

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра дискретной математики



На правах рукописи

УДК 519.174.7

Боголюбский Лев Игоревич

ЗАДАЧИ О РАСКРАСКАХ И РАЗБИЕНИЯХ
В КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики
Федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования «Московский физико-технический
институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Хабаровское отделение Федерального государственного
бюджетного учреждения науки «Институт прикладной
математики Дальневосточного отделения
Российской академии наук»

Защита состоится «10» ноября 2020 года в 14:00 на заседании диссертационного совета
ФПМИ.01.01.09.008 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институт-
ский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-
технического института (национального исследовательского университета):

<https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php>

Работа представлена «11» июля 2020 г. в Аттестационную комиссию Федерального го-
сударственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Мос-
ковский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание учёной степени канди-
дата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и
государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень её разработанности

В диссертации рассматривается ряд задач экстремальной комбинаторной геометрии, мотивированных такими классическими сюжетами, как *проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера* и *проблема Борсука*.

Классическая проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера, поставленная на рубеже 40-х и 50-х годов XX века, состоит в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, называемой *хроматическим числом пространства* и равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1¹²³⁴⁵⁶⁷:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, \quad \forall i \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Сейчас задача о хроматическом числе — одна из центральных в комбинаторной геометрии¹²⁴⁵⁶⁸.

Для величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ получено множество различных оценок как при конкретных

¹*Райгородский А.* Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств // Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 107–146.

²*Raigorodskii A.* Thirty Essays on Geometric Graph Theory // ed. by J. Pach. Springer, 2013. Chap. Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters.

³*Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. Springer, 2009.

⁴*Raigorodskii A.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Contemporary Mathematics. 2014. Vol. 625. P. 93–109.

⁵*Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. Springer, 2005.

⁶*Székely L.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // J. Bolyai Math. Soc. 2002. Vol. 11. P. 649–666.

⁷*Raigorodskii A.* Combinatorial geometry and coding theory // Fundamenta Informatica. 2016. Vol. 145, no. 3. P. 359–369.

⁸*Райгородский А.* О хроматическом числе пространства // Успехи матем. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 147–148.

значениях $n^{9101112131415161718192021}$, так и в асимптотике⁸²²²³. В частности, наилучшие известные асимптотические оценки имеют вид

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n. \quad (1)$$

Естественным обобщением поставленной задачи служит аналогичная проблема для пространств с другими метриками, а также для случая нескольких расстояний, которым

⁹Любимов В., Райгородский А. О нижних оценках чисел независимости некоторых графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // Доклады РАН. 2009. Т. 427, № 4. С. 458–460.

¹⁰Cantwell K. Finite Euclidean Ramsey theory // J. Combin. Theory A. 1996. Vol. 73, no. 2. P. 273–285.

¹¹Chilakamarri K. The unit-distance graph problem: a brief survey and some new results // Bull. Inst. Comb. Appl. 1993. Vol. 8, no. 39. P. C60.

¹²Cibulka J. On the chromatic number of real and rational spaces // Geombinatorics. 2008. Vol. 18, no. 2. P. 53–65.

¹³Exoo G., Ismailescu D. On the Chromatic Number of $\mathbb{R}^n$ for Small Values of n . 2018. URL: <http://arxiv.org/pdf/1408.2002v1.pdf>.

¹⁴Exoo G., Ismailescu D., Lim M. On the Chromatic Number of $\mathbb{R}^4$ // Discrete Computational Geometry. 2014. Vol. 52, no. 2. P. 416–423.

¹⁵Kahle M., Taha B. New lower bounds on $\chi(\mathbb{R}^d)$, $d = 8, \dots, 12$ // Geombinatorics. 2015. Vol. 24, no. 3. P. 109–116.

¹⁶Kupavskiy A., Raigorodskii A. On the chromatic number of $\mathbb{R}^9$ // J. of Math. Sci. 2009. Vol. 163, no. 6. P. 720–731.

¹⁷Nagy Z. A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. 1972. Vol. 23, no. 301–302. P. 26.

¹⁸Nechushtan O. On the space chromatic number // Discrete mathematics. 2002. Vol. 256, no. 1–2. P. 499–507.

¹⁹Черкашин Д., Райгородский А. О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады РАН. 2017. Т. 472, № 1. С. 11–12.

²⁰О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ / А. Гутерман, В. Любимов, А. Райгородский, А. Усачев // Матем. заметки. 2009. Т. 86, № 5. С. 794–796.

²¹Raigorodskii A., Kupavskii A. On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2009. Vol. 34. P. 435–439.

²²Larman D., Rogers C. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. 1972. Vol. 19. P. 1–24.

²³Frankl P., Wilson R. Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. 1981. Vol. 1, no. 4. P. 357–368.

запрещено достигаться между точками одного цвета^{24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43}.
Одной из наиболее исследованных является ситуация, когда метрика манхэттенская. Напомним, что манхэттенской называется метрика в $\mathbb{R}^n$, задаваемая формулой

$$\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Обозначим соответствующее хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_1)$. В этом контексте

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \chi(\mathbb{R}^n, \ell_2),$$

где ℓ_2 — обычная евклидова метрика.

Для метрики ℓ_1 известны асимптотические оценки^{38 39 44}:

$$(1.366 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (4 + o(1))^n.$$

²⁴ Benda M., Perles M. Colorings of metric spaces // Geombinatorics. 2000. Vol. 9, no. 3. P. 113–126.

²⁵ Kang J.-H., Füredi Z. Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with l_1 -norm // Theoretical Comp. Sci. 2004. Vol. 319, no. 1–3. P. 357–366.

²⁶ Katznelson Y. Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence // Combinatorica. 2001. Vol. 21, no. 2. P. 211–219.

²⁷ Кунавский А. О раскрасках сфер, вложенных в $\mathbb{R}^n$ // Матем. сб. 2011. Т. 202, № 6. С. 83–110.

²⁸ Кунавский А. О поднятии оценки хроматического числа $\mathbb{R}^n$ в большую размерность // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429, № 3. С. 305–308.

²⁹ Райгородский А. О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями // Доклады РАН. 2006. Т. 408, № 5. С. 601–604.

³⁰ Мощевитин Н., Райгородский А. О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями // Математические заметки. 2007. Т. 81, № 5. С. 733–743.

³¹ Райгородский А., Шитова И. О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 4. С. 107–142.

³² Райгородский А., Шитова И. О хроматическом числе евклидова пространства и о проблеме Борсука // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 4. С. 636–639.

³³ Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации / Е. Горская, И. Митричева, В. Протасов, А. Райгородский // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 6. С. 3–22.

³⁴ Райгородский А. О хроматических числах сфер в евклидовом пространстве // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 2. С. 174–177.

³⁵ Raigorodskii A. On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinatorica. 2012. Vol. 32, no. 1. P. 111–123.

³⁶ Костина О., Райгородский А. О нижних оценках хроматического числа сферы // Доклады РАН. 2015. Т. 463, № 6. С. 639–641.

³⁷ Бердников А., Райгородский А. Хроматические числа евклидова пространства с двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2014. Т. 96, вып. 5. С. 790–793.

³⁸ Kupavskii A. On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 6. P. 437–440.

³⁹ Kupavskii A. The chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with a set of forbidden distances // Doklady Math. 2010. Vol. 82, no. 3. P. 963–966.

⁴⁰ Пономаренко Е., Райгородский А. Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2015. Т. 97, № 2. С. 255–261.

⁴¹ Канель-Белов А., Воронов В., Черкашин Д. О хроматическом числе плоскости // Алгебра и анализ. 2017. Т. 29, № 5. С. 68–89.

⁴² Бердников А. Оценка хроматического числа евклидова пространства с несколькими запрещенными расстояниями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 783–787.

⁴³ Berdnikov A. Chromatic number with several forbidden distances in the space with the ℓ_q -metric // Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 227, no. 4. P. 395–401.

⁴⁴ Райгородский А. О хроматическом числе пространства с l_q -нормой // Успехи математических наук. 2004. Т. 59, № 5. С. 161–162.

Однако в «малых» размерностях никакие результаты ранее получены не были.

В то же время исключительно важную роль играет вариант задачи, в рамках которого рассматриваются только раскраски измеримыми по Лебегу цветами (множества $V_1, \dots, V_\chi$ измеримы). В этом случае искомая величина обозначается $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ и называется *измеримым хроматическим числом пространства*. В диссертации рассматриваются как нижние оценки измеримых хроматических чисел пространств «малой» размерности, так и аналогичные оценки в случае растущей размерности.

Ситуация в «малых» размерностях следующая. Очевидно, что $\chi_m(\mathbb{R}^1) = 2$. Фалконер показал⁴⁵, что $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geq 5$. Далее⁴⁶, $\chi_m(\mathbb{R}^3) \geq 7$. Наконец, наилучшие известные автору нижние оценки величины $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ в размерностях $n \in \{4, \dots, 24\}$ принадлежат⁴⁷ Башок, Пассуэлло и Тьерри:

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\chi_m \geq$	10	15	21	37	52	69	90	116	164	254	334
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\chi_m \geq$	413	619	906	1178	1341	2132	3182	4062	4712	5424	—

Отметим, что неизвестно, верно ли, что $\chi(\mathbb{R}^n) \neq \chi_m(\mathbb{R}^n)$. Однако нижние оценки этих величин сильно разнятся. Так, было показано⁴⁷ (ср. с (1)), что

$$(1.268 \dots + o(1))^n \leq \chi_m(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Но, возможно, это лишь временное явление?

Помимо задач о раскрасках в диссертации рассматриваются задачи о разбиениях.

Проблема Борсука — вопрос в комбинаторной геометрии, посвящённый исследованию справедливости следующего утверждения. Дано евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ и произвольное множество диаметра 1 в этом пространстве. Гипотеза такова: *возможно разбить это множество на не более чем $d+1$ подмножеств, каждое из которых будет иметь диаметр менее 1*. Эквивалентно: *любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на не более, чем $d+1$ подмножеств меньшего диаметра*.

Гипотеза, ошибочно называемая гипотезой Борсука (сам Борсук такого утверждения не делал — он лишь задал вопрос!), в действительности неверна. Это было доказано⁴⁸ Каном и Калаи в 1993 году. Интерес, однако, представляет дальнейшее изучение величины $f(d)$ — минимального числа подмножеств меньшего диаметра, на которые можно разбить произвольное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, в зависимости от размерности d . В этих терминах опровергнутое предположение имеет вид

$$f(d) \leq d + 1 \quad \forall d \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Утверждение гипотезы (2) справедливо в некоторых частных случаях, например, при

⁴⁵Falconer K. The realization of distances in measurable subsets covering $\mathbb{R}^n$ // J. Combin. Theory A. 1981. Vol. 31. P. 187–189.

⁴⁶Oliveira Filho F. de, Vallentin F. Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in $\mathbb{R}^n$ // J. Eur. Math. Soc. 2010. Vol. 12. P. 1417–1428.

⁴⁷Bachoc C., Passuello A., Thiery A. The Density of Sets Avoiding Distance 1 in Euclidean Space // Discrete Computational Geometry. 2015. Vol. 53, no. 4. P. 783–808.

⁴⁸Kahn J., Kalai G. A counterexample to Borsuk’s conjecture // Bulletin of the American Mathematical Society. 1993. Vol. 29, no. 1. P. 60–62.

$d = 2$ (это доказал⁴⁹ сам Борсук в 1932 г.), при $d = 3$ (Перкал⁵⁰ в 1947 г.), для выпуклых тел с гладкой границей при всех d (доказано⁵¹ Хадвигером в 1946 г.), для всех центрально-симметричных тел при всех d (доказано⁵² Рислингом в 1971 г.), для всех тел вращения при всех d (доказано⁵³ Декстером в 1995 г.), для множеств, инвариантных под действием группы симметрии d -симплекса (доказано⁵⁴ Роджерсом в 1971 г.)

Однако же в 1993 году Кан и Калаи показали⁴⁸, что $f(1325) > 1326$, что опровергло (2). Далее события развивались следующим образом. В 1994 году Алон (под псевдонимом Нилли) нашёл⁵⁵ контрпример при $d = 946$. В 1997 году Райгородский уточнил⁵⁶ нижнюю грань размерности до 561. Затем в 2000 году Вайсбах понизил⁵⁷ её до 560. Далее, в 2002 году, последовали результаты Хинрикса⁵⁸ для $d = 323$ и Пихурко⁵⁹ для $d = 321$; в 2003 году Хинрикс и Рихтер опубликовали доказательство⁶⁰ следующего уточнения: $f(298) > 298 + 11$. В 2014 г. Бондаренко опроверг⁶¹ гипотезу для $d \geq 65$, и, наконец, в том же году Йенрихом была получена⁶² наилучшая известная на текущий момент нижняя грань, $d = 64$.

Более подробно с историей проблемы можно ознакомиться в работах из библиографии²⁴⁷⁶³⁶⁴.

Число $f(d)$ изучалось не только в «малых» размерностях, но и в асимптотике ($d \rightarrow \infty$). Известны как оценки сверху — например, показано⁶⁵, что

$$f(d) \leq (1.224 \dots + o(1))^d,$$

⁴⁹*Borsuk K.* Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre // *Fundamenta Mathematicae*. 1933. Jg. 20, Nr. 1. S. 177–190.

⁵⁰*Perkal J.* Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètre inférieur // *Colloquium Mathematicum*. 1947. T. 1, n° 1. P. 45.

⁵¹*Hadwiger H.* Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // *Commentarii Mathematici Helvetici*. 1945. Jg. 18, Nr. 1. S. 73–75.

⁵²*Riesling A.* Borsuk's problem in three-dimensional spaces of constant curvature // *Ukr. Geom. Sbornik*. 1971. Vol. 11. P. 78–83.

⁵³*Dekster B.* The Borsuk conjecture holds for bodies of revolution // *Journal of Geometry*. 1995. Vol. 52, no. 1–2. P. 64–73.

⁵⁴*Rogers C.* Symmetrical sets of constant width and their partitions // *Mathematika*. 1971. Vol. 18, no. 1. P. 105–111.

⁵⁵*Nilli A.* On Borsuk's problem // *Contemporary Mathematics*. 1994. Vol. 178. P. 209.

⁵⁶*Райгородский А.* О размерности в проблеме Борсука // *УМН*. 1997. Т. 52, 6(318). С. 181–182.

⁵⁷*Weißbach B.* Sets with large Borsuk number // *Beiträge zur Algebra und Geometrie*. 2000. Jg. 41, Nr. 2. S. 417–423.

⁵⁸*Hinrichs A.* Spherical codes and Borsuk's conjecture // *Discrete Math*. 2002. Vol. 243, no. 1–3. P. 253–256.

⁵⁹*Pikhurko O.* Borsuk's conjecture fails in dimensions 321 and 322. 2002. URL: <https://arxiv.org/abs/math/0202112>.

⁶⁰*Hinrichs A., Richter C.* New sets with large Borsuk numbers // *Discrete Mathematics*. 2003. Vol. 270, no. 1–3. P. 137–147.

⁶¹*Bondarenko A.* On Borsuk's Conjecture for Two-Distance Sets // *Discrete Computational Geometry*. 2014. Vol. 51, no. 3. P. 509–515.

⁶²*Jenrich T., Brouwer A.* A 64-Dimensional Counterexample to Borsuk's Conjecture // *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2014. Vol. 21, no. 4. #P4.29.

⁶³*Райгородский А.* Вокруг гипотезы Борсука // *Современная математика. Фундаментальные направления*. 2007. Т. 23. С. 147–164.

⁶⁴*Raigorodskii A.* Three lectures on the Borsuk partition problem // *London Mathematical Society Lecture Note Series*. 2008. Vol. 347. P. 202–248.

⁶⁵*Schramm O.* Illuminating sets of constant width // *Mathematika*. 1998. Vol. 35, no. 2. P. 180–189.

так и оценки снизу^{48 66}:

$$f(d) \geq (1.203 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad (\text{Кан и Калаи, 1993}),$$

$$f(d) \geq (1.2255 \dots + o(1))^{\sqrt{d}} \quad (\text{Райгородский, 1999}). \quad (3)$$

Интересен следующий факт. Наилучшая известная на текущий момент нижняя оценка (3) числа Борсука $f(d)$ в асимптотике была получена с помощью исследования серии *дистанционных графов* с вершинами на сетке $\{-1, 0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$. С другой стороны, при некоторых «малых» d ($d = 561$)⁵⁶ аналогичный подход даёт лучшие результаты за счёт дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 1\}^n$ (что эквивалентно использованию $\{0, 1\}$ -дистанционных графов). Кроме того, авторы последних работ, посвящённых «малым» размерностям, вовсе оперируют не дистанционными графами: в некоторых статьях^{58 60} для получения результатов использовались решётки, а в других^{61 62} — сильно регулярные графы.

В какой момент с ростом d устанавливается «доминирование» $\{-1, 0, 1\}$ -дистанционных графов над $\{-1, 1\}$ -дистанционными графами? Как влияет добавление третьего возможного типа координат векторов — вершин графов — на оценки при «малых» $d > 561$, то есть какие наилучшие оценки можно получить с использованием $\{-1, 0, 1\}$ -графов, $\{-1, 1\}$ -графов, когда предпочтительны какие из них? В диссертации мы исследуем эти вопросы, используя методы, сходные с методами, применяемыми нами к смежной проблеме комбинаторной геометрии — задаче Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о хроматическом числе пространства.

Цель работы и задачи исследования

Целью настоящей работы является получение нижних оценок измеримых хроматических чисел в двух случаях: для пространств «малых» размерностей и для случая растущей размерности пространства; получение нижних оценок хроматических чисел пространств с евклидовой и манхэттенской метриками; получение нижних оценок чисел Борсука евклидовых пространств; получение верхних оценок чисел независимости некоторых конечных дистанционных графов.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты дают возможность оценивать экстремальные характеристики конечных дистанционных графов и метрических пространств.

Методология и методы исследования

В диссертации используется классический аппарат экстремальной комбинаторики. В том числе, используется линейно-алгебраический метод. Для рассмотрения задачи об измеримых хроматических числах применяются, в том числе, методы оптимизации. Ряд численных результатов диссертации был получен с помощью компьютерных вычислений.

Положения, выносимые на защиту

В диссертации получены новые результаты, которые состоят в следующем:

1. Сформулирован и доказан в общем виде ряд теорем, касающихся применения линейно-алгебраического метода к оцениванию сверху чисел независимости конечных дистанционных графов в пространствах с метриками ℓ_1 и ℓ_2 .

⁶⁶ Райгородский А. Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи математических наук. 1999. Т. 54, № 2. С. 185–186.

2. Для манхэттенской метрики получены нижние оценки хроматических чисел пространств «малой» размерности. Для евклидовой метрики получены новые оценки: $\chi(\mathbb{R}^{22}, \ell_2) \geq 139$, $\chi(\mathbb{R}^{23}, \ell_2) \geq 171$, $\chi(\mathbb{R}^{24}, \ell_2) \geq 209$; устранена неточность в известной оценке при $n = 16$; а также численно определён момент начала доминирования оценок, связанных с $\{-1, 0, 1\}$ -векторами.
3. Сформулирован и доказан в общем виде ряд теорем, касающихся применения линейно-алгебраического метода к оцениванию сверху мощностей множеств с набором запрещённых скалярных произведений.
4. Получены оценки чисел Борсука ряда пространств $\mathbb{R}^n$, следующие из доказанных оценок чисел независимости дистанционных графов специального вида. Численно определён момент, начиная с которого устанавливается «доминирование» $\{-1, 0, 1\}$ -графов над $\{-1, 1\}$ -графами.
5. Указан способ уточнения нижних оценок измеримых хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$, $n = 12, \dots, 24$, путём предъявления верхних оценок чисел независимости серии конечных дистанционных графов.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

- научный семинар «Вероятностные и алгебраические методы в комбинаторике» на кафедре математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ под руководством доктора физико-математических наук А. М. Райгородского (2015 г.);
- научный семинар «Современные проблемы теории чисел» в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук под руководством доктора физико-математических наук, академика РАН С. В. Конягина и доктора физико-математических наук, члена-корреспондента РАН И. Д. Шкредова (2015 г.);
- спецсеминар «Экстремальная комбинаторика и случайные структуры» на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством доктора физико-математических наук Д. А. Шабанова (2015 г.);
- кафедральный семинар кафедры дискретной математики МФТИ (2015–2019 гг., неоднократно);
- аспирантский коллоквиум кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (2018 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах^{67 68 69 70}, указанных в списке литературы

⁶⁷ Боголюбский Л., Райгородский А. Об измеримом хроматическом числе пространства размерности $n \leq 24$ // Доклады РАН. 2015. Т. 7, № 3. С. 5–10.

⁶⁸ Боголюбский Л., Райгородский А. Об измеримом хроматическом числе пространства растущей размерности // Труды МФТИ. 2015. Т. 27, № 3.

⁶⁹ Боголюбский Л., Райгородский А. Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2 // Математические заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 187–213.

⁷⁰ Боголюбский Л., Райгородский А. Об оценках в проблеме Борсука // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 3. С. 20–49.

туры. Все работы представлены в журналах из перечней ВАК, RSCI и РИНЦ, две из них — в журналах из перечня Scopus. Все результаты, приведённые в диссертации, были получены её автором самостоятельно, включая результаты, опубликованные в совместных работах. А. М. Райгородский предложил сюжеты для разработки, оказал автору помощь в составлении обзоров актуальных смежных результатов и в написании введения, а также вносил правки в некоторые доказательства.

Благодарности

Автор глубоко признателен и благодарен своему научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору Андрею Михайловичу Райгородскому за постановку задач, консультации, идеи, неоценимую помощь в работе. Также автор благодарен д.ф.-м.н. Максиму Евгеньевичу Жуковскому за множество важных замечаний и полезных предложений.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 85 ссылок. Общий объём диссертации составляет 93 страницы.

Основное содержание работы

Во введении описаны релевантные теме диссертации результаты, связанные с задачей Нелсона–Эрдёша–Хадвигера и с гипотезой Борсука, сделан обзор предшествующих публикаций, а также описана структура диссертации по главам.

В первой главе обсуждается оценивание хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ снизу для пространств конкретных размерностей с евклидовой и манхэттенской метриками.

Сначала даются следующие необходимые определения.

Граф $G = (V, E)$ *дистанционный*, если при некотором $a > 0$

$$V \subset \mathbb{R}^n, \quad E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = a\}.$$

Независимым множеством в произвольном графе $G = (V, E)$ называется набор вершин из V , никакие две из которых не соединены ребром.

Числом независимости графа G называется максимальная возможная мощность такого множества. Число независимости обозначается $\alpha(G)$.

Хроматическое число графа $G = (V, E)$ — это минимальное возможное количество цветов, в которые так можно покрасить вершины из V , что никакое из рёбер из E не будет соединять вершины одного цвета. Это число обозначается $\chi(G)$.

Хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$ равно по определению наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1. Это число обозначается $\chi(\mathbb{R}^n)$.

В случае, если рассматриваются не произвольные раскраски $\mathbb{R}^n$, а лишь такие, что все цвета (т.е. множества точек, которым был присвоен некоторый избранный цвет) измеримы по Лебегу, искомая величина (наименьшее количество цветов) обозначается $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ и называется *измеримым хроматическим числом пространства*.

Для получения оценок формулируется и доказывается в общем виде ряд результатов, связанных с линейно-алгебраическим методом.

Для метрики ℓ_1 получена следующая

Теорема 1. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что для любого $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ верно $\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in 2\mathbb{Z}$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность

$$\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})/2 \equiv 0 \pmod{p^\alpha} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

причём $n \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} 2^m \binom{n}{m}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} \binom{n}{m}.$$

Сходный результат сформулирован и доказан и для метрики ℓ_2 :

Теорема 2. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что для любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ верно $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r \pmod{p^\alpha}$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, а $r \in \mathbb{N}$ — некоторая константа. Пусть также $r \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{A}} \binom{n}{m_1} \binom{n - m_1}{m_2},$$

где $\mathcal{A} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m_1 + m_2 \leq n, m_1 + 2m_2 \leq p^\alpha - 1\}$.

Более того, в случае, если либо $\Sigma \subset \{0, 1\}^n$, либо $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$, а также для некоторого $F \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ с условием $F < n$ первые F координат каждого из векторов из Σ фиксированы и равны 1,

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} \binom{n-F}{m}.$$

Затем мы доказываем следующие уточнения теорем 1 и 2. Для манхэттенской метрики более сильным аналогом теоремы 1 явилась

Теорема 3. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что во всех векторах Σ содержится ровно r ненулевых координат, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность

$$\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})/2 \equiv 0 \pmod{p^\alpha} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Пусть также $r \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1} 2^{p^\alpha - 1}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Уточнением же теоремы 2 стал следующий результат.

Теорема 4. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что для любого $\mathbf{x} \in \Sigma$ верно $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = r$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv r \pmod{p^\alpha}$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — евклидово скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^n$, а $r \in \mathbb{N}$ — некоторая константа. Пусть также $r \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{(m_1, m_2) \in \mathcal{D}} \binom{n}{m_1} \binom{n - m_1}{m_2},$$

где

$$\mathcal{D} = \{(m_1, m_2) : m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m_1 + 2m_2 \in \{p^\alpha - 1, p^\alpha - 2\}\}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Для метрики $\rho \in \{\ell_1, \ell_2\}$ мы рассматриваем следующие серии дистанционных графов G_1, G_2, G_3 , где

$$G_1(n, k_{-1}, k_0, k_1, \rho, \rho_{crit}) = (U_1(n, k_{-1}, k_0, k_1), E_1(n, k_{-1}, k_0, k_1, \rho, \rho_{crit})), k_1 \neq 0, k_{-1} \neq 0,$$

$$U_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = i\}| = k_i, i \in \{-1, 0, 1\}\};$$

$$G_2(n, r, \rho, \rho_{crit}) = (U_2(n, r), E_2(n, r, \rho, \rho_{crit})),$$

$$U_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = 1\}| + |\{j : x_j = -1\}| = r\};$$

$$G_3(n, k_1, \rho, \rho_{crit}) = (U_3(n, k_1), E_3(n, k_1, \rho, \rho_{crit})),$$

$$U_3 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n : |\{j : x_j = 1\}| = k_1\};$$

$$E_i = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in U_i \times U_i : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_{crit}\}, i = 1, 2, 3.$$

В результате применения теорем 1 и 3 для оценивания сверху чисел независимости дистанционных графов из серий G_1, G_2, G_3 мы получаем следующие численные результаты — нижние оценки хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$ с метрикой ℓ_1 :

Таблица 1: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_1)$, полученные с помощью G_1, G_2, G_3

$n \downarrow$ граф $\rightarrow$	по теореме 1						по теореме 3					
	G_1		G_2		G_3		G_1		G_2		G_3	
	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1
4	3	(2, 2, 1)	4	3	2	3	3	(2, 2, 1)	4	3	2	3
5	5	(2, 3, 1)	8	3	3	4	5	(2, 3, 1)	8	3	4	3
6	7	(2, 4, 1)	13	3	5	4	8	(2, 4, 1)	14	3	5	4
7	10	(2, 5, 1)	19	3	7	5	11	(2, 5, 1)	20	3	7	5
8	14	(2, 6, 1)	27	3	9	6	14	(2, 6, 1)	28	3	10	6
9	18	(2, 7, 1)	36	3	11	7	18	(2, 7, 1)	38	3	12	7
10	22	(2, 8, 1)	46	3	14	8	23	(2, 8, 1)	48	3	15	8
11	28	(3, 7, 2)	61	5	17	9	30	(3, 7, 2)	68	5	19	9
12	38	(3, 8, 2)	88	5	21	10	42	(3, 8, 2)	96	5	22	10
13	51	(3, 9, 2)	122	5	25	11	55	(3, 9, 2)	132	5	26	11
14	67	(3, 10, 2)	164	5	29	12	72	(3, 10, 2)	176	5	31	12
15	86	(3, 11, 2)	214	5	33	13	91	(3, 11, 2)	229	5	37	11
16	114	(4, 10, 3)	294	7	41	12	126	(4, 10, 3)	327	7	46	12
17	156	(4, 11, 3)	414	7	50	13	171	(4, 11, 3)	458	7	56	13
18	209	(4, 12, 3)	568	7	61	14	228	(4, 12, 3)	624	7	68	14
19	274	(4, 13, 3)	762	7	74	15	298	(4, 13, 3)	832	7	82	15
20	354	(4, 14, 3)	1001	7	88	16	387	(5, 12, 4)	1110	9	97	16
21	481	(5, 13, 4)	1403	9	104	17	536	(5, 13, 4)	1572	9	114	17
22	657	(5, 14, 4)	1955	9	122	18	727	(5, 14, 4)	2176	9	139	16
23	880	(5, 15, 4)	2667	9	149	17	969	(5, 15, 4)	2954	9	171	17
24	1160	(5, 16, 4)	3574	9	184	18	1272	(5, 16, 4)	3938	9	209	18

Для каждой размерности были сделаны вычисления для графов трёх типов — G_1, G_2, G_3 . В каждом случае применялась как теорема 1, так и её усиленный вариант — теорема 3, так что таблица состоит из двух частей — «наивной» и «уточнённой». Лучший результат для каждой размерности выделен **жирным** шрифтом — для двух

теорем независимо. Также мы приводим значения параметров дистанционных графов, позволяющие получить наиболее сильный результат.

Отметим, что при всех $n = 4 \dots 24$ самым сильным оказался результат для графов типа G_2 — присутствие минус единиц оказывается выгодным, причём оптимальнее оказывается фиксировать *суммарное* число ненулевых координат в векторах Σ .

Также в результате применения теорем 2 и 4, опять же, к графам G_1, G_2, G_3 мы получаем численные нижние оценки хроматических чисел пространств $\mathbb{R}^n$ с метрикой ℓ_2 :

Таблица 2: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_2)$, полученные с помощью G_1, G_2, G_3

$n \downarrow$ граф $\rightarrow$	по теореме 2						по теореме 4					
	G_1		G_2		G_3		G_1		G_2		G_3	
	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1
4	2	(2, 2, 1)	2	3	2	3	2	(2, 2, 1)	2	3	2	3
5	3	(2, 3, 1)	2	3	3	4	3	(2, 3, 1)	2	4	4	3
6	3	(2, 4, 1)	3	3	5	4	3	(2, 4, 1)	3	3	5	4
7	4	(2, 5, 1)	3	4	7	5	4	(2, 5, 1)	3	4	7	5
8	5	(2, 6, 1)	3	4	9	6	5	(2, 6, 1)	4	3	10	6
9	6	(2, 7, 1)	4	4	11	7	6	(2, 7, 1)	4	4	12	7
10	7	(4, 6, 1)	4	4	14	8	7	(4, 6, 1)	5	4	15	8
11	9	(4, 7, 1)	5	4	17	9	10	(4, 7, 1)	5	6	19	9
12	12	(4, 8, 1)	5	6	21	10	13	(4, 8, 1)	6	6	22	10
13	16	(4, 9, 1)	6	6	25	11	16	(4, 9, 1)	7	6	26	11
14	19	(4, 10, 1)	7	6	29	12	20	(4, 10, 1)	8	6	31	12
15	23	(4, 11, 1)	8	7	33	13	24	(4, 11, 1)	9	7	37	11
16	28	(4, 12, 1)	9	7	41	12	28	(4, 12, 1)	10	7	46	12
17	33	(4, 13, 1)	11	7	50	13	34	(4, 13, 1)	12	7	56	13
18	42	(6, 12, 1)	12	8	61	14	43	(6, 12, 1)	13	8	68	14
19	54	(6, 13, 1)	14	8	74	15	55	(6, 13, 1)	15	8	82	15
20	67	(6, 14, 1)	16	8	88	16	69	(6, 14, 1)	18	8	97	16
21	83	(6, 15, 1)	18	8	104	17	85	(6, 15, 1)	20	8	114	17
22	101	(6, 16, 1)	20	10	122	18	103	(6, 16, 1)	23	10	139	16
23	122	(6, 17, 1)	24	10	149	17	124	(6, 17, 1)	27	10	171	17
24	146	(6, 18, 1)	28	10	184	18	148	(6, 18, 1)	31	10	209	18
25	173	(6, 19, 1)	32	10	223	19	175	(6, 19, 1)	35	10	253	19
26	203	(6, 20, 1)	36	10	269	20	206	(6, 20, 1)	40	12	304	20
27	236	(6, 21, 1)	41	12	322	21	239	(6, 21, 1)	47	12	362	21
28	273	(6, 22, 1)	48	12	382	22	276	(9, 18, 2)	55	12	428	22
29	337	(10, 19, 1)	56	12	450	23	350	(9, 19, 2)	63	12	523	21
30	436	(10, 20, 1)	65	12	553	22	446	(10, 20, 1)	72	12	641	22
31	557	(10, 21, 1)	74	12	677	23	570	(10, 21, 1)	81	12	780	23
32	704	(10, 22, 1)	83	12	822	24	719	(10, 22, 1)	91	15	943	24
33	881	(10, 23, 1)	94	15	991	25	899	(10, 23, 1)	109	15	1131	25
34	1093	(10, 24, 1)	112	15	1186	26	1114	(10, 24, 1)	128	15	1349	26
35	1344	(10, 25, 1)	131	15	1412	27	1370	(10, 25, 1)	149	15	1599	27
36	1641	(10, 26, 1)	152	15	1670	28	1670	(10, 26, 1)	172	15	1884	28
37	1990	(10, 27, 1)	175	15	1965	29	2023	(10, 27, 1)	198	16	2209	29
38	2395	(10, 28, 1)	202	16	2300	30	2434	(10, 28, 1)	229	16	2577	30
39	2866	(10, 29, 1)	234	16	2679	31	2931	(11, 27, 2)	263	16	3135	27
40	3475	(11, 28, 2)	268	16	3289	28	3567	(11, 28, 2)	300	16	3919	28
41	4206	(11, 29, 2)	305	18	4103	29	4313	(11, 29, 2)	349	18	4865	29
42	5155	(12, 30, 1)	357	18	5084	30	5250	(12, 30, 1)	406	18	6000	30
43	6293	(12, 31, 1)	414	18	6259	31	6404	(12, 31, 1)	469	18	7355	31
44	7636	(12, 32, 1)	478	18	7660	32	7765	(12, 32, 1)	538	18	8964	32
45	9213	(12, 33, 1)	547	18	9322	33	9363	(12, 33, 1)	613	18	10865	33

Таблица 2: Оценки $\chi(\mathbb{R}^n, \ell_2)$, полученные с помощью G_1, G_2, G_3

$n \downarrow$ граф $\rightarrow$	по теореме 2						по теореме 4					
	G_1		G_2		G_3		G_1		G_2		G_3	
	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1	$\chi \geq$	(k_{-1}, k_0, k_1)	$\chi \geq$	r	$\chi \geq$	k_1
46	11057	(12, 34, 1)	623	18	11284	34	11230	(12, 34, 1)	694	18	13102	34
47	13505	(15, 31, 2)	705	18	13590	35	13924	(15, 31, 2)	782	18	15722	35
48	17062	(15, 32, 2)	794	18	16288	36	17570	(15, 32, 2)	913	22	18779	36
49	21407	(15, 33, 2)	933	22	19434	37	22021	(15, 33, 2)	1080	22	22535	35
50	26687	(15, 34, 2)	1101	22	23377	36	27424	(15, 34, 2)	1267	22	27542	36
51	33065	(15, 35, 2)	1291	22	28538	37	33946	(15, 35, 2)	1477	22	33497	37
52	40731	(15, 36, 2)	1503	22	34669	38	41778	(15, 36, 2)	1710	22	40549	38
53	49898	(15, 37, 2)	1739	22	41924	39	51137	(15, 37, 2)	1969	22	48867	39
54	60809	(15, 38, 2)	2000	22	50473	40	62267	(15, 38, 2)	2255	22	58641	40
55	73737	(15, 39, 2)	2289	22	60511	41	76133	(16, 37, 3)	2610	24	70083	41
56	90601	(16, 38, 3)	2655	24	72254	42	93531	(16, 38, 3)	3035	24	84511	40
57	110839	(16, 39, 3)	3084	24	87296	41	114308	(16, 39, 3)	3509	24	103062	41
58	134921	(16, 40, 3)	3563	24	106359	42	139008	(16, 40, 3)	4036	24	125147	42
59	163451	(16, 41, 3)	4095	24	129037	43	168248	(16, 41, 3)	4619	24	151340	43
60	197113	(16, 42, 3)	4683	24	155914	44	202720	(16, 42, 3)	5373	26	182296	44
61	236673	(16, 43, 3)	5456	26	187656	45	243202	(16, 43, 3)	6235	26	218756	45
62	288637	(19, 40, 4)	6327	26	225017	46	300723	(19, 40, 4)	7199	26	261555	46
63	361244	(19, 41, 4)	7300	26	268849	47	375921	(19, 41, 4)	8272	26	311640	47
64	449736	(19, 42, 4)	8383	26	320112	48	467474	(19, 42, 4)	9491	28	370073	48
65	557086	(19, 43, 4)	9634	28	379884	49	578426	(19, 43, 4)	11051	28	438045	49
66	686734	(19, 44, 4)	11209	28	449379	50	712295	(19, 44, 4)	12803	28	523111	46
67	842643	(19, 45, 4)	12978	28	538550	47	873132	(19, 45, 4)	14765	28	645541	47
68	1029368	(19, 46, 4)	14957	28	664098	48	1067129	(21, 44, 4)	16951	28	793477	48
69	1286364	(21, 45, 4)	17162	28	815709	49	1336483	(21, 45, 4)	19546	30	971604	49

Здесь картина намного интереснее, чем в случае манхэттенской метрики: для разных размерностей разные идеи оказываются наиболее выгодными. Конечно, уточнение оценки, связанное с наличием минус единиц в координатах вершин графа, проявляется здесь с увеличением размерности, ведь наилучшие асимптотические результаты получены именно с помощью таких графов. Однако очень долгое время оценки, полученные без участия минус единиц, доминируют. Также любопытно то, что если для манхэттенской метрики оптимально фиксировать общее число неотрицательных координат, то для евклидовой полезнее отдельно фиксировать количество координат каждой величины.

Наконец, в завершение первой главы мы делаем замечание о возможности отказа от требования чётности расстояний, формулируя следующие аналоги теорем 1 и 3.

Теорема 5. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ и подсовкупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность $\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$, причём $n \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} 2^m \binom{n}{m}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{m=0}^{p^\alpha-1} \binom{n}{m}.$$

Теорема 6. Пусть p — простое число, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 0, 1\}^n$ такую, что во всех векторах Σ содержится ровно r ненулевых координат, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для некоторого $\alpha \in \mathbb{N}$ и любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ справедлива эквивалентность $\ell_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p^\alpha} \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$, а также пусть $r \geq p^\alpha - 1$. Тогда

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1} 2^{p^\alpha - 1}.$$

Более того, в случае, если $\mathcal{F} \subset \Sigma \subset \{0, 1\}^n$,

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{p^\alpha - 1}.$$

Во второй главе обсуждаются оценки, связанные с проблемой Борсука. Для получения численных результатов мы используем как результаты из предыдущей главы, так и новые утверждения. Формулируется следующая теорема о двух запрещённых скалярных произведениях.

Теорема 7. Пусть p — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ таких, что первые F координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \{r_0 = 0, r_1\} \pmod{p^\alpha},$$

где $r_1 \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$, причём $r_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Тогда справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha - 2} \binom{n - F}{k}.$$

Полученная теорема допускает обобщение на случай ненулевого остатка n по модулю p^α . А именно, справедлива следующая (более общая)

Теорема 8. Пусть p — нечётное простое число, $n \in \mathbb{N}$, $n \equiv -\varepsilon \pmod{p^\alpha}$, где $\alpha \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим произвольную совокупность векторов $\Sigma \subset \{-1, 1\}^n$ таких, что первые F координат любого из них равны 1, где $F \in \mathbb{N}$, $F < n$, и подсовокупность $\mathcal{F} \subset \Sigma$ такую, что для любых различных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из $\mathcal{F}$ верно

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin \{r'_0, r'_1\} \pmod{p^\alpha},$$

где $r'_i = r_i - \varepsilon$, $i = 0, 1$, причём $r_1 \in \{1, \dots, p^\alpha - 1\}$, $r_0 = 0$ и выполнено условие $r_0 \not\equiv r_1 \pmod{p}$. Тогда справедлива оценка

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{k=0}^{p^\alpha - 2} \binom{n - F}{k}.$$

Затем мы получаем численные результаты, применяя теоремы 4, 2 и 8 к сериям конечных дистанционных графов $H_{1,2,3,4,5,6,7,8,9}$, определяемым далее:

$$H_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1) = (V_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1), E_1(n, p^\alpha, k_{-1}, k_0, k_1)),$$

$$V_1 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n : |\{j : x_j = i\}| = k_i, i \in \{-1, 0, 1\},$$

$$k_1 + k_{-1} = p^\alpha, (x_1 = \dots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\},$$

$$H_2(n, p^\alpha) = (V_2(n, p^\alpha), E_2(n, p^\alpha)),$$

$$V_2 = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1\}^n :$$

$$|\{j : x_j = 1\}| + |\{j : x_j = -1\}| = p^\alpha, (x_1 = \dots = x_{l-1} = 0, x_l \neq 0) \implies (x_l = +1)\},$$

$$E_i = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_i \times V_i : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}, i = 1, 2,$$

где n, k_1, k_{-1}, α — натуральные числа, p — нечётное простое число.

Результаты вычислений для серий H_1 и H_2 приводятся в таблице 3. Таблица организована следующим образом: строки соответствуют верхним оценкам размерностей двойственных конфигураций, столбцы — сериям графов. В каждой ячейке таблицы указана наилучшая оценка снизу числа Борсука, которая была получена нами для данной размерности с использованием графов данной серии. В скобках указаны параметры одного из оптимальных в этом смысле графов: в случае H_1 — (k_{-1}, k_0, k_1) , а в случае H_2 — (n, p^α) . Ячейки, в которых конкретный граф не указан, заполнены оценками, следующими из оценок для младших размерностей («сферическая дооценка»). Наконец, лучший результат для каждой строки в каждой из приводимых здесь и далее таблиц мы выделяем **жирным**.

Таблица 3: Оценки, полученные с помощью H_1 и H_2

серия графов $\rightarrow$	H_1		H_2	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	k_{-1}, k_0, k_1	$f \geq$	n, p^α
1127	1128	—	1194	(47, 19)
1175	1176	—	1385	(48, 19)
1224	1225	—	1596	(49, 19)
1274	1275	—	1830	(50, 19)
1325	1326	—	2088	(51, 19)
1377	1378	—	2370	(52, 19)
1430	1431	—	2678	(53, 19)
1484	1485	—	3137	(54, 23)
1539	1540	—	3686	(55, 23)
1595	1596	—	4305	(56, 23)
1652	1653	—	5001	(57, 23)
1710	1711	—	5780	(58, 23)
1769	1770	—	6648	(59, 23)
1829	1830	—	7612	(60, 23)
1890	1891	—	8829	(61, 25)
1952	1953	—	10238	(62, 25)
2015	2016	—	11817	(63, 25)
2079	2189	(12, 39, 13)	13580	(64, 25)
2144	2505	(12, 40, 13)	15562	(65, 27)
2210	2855	(12, 41, 13)	18102	(66, 27)
2277	3249	(13, 40, 14)	20961	(67, 27)
2345	3746	(13, 41, 14)	24167	(68, 27)
2414	4301	(13, 42, 14)	27749	(69, 27)

Таблица 3: Оценки, полученные с помощью H_1 и H_2

серия графов $\rightarrow$	H_1		H_2	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	k_{-1}, k_0, k_1	$f \geq$	n, p^α
2484	4919	(13, 43, 14)	31957	(70, 29)
2555	5605	(13, 44, 14)	37112	(71, 29)
2627	6414	(14, 43, 15)	42917	(72, 29)
2700	7388	(14, 44, 15)	49433	(73, 29)
2774	8477	(14, 45, 15)	56721	(74, 29)
2849	9691	(14, 46, 15)	65602	(75, 31)
2925	11041	(14, 47, 15)	76075	(76, 31)
3002	12696	(15, 46, 16)	87877	(77, 31)
3080	14610	(15, 47, 16)	101133	(78, 31)
3159	16754	(15, 48, 16)	115973	(79, 31)
3239	19147	(15, 49, 16)	132536	(80, 31)
3320	21810	(15, 50, 16)	150968	(81, 31)
3402	24765	(15, 51, 16)	171422	(82, 31)
3485	28035	(15, 52, 16)	194060	(83, 31)
3569	31645	(15, 53, 16)	220638	(84, 37)
3654	35620	(15, 54, 16)	260693	(85, 37)
3740	40513	(18, 49, 19)	306775	(86, 37)
3827	47490	(18, 50, 19)	359603	(87, 37)
3915	55460	(18, 51, 19)	419958	(88, 37)
4004	64536	(18, 52, 19)	488683	(89, 37)
4094	74838	(18, 53, 19)	566693	(90, 37)
4185	86497	(18, 54, 19)	654974	(91, 37)
4277	99651	(18, 55, 19)	754583	(92, 37)
4370	114452	(18, 56, 19)	866658	(93, 37)
4464	131060	(18, 57, 19)	992417	(94, 37)
4559	149646	(18, 58, 19)	1133159	(95, 37)
4655	170395	(18, 59, 19)	1304158	(96, 41)
4752	193500	(18, 60, 19)	1523731	(97, 41)
4850	222461	(20, 57, 21)	1774425	(98, 41)
4949	258240	(20, 58, 21)	2059811	(99, 41)

В таблице 4 приводятся результаты вычислений для серий H_3 , H_4 и H_5 , где

$$V_{3,4}(n) = \{(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$H_3(n) = (V_3(n), E_3(n)), n = 4p^\alpha, E_3(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_3 \times V_3 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\},$$

$$H_4(n) = (V_4(n), E_4(n)), n = 4p^\alpha - 1, E_4(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_4 \times V_4 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1\},$$

$$V_5(n) = \{(\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = x_2 = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$H_5(n) = (V_5(n), E_5(n)), n = 4p^\alpha + 1, E_5(n) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_5 \times V_5 : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\},$$

n, α — натуральные числа, p — нечётное простое число.

Таблица 4: Оценки, полученные с помощью H_3 , H_4 и H_5

серия графов $\rightarrow$	H_3		H_4		H_5	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	n	$f \geq$	n	$f \geq$	n
903	904	—	1064	43	904	—
946	1650	44	1107	—	947	—
990	1694	—	1151	—	1650	45
1275	1979	—	3270	51	1935	—
1326	5050	52	3321	—	1986	—
1378	5102	—	3373	—	5050	53
2211	5935	—	30046	67	5883	—
2278	46106	68	30113	—	5950	—
2346	46174	—	30181	—	46106	69
2775	46603	—	90163	75	46535	—
2850	138043	76	90238	—	46610	—
2926	138119	—	90314	—	138043	77
4095	139288	—	800476	91	139212	—
4186	1221419	92	800567	—	139303	—
4278	1221511	—	800659	—	1221419	93
4851	1222084	—	2371962	99	1221992	—
4950	3614581	100	2372061	—	1222091	—
5050	3614681	—	2372161	—	3614581	101
5671	3615302	—	7007884	107	3615202	—
5778	10667226	108	7007991	—	3615309	—
5886	10667334	—	7008099	—	10667226	109
6555	10668003	—	20652058	115	10667895	—
6670	31405567	116	20652173	—	10668010	—
6786	31405683	—	20652289	—	31405567	117
7503	31406400	—	60726721	123	31406284	—
7626	92268675	124	60726844	—	31406407	—
7750	92268799	—	60726968	—	92268675	125
10731	92271780	—	1527357444	147	92271656	—
10878	2316010201	148	1527357591	—	92271803	—
11026	2316010349	—	1527357739	—	2316010201	149
13203	2316012526	—	13017530454	163	2316012378	—
13366	19718933577	164	13017530617	—	2316012541	—
13530	19718933741	—	13017530781	—	19718933577	165
14535	19718934746	—	37937097426	171	19718934582	—
14706	57441611729	172	37937097597	—	19718934753	—
14878	57441611901	—	37937097769	—	57441611729	173
17391	57441614414	—	321245170447	187	57441614242	—
17578	486029170427	188	321245170634	—	57441614429	—
17766	486029170615	—	321245170822	—	486029170427	189
18915	486029171764	—	933565445712	195	486029171576	—
19110	1411959372838	196	933565445907	—	486029171771	—
19306	1411959373034	—	933565446103	—	1411959372838	197

В таблице 5 приводятся результаты вычислений для серий дистанционных графов H_6 , H_7 , H_8 и H_9 , где

$$H_6(n, r'_1, r'_2, F) = (V_6(n, F), E_6(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha, r'_1 = 0, r'_2 = 4, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 4, r'_1 = 4, r'_2 = 8;$$

$$H_7(n, r'_1, r'_2, F) = (V_7(n, F), E_7(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha - 1, r'_1 = -1, r'_2 = 3, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 3, r'_1 = 3, r'_2 = 7;$$

$$H_8(n, r'_1, r'_2, F) = (V_8(n, F), E_8(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha - 2, r'_1 = -2, r'_2 = 2, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 2, r'_1 = 2, r'_2 = 6;$$

$$H_9(n, r'_1, r'_2, F) = (V_9(n, F), E_9(n, r'_1, r'_2, F)), \quad n = 4p^\alpha + 1, r'_1 = 1, r'_2 = 5, \text{ либо} \\ n = 4p^\alpha + 5, r'_1 = 5, r'_2 = 9;$$

$$V_{6,7,8,9}(n, F) = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, x_1 = \dots = x_F = 1, |\{i : x_i = 1\}| \equiv 0 \pmod{2}\},$$

$$E_{6,7,8,9}(n, r'_1, r'_2, F) = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in V_{6,7,8,9} \times V_{6,7,8,9} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{r'_1, r'_2\}\},$$

где n, α, F — натуральные числа, p — нечётное простое число, $F \leq n - 1$.

Таблица 5: Оценки, полученные с помощью H_6 , H_7 , H_8 и H_9

серия $\rightarrow$	H_6		H_7		H_8		H_9	
dim $\downarrow$	$f \geq$	n, I, J, F	$f \geq$	n, I, J, F	$f \geq$	n, I, J, F	$f \geq$	n, I, J, F
561	759	(36, 2, 4, 3)	759	(35, 1, 3, 2)	759	(34, 1, 1, 1)	759	(37, 3, 5, 4)
820	1472	(44, 1, 5, 4)	1472	(43, 1, 3, 3)	1018	—	1472	(45, 2, 6, 5)
861	2321	(44, 2, 4, 3)	2321	(43, 1, 3, 2)	2321	(42, 1, 1, 1)	2321	(45, 3, 5, 4)
1128	2891	(52, 1, 5, 5)	2891	(55, 4, 8, 8)	2588	—	2891	(53, 2, 6, 6)
1176	4500	(52, 1, 5, 4)	4500	(51, 1, 3, 3)	2636	—	4500	(53, 2, 6, 5)
1225	7044	(52, 2, 4, 3)	7044	(51, 1, 3, 2)	7044	(50, 1, 1, 1)	7044	(53, 3, 5, 4)
2016	26592	(68, 1, 5, 5)	26592	(71, 4, 8, 8)	7835	—	26592	(69, 2, 6, 6)
2080	41044	(68, 1, 5, 4)	41044	(67, 1, 3, 3)	7899	—	41044	(69, 2, 6, 5)
2145	63626	(68, 2, 4, 3)	63626	(67, 1, 3, 2)	63626	(66, 1, 1, 1)	63626	(69, 3, 5, 4)
2556	79829	(76, 1, 5, 5)	79829	(79, 4, 8, 8)	64037	—	79829	(77, 2, 6, 6)
2628	122850	(76, 1, 5, 4)	122850	(75, 1, 3, 3)	64109	—	122850	(77, 2, 6, 5)
2701	189802	(76, 2, 4, 3)	189802	(75, 1, 3, 2)	189802	(74, 1, 1, 1)	189802	(77, 3, 5, 4)
3828	709181	(92, 1, 5, 5)	709181	(95, 4, 8, 8)	190929	—	709181	(93, 2, 6, 6)
3916	1086594	(92, 1, 5, 4)	1086594	(91, 1, 3, 3)	191017	—	1086594	(93, 2, 6, 5)
4005	1670378	(92, 2, 4, 3)	1670378	(91, 1, 3, 2)	1670378	(90, 1, 1, 1)	1670378	(93, 3, 5, 4)
4560	2101953	(100, 1, 5, 5)	2101953	(103, 4, 8, 8)	1670933	—	2101953	(101, 2, 6, 6)
4656	3215194	(100, 1, 5, 4)	3215194	(99, 1, 3, 3)	1671029	—	3215194	(101, 2, 6, 5)
4753	4933134	(100, 2, 4, 3)	4933134	(99, 1, 3, 2)	4933134	(98, 1, 1, 1)	4933134	(101, 3, 5, 4)
5356	6211462	(108, 1, 5, 5)	6211462	(111, 4, 8, 8)	4933737	—	6211462	(109, 2, 6, 6)
5460	9487651	(108, 1, 5, 4)	9487651	(107, 1, 3, 3)	4933841	—	9487651	(109, 2, 6, 5)
5565	14533276	(108, 2, 4, 3)	14533276	(107, 1, 3, 2)	14533276	(106, 1, 1, 1)	14533276	(109, 3, 5, 4)
6216	18308386	(116, 1, 5, 5)	18308386	(119, 4, 8, 8)	14533927	—	18308386	(117, 2, 6, 6)
6328	27930587	(116, 1, 5, 4)	27930587	(115, 1, 3, 3)	14534039	—	27930587	(117, 2, 6, 5)
6441	42723846	(116, 2, 4, 3)	42723846	(115, 1, 3, 2)	42723846	(114, 1, 1, 1)	42723846	(117, 3, 5, 4)

В таблицу 6 для наглядности собраны оценки чисел Борсука пространств «малой» размерности, полученные с помощью «самых сильных» серий графов.

Таблица 6: Сравнение оценок чисел Борсука пространств «малых» размерностей

серия графов $\rightarrow$	H_2		H_3		H_4		H_6	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	n, p^α	$f \geq$	n	$f \geq$	n	$f \geq$	n, I, J, F
561	562	–	562	–	562	–	759	(36, 2, 4, 3)
820	821	–	821	–	821	–	1472	(44, 1, 5, 4)
861	862	–	862	–	862	–	2321	(44, 2, 4, 3)
1128	1195	–	1832	–	1289	–	2891	(52, 1, 5, 5)
1176	1386	–	1880	–	1337	–	4500	(52, 1, 5, 4)
1225	1597	–	1929	–	1386	–	7044	(52, 2, 4, 3)
1890	8829	(61, 25)	5614	–	3885	–	7709	–
1952	10238	(62, 25)	5676	–	3947	–	7771	–
2015	11817	(63, 25)	5739	–	4010	–	7834	–
2016	11818	–	5740	–	4011	–	26592	(68, 1, 5, 5)
2080	13581	–	5804	–	4075	–	41044	(68, 1, 5, 4)
2145	15563	–	5869	–	4140	–	63626	(68, 2, 4, 3)
2556	37113	–	46384	–	30391	–	79829	(76, 1, 5, 5)
2628	42918	–	46456	–	30463	–	122850	(76, 1, 5, 4)
2701	49434	–	46529	–	30536	–	189802	(76, 2, 4, 3)
3485	194060	(83, 31)	138678	–	90873	–	190586	–
3569	220638	(84, 37)	138762	–	90957	–	190670	–
3654	260693	(85, 37)	138847	–	91042	–	190755	–
3740	306775	(86, 37)	138933	–	91128	–	190841	–
3827	359603	(87, 37)	139020	–	91215	–	190928	–
3828	359604	–	139021	–	91216	–	709181	(92, 1, 5, 5)
3916	419959	–	139109	–	91304	–	1086594	(92, 1, 5, 4)
4005	488684	–	139198	–	91393	–	1670378	(92, 2, 4, 3)
4560	1133160	–	1221793	–	800941	–	2101953	(100, 1, 5, 5)
4656	1304159	–	1221889	–	801037	–	3215194	(100, 1, 5, 4)
4753	1523732	–	1221986	–	801134	–	4933134	(100, 2, 4, 3)
5356	3645551	–	3614987	–	2372467	–	6211462	(108, 1, 5, 5)
5460	4227501	–	3615091	–	2372571	–	9487651	(108, 1, 5, 4)
5565	4888126	–	3615196	–	2372676	–	14533276	(108, 2, 4, 3)
6216	11381100	–	10667664	–	7008429	–	18308386	(116, 1, 5, 5)
6328	13246846	–	10667776	–	7008541	–	27930587	(116, 1, 5, 4)
6441	15375505	–	10667889	–	7008654	–	42723846	(116, 2, 4, 3)
7140	36510771	–	31406037	–	20652643	–	53843925	(124, 1, 5, 5)
7260	42124522	–	31406157	–	20652763	–	82054071	(124, 1, 5, 4)
7381	48483212	–	31406278	–	20652884	–	125358495	(124, 2, 4, 3)
8255	132973944	(128, 53)	92269304	–	60727473	–	125359369	–
8384	153592119	(129, 53)	92269433	–	60727602	–	125359498	–
8514	177000680	(130, 53)	92269563	–	60727732	–	125359628	–
8645	203521513	(131, 53)	92269694	–	60727863	–	125359759	–
8777	233507010	(132, 53)	92269826	–	60727995	–	125359891	–
8910	267342303	(133, 53)	92269959	–	60728128	–	125360024	–
9044	305447594	(134, 53)	92270093	–	60728262	–	125360158	–
9179	348280600	(135, 53)	92270228	–	60728397	–	125360293	–
9315	398529295	(136, 59)	92270364	–	60728533	–	125360429	–
9452	466820352	(137, 59)	92270501	–	60728670	–	125360566	–
9590	545493701	(138, 59)	92270639	–	60728808	–	125360704	–
9729	635925506	(139, 59)	92270778	–	60728947	–	125360843	–
9869	739647011	(140, 59)	92270918	–	60729087	–	125360983	–
10010	858358804	(141, 59)	92271059	–	60729228	–	125361124	–
10152	993946100	(142, 59)	92271201	–	60729370	–	125361266	–
10295	1148495045	(143, 59)	92271344	–	60729513	–	125361409	–
10296	1148495046	–	92271345	–	60729514	–	1354767865	(148, 1, 5, 5)
10440	1324310123	–	92271489	–	60729658	–	2059341163	(148, 1, 5, 4)
10585	1523932677	–	92271634	–	60729803	–	3137001950	(148, 2, 4, 3)
11475	3585535973	(151, 61)	2316010798	–	1527358188	–	3137002840	–
11627	4108658537	(152, 61)	2316010950	–	1527358340	–	3137002992	–
11780	4699472449	(153, 61)	2316011103	–	1527358493	–	3137003145	–
11934	5365604653	(154, 61)	2316011257	–	1527358647	–	3137003299	–
12089	6159942008	(155, 67)	2316011412	–	1527358802	–	3137003454	–
12245	7201786262	(156, 67)	2316011568	–	1527358958	–	3137003610	–
12402	8402150920	(157, 67)	2316011725	–	1527359115	–	3137003767	–
12560	9782444352	(158, 67)	2316011883	–	1527359273	–	3137003925	–
12719	11366594042	(159, 67)	2316012042	–	1527359432	–	3137004084	–
12720	11366594043	–	2316012043	–	1527359433	–	11548841982	(164, 1, 5, 5)

Таблица 6: Сравнение оценок чисел Борсука пространств «малых» размерностей

серия графов $\rightarrow$	H_2		H_3		H_4		H_6	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	n, p^α	$f \geq$	n	$f \geq$	n	$f \geq$	n, I, J, F
12879	13181297915	(160, 67)	2316012202	–	1527359592	–	11548842141	–
12880	13181297916	–	2316012203	–	1527359593	–	17532574162	(164, 1, 5, 4)
13041	15256295978	–	2316012364	–	1527359754	–	26667999195	(164, 2, 4, 3)
13694	26877571975	(165, 67)	19718933905	–	13017530945	–	26667999848	–
13860	30828453073	(166, 67)	19718934071	–	13017531111	–	26668000014	–

Также мы произвели расчёты для случая растущей размерности. Численный эксперимент показывает, что с ростом d начинают поочерёдно доминировать две серии графов — H_2 ($\{-1, 0, 1\}$ -графы с одним «запретом») и H_6 ($\{-1, 1\}$ -графы с двумя «запретами»). В таблицу 7 мы включаем лишь те достаточно большие размерности, при переходе через которые можно наблюдать смену доминирующей серии, а также размерности, большие предполагаемой «пороговой» — как можно видеть из проведённых расчётов, начиная с $d = 22154$ устанавливается ожидаемое⁶⁶ доминирование $\{-1, 0, 1\}$ -графов с ограничением на количество ненулевых координат.

Таблица 7: Сравнение оценок чисел Борсука пространств при росте размерностей

серия графов $\rightarrow$	H_2		H_6	
размерность $\downarrow$	$f \geq$	n, p^α	$f \geq$	n, I, J, F
14027	35575214838	(167, 71)	26668000181	–
14196	41357928108	–	51071503180	(172, 1, 5, 4)
15050	85452235646	(173, 71)	77633048377	–
17019	403613843210	(184, 79)	285068165140	–
17020	403613843211	–	432113274440	(188, 1, 5, 4)
17204	470465660729	(185, 79)	432113274624	–
17205	470465660730	–	656117737023	(188, 2, 4, 3)
17765	737438558303	(188, 79)	656117737583	–
18720	1514737229760	(193, 81)	1255308792435	–
18721	1514737229761	–	1905118736125	(196, 2, 4, 3)
19109	2025160588555	(195, 81)	1905118736513	–
21944	14903109993823	(209, 89)	10570185288769	–
21945	14903109993824	–	16027885419443	(212, 2, 4, 3)
22154	17317326505560	(210, 89)	16027885419652	–
28440	969776983719827	(238, 101)	389313830989796	–
28679	1125124376330066	(239, 101)	389313830990035	–
28919	1303646677247047	(240, 101)	491862065149951	–
29160	1508544540124909	(241, 101)	743799486168000	–
29402	1743424867403224	(242, 101)	1126265437348848	–
29645	2012347763025557	(243, 101)	1126265437349091	–
29889	2319878366958466	(244, 101)	1126265437349335	–

В третьей главе указан способ улучшения нижних оценок измеримых хроматических чисел некоторых евклидовых пространств «малых» размерностей, а также изучена ситуация с нижними оценками измеримых хроматических чисел евклидова пространства растущей размерности.

Известны⁴⁷ следующие нижние оценки измеримых хроматических чисел

пространств $\mathbb{R}^n$:

Таблица 8: Наилучшие известные автору нижние оценки $\chi_m(\mathbb{R}^n)$

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\chi_m \geq$	10	15	21	37	52	69	90	116	164	254	334
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\chi_m \geq$	413	619	906	1178	1341	2132	3182	4062	4712	5424	—

Нами рассматривается серия дистанционных графов $G_{2k} = (V_{2k}, E_{2k})$ следующего вида:

$$V_{2k} = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k}) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, x_1^2 + \dots + x_{2k}^2 = k \},$$

$$E_{2k} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_{2k} \times V_{2k} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \}.$$

В диссертации получен следующий результат, представленный таблицей 9.

Таблица 9: Возможные уточнения $\chi_m(\mathbb{R}^n)$ в «малых» размерностях

n	$\chi_m \geq \dots$	$\chi_m \geq \dots$,	если $\alpha(G_{2k}) = \dots$	оценка уточняется, если $\alpha(G_{2k}) \leq \dots$
12	164	253	1428	$2.39 \cdot 10^3$
14	334	507	8192	$1.33 \cdot 10^4$
16	619	1403	29700	$8.039 \cdot 10^4$
18	1178	3169	134420	$4.57 \cdot 10^5$
20	2132	6812	635206	$2.71 \cdot 10^6$
22	4062	14493	2983344	$1.498 \cdot 10^7$
24	5424	30566	13929188	$1.21 \cdot 10^8$

Здесь в первой колонке таблицы приведена размерность пространства, во второй — наилучшая известная автору оценка χ_m снизу, в третьей — оценка χ_m , которая будет автоматически доказана в случае, если истинное значение $\alpha(G_{2k})$ совпадёт со своей нижней оценкой, указанной в третьей колонке; в четвёртой колонке приведена более слабая верхняя оценка числа независимости $\alpha(G_{2k})$, доказательство которой повлечёт уточнение нижней оценки $\chi_m(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение таблицы 9 представляет интерес, так как есть основания полагать, что известные верхние оценки $\alpha(G_{2k})$ гораздо дальше от истины, нежели нижние. Предложенные здесь нижние оценки χ_m были получены с использованием той же техники из работы⁴⁷ Башок, Пассуэлло и Тьерри, что приводит к оценкам из таблицы 8.

Что же касается случая растущей размерности, результаты третьей главы здесь состоят в следующем.

Рассмотрена следующая серия дистанционных графов: пусть $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ — граф, вершины которого — это всевозможные $(-1, 0, 1)$ -векторы в $\mathbb{R}^n$, имеющие по k_{-1} , k_0 и k_1 отрицательных, нулевых и положительных координат соответственно, а рёбра — пары вершин, отстоящих друг от друга на расстояние t .

Известно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$, причём эта оценка была получена⁷¹ с помощью оценивания сверху чисел независимости указанных графов.

Также имеет место тривиальный факт $\chi_m(\mathbb{R}^n) \geq \chi(\mathbb{R}^n)$.

С другой стороны, была установлена⁴⁷ справедливость *нетривиальной* асимптотической оценки измеримого хроматического числа:

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geq (1.268 \dots + o(1))^n. \quad (4)$$

В доказательстве данной оценки также использовались графы $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ — с их помощью было предъявлено решение определённой задачи оптимизации. Нижние оценки измеримых хроматических чисел здесь получаются тем точнее, чем точнее соответствующие верхние оценки чисел независимости графов $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$.

Ключевую роль в третьей главе играет гипотеза о *строгих d-частных конструкциях*, сформулированная и мотивированная в работе⁷² Райгородского и Харламовой.

Определение 1. Пусть даны положительные целые числа $l_1, \dots, l_d$, сумма которых равна n , и тройки чисел $l_{i,-1}, l_{i,0}, l_{i,1}$ с суммой l_i , $i = 1, \dots, d$. Совокупность $\mathcal{F}$, состоящая из $(-1, 0, 1)$ -векторов, является *строгой d-частной конструкцией*, если существует такое разбиение множества всех координатных позиций на части размеров $l_1, \dots, l_d$, что каждый из векторов совокупности $\mathcal{F}$ имеет ровно $l_{i,\nu}$ координат величины $\nu = -1, 0, 1$ в части с номером i , $i = 1, \dots, d$.

Гипотеза 1. Пусть последовательность графов $G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ подчиняется условию

$$\begin{aligned} k_{-1} \sim k'_{-1}n, \quad k_1 \sim k'_1n, \quad s \sim s'n, \quad 0 < k'_{-1} \leq k'_1, \quad k'_{-1} + k'_1 \leq \frac{1}{2}, \\ s' \in \left[-2k'_{-1}, \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где t — расстояние, отвечающее скалярному произведению s . Тогда

$$\alpha(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n, \quad c(k'_{-1}, k'_1, s') > 1,$$

причём существует такая *d-частная конструкция* $\mathcal{F}$, что в ней всегда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > s$ и

$$|\mathcal{F}| = (c(k'_{-1}, k'_1, s') + o(1))^n.$$

В той же работе доказано, что если гипотеза 1 верна, то $d \leq 3$. Это позволяет проводить оптимизацию как при отыскании нижней оценки обычного хроматического числа, так и при отыскании аналогичной оценки измеримого хроматического числа. В первом случае оптимизация проведена, опять же, в работе Райгородского и Харламовой, и там показано, что при

$$k'_{-1} = 0.145 \dots, \quad k'_1 = 0.355 \dots, \quad s' = \frac{k'_1 - k'_{-1}}{2}$$

выполнено

$$\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)) \geq (1.30 \dots + o(1))^n.$$

⁷¹ Райгородский А. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2015.

⁷² Райгородский А., Харламова А. О совокупностях $(-1, 0, 1)$ -векторов с запретами на величины парных скалярных произведений // Труды по векторному и тензорному анализу. 2013. Т. 29. С. 130—146.

Нам удалось провести оптимизацию во втором случае. А именно, мы взяли значение числа независимости, вычисляемое за счёт гипотезы 1 и теоремы о том, что в этой гипотезе достаточно брать $d \leq 3$. Это значение мы подставили в ту же задачу оптимизации, решение которой приводит к оценке (4). В итоге нами был установлен следующий факт.

Утверждение 1. *Если верна гипотеза 1 и мы применяем упомянутую технику оптимизации, то*

$$\chi_m(\mathbb{R}^n) \geq (1.28 \dots + o(1))^n.$$

Здесь константа $1.28 \dots$ получена при

$$k'_{-1} = 0.25 \dots, \quad k'_1 = 0.25 \dots, \quad s' = -0.05585 \dots$$

Иными словами, получается, что тривиальная оценка $\chi_m \geq \chi$ окажется сильнее нетривиальной оценки, полученной путём решения задачи оптимизации, коль скоро верна гипотеза 1. Мы предполагаем, что это связано не с тем, что на самом деле гипотеза ошибочна, а с тем, что, по-видимому, предложенный Башок, Пассуэлло и Тьерри «метод оптимизации» подлежит усилению.

В **заключении** перечисляются полученные в диссертации основные результаты, а также обсуждаются открытые вопросы, связанные с темой диссертации.

Работы автора по теме диссертации

- Боголюбский Л., Райгородский А. Об измеримом хроматическом числе пространства размерности $n \leq 24$ // Доклады РАН. 2015. Т. 7, № 3. С. 5—10.
- Боголюбский Л., Райгородский А. Об измеримом хроматическом числе пространства растущей размерности // Труды МФТИ. 2015. Т. 27, № 3.
- Боголюбский Л., Райгородский А. Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2 // Математические заметки. 2019. Т. 105, № 2. С. 187—213.
- Боголюбский Л., Райгородский А. Об оценках в проблеме Борсука // Труды МФТИ. 2019. Т. 11, № 3. С. 20—49.