(k)} \lambda_i D_{0x}^{\alpha_i-k}u(x),$$

$M(k) \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 1 \leq k \leq n$, количество элементов в упорядоченной последовательности $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ таких, что $\alpha_i \geq \alpha - n + k$. То есть $M(k) = 0$, если $\alpha_i < \alpha - n + k$ для всех i, и $M(k) = \max\{i : \alpha_i - k \leq \alpha - n\}$ в противном случае.

Теорема 9. *Пусть $f(x) \in C(0,1) \cap L(0,1)$ и выполнено условие*

$$\Delta = \det A \neq 0. \tag{17}$$

Тогда функция

$$u(x) = \int_0^1 f(t)Q(x,t)dt + \sum_{k=1}^{p} a_k(-1)^{k-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1} Q(x,t)\right]_{t=0} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} b_j(-1)^{j-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} Q(x,t)\right]_{t=1},$$

где

$$Q(x,t) = H(x-t)G_m^{\alpha}(x-t) - \sum_{j=1}^{q} G_m^{\alpha-j-p+1}(x) \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i+j}\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} G_m^{\alpha-\mu_i}(1-t),$$

$A=||A_{ij}||,\ \ A_{ij}=G_m^{\alpha-j-\mu_i-p+1}(1),\ \ i,j=\overline{1,q},\ \ \Delta_{ij}$ *– дополнительный минор к элементу матрицы* $A,$ *является регулярным решением задачи (2), (15), (16).*

Решение задачи (2), (15), (16) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (17).

В **параграфе §3.2** решена нелокальная краевая задача с нелокальным смещением для уравнения (2): найти регулярное решение уравнения (2) при $n\geq 2$ в интервале $(0,1)$, удовлетворяющее условиям

$$(\ell^k u)(0)=a_k,\quad 1\leq k\leq n-1, \tag{18}$$

$$a(\ell^j u)(0)+b\big[D_{0x}^{\nu}u(x)\big]_{x=1}=c,\quad \nu\leq 0,\quad k\neq j,\quad b\neq 0, \tag{19}$$

где a_k,a,b,c - заданные постоянные.

Теорема 10. *Пусть* $f(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$ *и выполнено условие*

$$bG_m^{\alpha-\nu-j+1}(1)+a\neq 0. \tag{20}$$

Тогда функция

$$u(x)=\int\limits_0^1 f(t)Q(x,t)dt+\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}a_k\left[(-1)^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k-1}Q(x,t)\right]_{t=0}+$$
$$+\frac{c}{b}\left[D_{1t}^{\alpha-\nu-1}Q(x,t)\right]_{t=1},$$

где

$$Q(x,t)=G_m^{\alpha}(x-t)H(x-t)-\frac{bG_m^{\alpha-j+1}(x)G_m^{\alpha-\nu}(1-t)}{bG_m^{\alpha-\nu-j+1}(1)+a},$$

является регулярным решением задачи (2), (18), (19).

Решение задачи (2), (18), (19) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (20).

В **параграфе §3.3** исследуется краевая задача для уравнения (1) с локальным смещением: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0)=u_0, \tag{21}$$

$$u(1)-\sum_{k=1}^{n}a_k u(x_k)=u_1,\quad x_k\in(0,1), \tag{22}$$

где u_0,u_1,a_k- заданные действительные числа.

Теорема 11. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (8) и выполняется условие* $\rho \neq 0$. *Тогда существует регулярное решение задачи (21), (22) для уравнения (1), определяемое равенством*

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1} \int\limits_0^1 \mathcal{F}(x,t) f(t) dt + u_1 \left[D_{1t}^{\alpha_1 - 1} \mathcal{F}(x,t) \right]_{t=1} + u_0 \left[D_{1t}^{\alpha_1 - 1} \mathcal{F}(x,t) \right]_{t=0},$$

где

$$\mathcal{F}(x,t) = G_m^{\alpha_1}(x-t) H(x-t) - G_m^{\alpha_1}(1-t) \frac{x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)}{\rho} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_k G_m^{\alpha_1}(x_k - t) H(x_k - t) \frac{x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x)}{\rho},$$

$$\rho = 1 + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(1) - \sum_{k=1}^{n} a_k \left[x_k + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x_k) \right].$$

Решение задачи (1), (21), (22) единственно тогда и только тогда, когда $\rho \neq 0$.

В **параграфе §3.4** исследуется краевая задача для уравнения (1) с интегральным смещением: найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \tag{23}$$

$$u(1) - \int\limits_0^1 K(t) u(t) dt = u_2, \tag{24}$$

где $K(t) \in C[0,1]-$ заданная функция, u_0, u_2- заданные постоянные.

Теорема 12. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям (8) и выполняется условие* $(\mathcal{T} W)(0) \neq 0$. *Тогда существует регулярное решение задачи (23), (24) для уравнения (1), определяемое равенством*

$$u(x) = \frac{1}{\beta_1} \int\limits_0^1 f(t) \mathcal{Z}(x,t) dt + u_2 \frac{W(x)}{(\mathcal{T} W)(0)} + u_0 \left(W'(x) - \frac{(\mathcal{T} W')(0) W(x)}{(\mathcal{T} W)(0)} \right),$$

где

$$\mathcal{Z}(x,t) = G_m^{\alpha_1}(x-t) H(x-t) - \frac{W(x) \left(\mathcal{T} G_m^{\alpha_1}\right)(t)}{(\mathcal{T} W)(0)},$$

$$(\mathcal{T}\eta)(t) = \eta(1-t) - \int\limits_t^1 K(\xi)\eta(\xi - t)d\xi, \quad W = x + \nu_1 G_m^{\alpha_1+2}(x).$$

Решение задачи (1), (23), (24) единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие $(\mathcal{T}W)(0) \neq 0$.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию класса линейных обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами дискретно распределенного дифференцирования. Исследованы основные локальные и нелокальные начальные и краевые задачи. Доказаны теоремы существования и единственности решений, найдены условия однозначной разрешимости, выписаны явные представления решений. Развит метод функции Грина для исследуемых задач, построены фундаментальные решения и соответствующие функции Грина. Изучены асимптотики фундаментальных решений и спектральные свойства исследуемых задач, качественные и структурные свойства специальных функций, возникающих при решении исследуемых задач.

Публикации автора по теме диссертации
Статьи в рецензируемых журналах из списка ВАК

1. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 2. С. 180-186.

2. *Гадзова Л.Х.* Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дробного дискретно распределенного дифференцирования // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 3(23). С. 47–56.

3. *Гадзова Л.Х.* Задача Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, № 3. С. 22–30.

4. *Гадзова Л.Х.* Задачи Дирихле и Неймана для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения, 2015. Т. 51. № 12. С. 1580–1586.

5. *Гадзова Л.Х.* Обобщенная задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 1. С. 121–125.

6. *Гадзова Л.Х.* Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2013. Т. 15, № 2. С. 36–39.

7. *Гадзова Л.Х.* Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2012. Т. 14, № 3. С. 15–18.

8. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача для линейного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. С. 47–49.

Другие публикации автора по теме диссертации

9. *Гадзова Л.Х.* Краевая задача со смещением для линейного обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 149 (2018), С. 25–30.

10. *Гадзова Л.Х.* Нелокальная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором дискретно распределенного дифференцирования // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2017 г. № 1 (75). С. 12-18.

11. *Гадзова Л.Х.* Об асимптотике фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 2(13). С. 7–11.

12. *Гадзова Л.Х.* О разрешимости задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 2. С. 25–28.

13. *Гадзова Л.Х.* К теории краевых задач для дифференциального уравнения дробного порядка с производной Капуто // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16, № 2. С. 34–40.

14. *Гадзова Л.Х.* Задача Штурма - Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с постоянными коэффициентами // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2014. Т. 16. № 3. С. 13–16.