Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

На правах рукописи

Зеленов

Зеленов Георгий Ильич

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРАМИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

24 ОКТ 2018

008716781

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель: **Богачев Владимир Игоревич**
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Смородина Наталия Васильевна**
доктор физико-математических наук,
профессор, старший научный сотрудник
лаб. статистических методов
Санкт-Петербургского отделения
Математического института
имени В.А.Стеклова РАН

Колесников Александр Викторович
доктор физико-математических наук,
профессор факультета математики
НИУ ВШЭ

Васильева Анастасия Андреевна
доктор физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры
общих проблем управления
механико-математического факультета
МГУ имени М.В.Ломоносова

Защита диссертации состоится «23» ноября 2018 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета МГУ.01.07 Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, ГСП-1, Москва, Ленинский горы, д. 1, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.
E-mail: mexmat_disser85@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В.Ломоносова (г. Москва, Ломоносовский пр-т, д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:
https://istina.msu.ru/dissertations/142967960/
Автореферат разослан «22» октября 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.07,
доктор физико-математических наук
профессор

Власов
Виктор Валентинович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика диссертации находится на стыке теории меры, функционального анализа и теории вероятностей. Главными объектами исследования в работе выступают образы счетно-аддитивной меры, заданной на сигма-алгебре борелевских множеств некоторого локально выпуклого пространства. Хотя основные результаты работы относятся к теории меры, во многих задачах оказывается удобно использовать терминологию теории вероятностей. Работа может быть условно разделена на три части, которые соответствуют главам со второй по четвертую (первая глава является вспомогательной). Между тремя частями работы наличествуют и идейные, и технические связи.

Во второй главе рассматриваются свойства образов гауссовской меры под действием измеримых многочленов или измеримых полиномиальных отображений. У этого объекта есть простая теоретико-вероятностная интерпретация: это распределение случайной величины (или случайного вектора), заданной (измеримым) многочленом от нескольких независимых стандартных гауссовских случайных величин. Измеримые многочлены подробно описаны в §5.10 книги[1]). Важно отметить, что к измеримым многочленам по гауссовской мере относятся не только обычные многочлены от нескольких переменных, но и более сложные объекты: например, кратные стохастические интегралы Ито могут быть представлены как измеримые многочлены на пространстве с мерой Винера (см. §1.1.2 книги[2] или §1.1.2 книги[1]).

Нас интересует гладкость плотностей распределения измеримых многочленов в смысле (дробных) классов Соболева. Легко построить пример, когда плотность распределения многочлена от нормальной случайной величины не принадлежит соболевскому классу с целым показателем: достаточно рассмотреть χ^2-квадрат распределение с одной степенью свободы. Его плотность распределения неограничена и поэтому не только не лежит в соболевском классе, но даже не имеет ограниченной вариации.

Поэтому во второй главе изучается принадлежность распределений измеримых многочленов к классам Никольского–Бесова. Точнее говоря, мы исследуем принадлежность плотностей распределений многочленов к дробным классам Соболева, открытым Никольским и Бесовым. Существует обширная литература по этим классам функций. В частности, эти

---

[1]Bogachev V.I., Gaussian measures. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998. – 449 p.

[2]Nualart D. The Malliavin calculus and related topics. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2006. – xiv + 382 p.

классы описаны в книгах Никольского[3], Бесова, Ильина, Никольского[4], Адамса и Фурнье[5] и Стейна[6].

Стоит заметить, что вопрос дробной гладкости распределений многочленов долгое время был обделен вниманием исследователей. Было известно, что плотности распределения полунепрерывны снизу, но этот результат имеет место для общего случая невырожденных маллявеновских функций, как показано в работе Балли и Карамеллино[7].

В третьей главе обсуждается оценка сверху для расстояния по вариации между распределениями двух многочленов. Для оценивания расстояния по вариации между распределениями многочленов полезны оценки следующего вида:

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1}) \leqslant C \| f^{-1}, \gamma \circ g^{-1} \|_{L^p \gamma}^{\theta}. \tag{1}$$

где f, g — γ-измеримые многочлены степени d, а число C может зависеть от d и некоторых числовых характеристик f и g.

Оценку такого вида для измеримых полиномов f и g степени d с $\theta = 1/d$ можно найти в работах Давыдова[8] и Давыдова и Мартыновой[9]. Однако в этих работах нет полного доказательства. Полное доказательство можно найти в кандидатской диссертации Мартыновой[10]. Более того, доказательства из работ[8] и[9] опираются на теорему I.3 из[10]. Также полное доказательство подобной оценки с $\theta = 1/2d$ можно найти в работе Нурдина и Поли[11]. Упомянутые авторы знали о работе[8], однако не имели доступа к диссертации Мартыновой и поэтому написали альтернативное доказательство более слабой оценки вида (1).

В теореме 3.1 из работы[11] Нурдин и Поли доказали следующий факт: если $\{f_n\}$ — последовательность многочленов степени d на пространстве с гауссовской мерой γ, причем последовательность их распределе-

[3]Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения М.: Наука, 1969. – 480 с.

[4]Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Т.1, 2, 2-е изд. Москва: Наука, 1996. – 480 с.

[5]Adams R.A., Fournier J.J. Sobolev spaces. – New York: Academic Press, 2003. – xiii + 305 p.

[6]Стейн И., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Наука, 1973. – 332 с.

[7]Bally V., Caramellino L. On the distances between probability density functions // Electron. J. Probab. – 2014. – Vol. 19. – №110. – P. 1–33.

[8]Davydov Y.A. On distance in total variation between image measures // Statistics & Probability Letters. – 2017. – Vol. 129. – P. 393–400.

[9]Давыдов Ю.А., Мартынова Г.В., Предельное поведение распределений кратных стохастических интегралов // Статистика и управление случайными процессами, Сборник статей, Москва: Наука, 1989. – С. 55–57.

[10]Мартынова Г.В. Предельные теоремы для функционалов от случайных процессов. Диссертация кандидата физико-математических наук. – 01.01.05 / ЛГУ. Ленинград, 1987.

[11]Nourdin I., Poly G. Convergence in total variation on Wiener chaos // Stochastic Process. Appl. – 2013. – Vol. 123. – №2. – P. 651–674.

ний $\gamma \circ f_n^{-1}$ слабо сходится к абсолютно непрерывной мере, то найдется такое число C, что

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f_n^{-1}, \gamma \circ f_m^{-1}) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(\gamma \circ f_n^{-1}, \gamma \circ f_m^{-1})^{\theta}, \quad \theta = \frac{1}{2d+1},$$

где d_{KR} — расстояние по Канторовичу–Рубинштейну, которое между борелевскими вероятностными мерами μ и ν на $\mathbb{R}^k$ задается формулой

$$d_{\mathrm{KR}}(\mu, \nu) := \sup\left\{ \int \varphi \, d(\mu - \nu), \ \varphi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^k), \ \|\varphi\|_{\infty} \leqslant 1, \ \|\nabla \varphi\|_{\infty} \leqslant 1 \right\}.$$

В диссертации символом d_{FM}, который использовался в[11] для обозначения d_{KR}, обозначается метрика из оригинальной работы Форте и Мурье[12].

Из доказательства данного результата из [11] можно извлечь следующий факт: для любых двух γ-измеримых полиномов f, g степени d с дисперсиями σ_f, σ_g, лежащими в интервале (a, b) с $a > 0$, существует такое число $C = C(a, b, d)$, зависящее только от a, b, d, что

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1}) \leqslant C d_{\mathrm{KR}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1})^{\frac{1}{2d+1}}. \tag{2}$$

Позже в работе[13] Нурдин, Нуаларт и Поли получили похожую оценку для k-мерных случайных векторов f и g, составленных из многочленов. При этом обе оценки одинаковы для многочленов от любого числа переменных, что и позволяет перейти к измеримым многочленам по мере (которые, в некотором смысле, являются бесконечномерным аналогом обычных многочленов).

Связь между оценками вида (2) и возможностью вывести сходимость по распределению из сходимости по вариации не случайна. Метрика d_{KR} (а также метрики d_{K} и d_{FM}) метризует слабую сходимость распределений измеримых многочленов. Точнее, метрики d_{KR} и эквивалентная ей d_{FM} метризуют слабую сходимость вероятностных мер, а метрика d_{K} — слабую сходимость вместе со сходимостью первых моментов распределений (см. §8.3, 8.10 книги[14]).

В связи с оценками расстояния по вариации через расстояния d_{KR}, d_{K} или d_{FM} следует также упомянуть результат из работ[15] и[16] (также см.

[12] Fortet R., Mourier E. Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1953. – Vol. 70, №3. – P. 267–285.

[13] Nourdin I., Nualart D., Poly G. Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos // Electron. J. Probab. – 2013. – Vol. 18, №22. – P. 1–19.

[14] Богачев В.И. Основы теории меры. Т. 2, 2-е изд. М. – Ижевск: РХД, 2006. – 680 с.

[15] Богачев В.И., Колесников А.В. Оценки снизу расстояния Канторовича // Докл. РАН. – 2015. – Т. 460, №6. – С. 631–633.

[16] Богачев В.И., Ванг Ф., Шапошников А.В. Оценки норм Канторовича на многообразиях // Докл. РАН. – 2015. – Т. 463, №6. – С. 633–638.

работы[17] и [18]): для всякого k, существует такое число $C(k)$, что для любых двух вероятностных мер μ и ν на $\mathbb{R}^k$ с плотностями ϱ_μ и ϱ_ν из класса функций BV ограниченной вариации имеет место оценка

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu)^2 \leqslant C(k) d_{\mathrm{K}}(\mu,\nu) \|D\varrho_\mu - D\varrho_\nu\|_{\mathrm{TV}}. \tag{3}$$

Этот результат является обобщением классического неравенства Харди–Ландау–Литтлвуда (см. работу[19]), согласно которому

$$\|f'\|_{L^1}^2 \leqslant C\|f\|_{L^1}\|f''\|_{L^1}$$

для любой интегрируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, имеющей две интегрируемые производные. В случае $k = 1$ неравенство (3) легко выводится из неравенства Харди–Ландау–Литтлвуда: достаточно приблизить функции ограниченной вариации гладкими функциями с компактным носителем и в качестве f взять разность между функциями распределения мер μ и ν. Однако неравенство (3) плохо подходит для оценок типа (2), поскольку (как уже отмечалось ранее) распределения многочленов не обязаны лежать в классе BV. Чтобы преодолеть эту трудность, в диссертации доказывается аналог (3), требующий от ϱ_μ и ϱ_ν принадлежности к классам Никольского–Бесова вместо принадлежности к BV.

В четвертой главе обсуждаются обобщения результатов предыдущих двух глав на другие классы функций и меры, отличные от гауссовской. В связи с этим следует отметить, что в статье Давыдова[8] наряду с оценкой (1) для распределений многочленов приводится похожая оценка для распределений тригонометрических многочленов. А именно: в п. 4 работы[8] приводится следующий результат:

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1}) \leqslant C\|f - g\|_\infty^{\frac{1}{2d+1}},$$

где $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — тригонометрические полиномы степени d, γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$. Этот результат является аналогом (1) для тригонометрических полиномов. В связи с этим также стоит отметить, что в работах[11] и[13] доказательство неравенств типа (2) для обычных полиномов опиралось на два факта: гладкость полиномов, позволяющую использовать интегрирование по частям, и неравенство Карбери–Райта.

[17]Kohn R.V., Otto F. Upper bounds on coarsening rates // Comm. Math. Phys. – 2002. – Vol. 229, №3. – P. 375–395.

[18]Seis C. Maximal mixing by incompressible fluid flows // Nonlinearity. – 2013. – Vol. 26, №12. – P. 3279–3289.

[19]Hardy G.H., Landau E., Littlewood J.E. Some inequalities satisfied by the integrals or derivatives of real or analytic functions // Math. Z. – 1935. – Vol. 39, №1. – P. 677–695.

Неравенство Карбери–Райта, доказанное в работе[20], есть факт из выпуклой геометрии, который имеет место для полиномов на пространстве с выпуклыми мерами. Его можно вывести из неравенства Ремеза (см.[20,21]). Однако для тригонометрических полиномов тоже выполнен аналог неравенства Ремеза: так называемая лемма Турана, доказательство которой можно найти в работе Назарова[22].

Поэтому возникает вопрос: можно ли обобщить результаты, справедливые для измеримых многочленов, на случай тригонометрических полиномов? Также возникает вопрос об обобщении результатов на случай полиномов на пространствах с негауссовской мерой. Например, в работе[10] аналог оценки (1) получен для мер на отрезке, имеющих ограниченную липшицеву плотность. Наконец, можно отметить следующий факт: в работах[11] и[13] оценки типа (2) возникали в связи со слабой сходимостью последовательностей распределений многочленов фиксированной степени. В этих работах было установлено, что для распределений случайных величин, представляющих собой измеримые многочлены фиксированной степени на локально выпуклом пространстве с гауссовской мерой, слабая сходимость влечет сходимость по вариации при условии невырожденности предела (и некоторых условиях на последовательность в многомерном случае). Аналогичное свойство выполнено также для многомерных случайных векторов, компоненты которых являются многочленами фиксированной степени. Возникает вопрос, насколько широкий класс функций можно рассмотреть вместо класса (измеримых) многочленов фиксированной степени.

Цель работы.

• Для измеримых многочленов f относительно гауссовской меры γ на локально выпуклом пространстве X исследовать дробную гладкость распределений $\gamma \circ f^{-1}$. Исследовать аналогичный вопрос для отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)$ из X в $\mathbb{R}^k$, компоненты которых являются измеримыми полиномами.

• Исследовать возможность построения оценки типа Харди–Ландау–Литтлвуда, которую можно применять при изучении распределений невырожденных измеримых полиномов.

---

[20]Carbery A., Wright J. Distributional and L^q norm inequalities for polynomials over convex bodies in $\mathbb{R}^n$ // Math. Research Lett. – 2001. – Vol. 8, №3. – P. 233–248.

[21]Назаров Ф.Л., Содин М.Л., Вольберг А.Л. Геометрическая лемма Каннана–Ловаса–Шимоновича, не зависящие от размерности оценки распределения значений полиномов и распределение нулей случайных аналитических функций // Алгебра и анализ. – 2002. – Т. 14, №2. – С. 214–234.

[22]Назаров Ф.Л. Локальные оценки экспоненциальных полиномов и их приложения к неравенствам типа принципа неопределенности // Алгебра и анализ. – 1993. – Т. 5, №4. – С. 3–66.

• Исследовать оптимальный показатель степени расстояния Канторовича в оценках расстояния по вариации через расстояние по Канторовичу для распределений измеримых многочленов.

• Изучить возможность обобщения полученных результатов на более широкие классы мер и функций.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Доказано достаточное условие принадлежности меры к классу Никольского–Бесова. С его помощью проверена принадлежность распределений измеримых многочленов на пространстве с гауссовской мерой к классу Никольского–Бесова.

2. Получено дробное неравенство Харди–Ландау–Литтлвуда для мер, позволяющее оценивать расстояние по вариации через расстояние по Канторовичу между мерами из класса Никольского–Бесова.

3. Улучшены оценки расстояния по вариации через расстояние по Канторовичу для распределений измеримых многочленов на пространстве с гауссовской мерой, полученные в работах[11,13]. Попутно получено новое доказательство оценки расстояния между распределениями измеримых многочленов через среднеквадратическое расстояние между самими многочленами, дающее новую информацию о константе в этой оценке.

4. Проверена принадлежность распределений тригонометрических многочленов на пространстве с гауссовской мерой к классу Никольского–Бесова.

5. Для распределений тригонометрических многочленов на пространстве с гауссовской мерой получена оценка расстояния по вариации через расстояние по Канторовичу, а также через среднеквадратическое расстояние между тригонометрическими многочленами.

6. Доказано общее утверждение, позволяющее из слабой сходимости образов мер получить сходимость по вариации.

Методы исследования. В работе используются методы теории меры, функционального анализа и теории вероятностей, а также ряд оригинальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах бесконечномерного анализа, теории меры, теории вероятностей и стохастического анализа. Результаты и методы работы будут востребованы в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Математическом институте имени

В.А. Стеклова РАН, Институте проблем передачи информации имени А.А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете и Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Соответствие паспорту научной специальности. В диссертации изучаются нелинейные отображения мер на бесконечномерных пространствах, а также сходимости на линейном пространстве мер, в силу чего диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по направлению «функциональный анализ».

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2015 г.),

2. Международная конференция "Infinite-dimensional analysis (the 19th ISE)", Казальмаджоре, Италия (2016 г.).

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В.И. Богачева, С.В. Шапошникова и Н.А. Толмачева (МГУ, многократно, 2013 – 2018 г.)

2. Международный научно-исследовательский семинар "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельда, Германия (многократно, 2014 – 2017 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (см. работы [1], [2], [3] первые две из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 44 наименований. Общий объем диссертации составляет 78 страниц.

Краткое содержание диссертации.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

Первая глава диссертации является вводной. В ней содержатся необходимые определения, обозначения, а также известные результаты, которые используются в остальных трех главах работы.

Во второй главе исследуются вопросы дробной гладкости образов гауссовской меры под воздействием измеримых многочленов. А именно: на локально выпуклом пространство X задана центрированная радоновская гауссовская мера γ (радоновость означает, что для всяких борелевского множества B и $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K \subset B$ с $\gamma(B \backslash K) < \varepsilon$, а центрированность и гауссовость означают, что все непрерывные линейные функционалы на X представляют собой гауссовские случайные величины с нулевыми средними). Мы исследуем меру $\gamma \circ f^{-1}$, где f — измеримый многочлен степени d. В терминологии теории вероятностей мера $\gamma \circ f^{-1}$ является распределением случайной величины f, заданной на вероятностном пространстве X с σ-алгеброй борелевских множеств и мерой γ. Мы исследуем принадлежность плотностей распределений $\gamma \circ f^{-1}$ к дробным соболевским классам $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$.

Основными результатами данной главы являются следующие утверждения.

Предложение 2.1.1 *Пусть $\alpha \in (0,1]$ и ν — такая борелевская мера на $\mathbb{R}^k$, что для каждой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ и каждого единичного вектора $e \in \mathbb{R}^k$ выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \partial_e \varphi(x)\, \nu(dx) \leqslant C \|\varphi\|_\infty^\alpha \, \|\partial_e \varphi\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Тогда

$$\|\nu_h - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant 2^{1-\alpha} C |h|^\alpha \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^k,$$

т. е. $\nu \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ и $\|\nu\|_{B^\alpha} \leqslant 2^{1-\alpha} C$. В частности, плотность меры ν принадлежит всем $L^p(\mathbb{R}^k)$ при $p < k/(k-\alpha)$.

Теорема 2.2.2 *Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера $\mathbb{R}^n$. Для всякого $d \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C(d)$, зависящее только от d, что для любого многочлена f степени d на $\mathbb{R}^n$ и любой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f)\, d\gamma_n \leqslant C(d) \|\nabla f\|_*^{-1/d} \|\varphi\|_\infty^{1/d} \|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Поэтому $\gamma_n \circ f^{-1}$ лежит в классе Никольского–Бесова $B^{1/d}(\mathbb{R})$ во всех случаях, когда f не является постоянной.

Следствие 2.4.2 *Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Тогда для всякого $d \in \mathbb{N}$*

существует такое число $C(d)$, зависящее только от d, что для всяких γ-измеримого многочлена $f\colon X \to \mathbb{R}$ степени d и функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^1)$ имеет место неравенство

$$\int_X \varphi'(f)\,d\gamma \leqslant C(d)\|\nabla f\|_*^{-1/d}\|\varphi\|_\infty^{1/d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/d}.$$

Следовательно, если f не есть константа γ-почти всюду, то $\gamma \circ f^{-1}$ лежит в классе Никольского–Бесова $B^{1/d}(\mathbb{R})$.

Теорема 2.3.1 *Пусть $k, d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$. Тогда найдется такое число $C(d,k,a,b,\tau) > 0$, что для всякого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, где все компоненты f_i — многочлены степени d и*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_f\,d\gamma_n \geqslant a, \quad \max_{i\leqslant k}\sigma_{f_i} \leqslant b,$$

для всякой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ и всякого вектора $e \in \mathbb{R}^k$ с $|e| = 1$ выполнено неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_e\varphi(f(x))\,\gamma_n(dx) \leqslant C(d,k,a,b,\tau)\|\varphi\|_\infty^\alpha\|\partial_e\varphi\|_\infty^{1-\alpha}, \ \alpha = \frac{1}{4k(d-1)+\tau}.$$

Следовательно,

$$\|\gamma_n \circ f^{-1} - (\gamma_n \circ f^{-1})_h\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C(d,k,a,b,\tau)|h|^\alpha,$$

или, что равносильно,

$$\gamma_n \circ f^{-1} \in B^\alpha(\mathbb{R}^k) \quad \text{для каждого } \alpha < \frac{1}{4k(d-1)}.$$

В частности, плотность меры $\gamma_n \circ f^{-1}$ принадлежит всем пространствам $L^p(\mathbb{R}^k)$ с $p < k/(k-\alpha)$.

Следствие 2.4.3 *Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Пусть $k, d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$. Существует такое число $C(d,k,a,b,\tau) > 0$, что для всякого отображения $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon X \to \mathbb{R}^k$, где все компоненты f_i — γ-измеримые многочлены степени d и*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_f\,d\gamma_n \geqslant a, \quad \max_{i\leqslant k}\sigma_{f_i} \leqslant b,$$

для каждой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^k)$ и каждого вектора $e \in \mathbb{R}^k$ с $|e| = 1$ выполнено неравенство

$$\int_X \partial_e\varphi(f(x))\,\gamma(dx) \leqslant C(d,k,a,b,\tau)\|\varphi\|_\infty^\alpha\|\partial_e\varphi\|_\infty^{1-\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{4k(d-1)+\tau}.$$

В частности, если $\Delta_f > 0$ на множестве положительной меры, то мера $\gamma \circ f^{-1}$лежит в классе Никольского–Бесова $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$.

Теорема 2.3.1 и следствие 2.4.3 являются обобщениями теоремы 2.2.2 и следствия 2.4.2 на случай случайных векторов, составленных из измеримых многочленов.

Отметим, что показатель $\alpha = 1/d$ класса Никольского–Бесова $B^\alpha(\mathbb{R})$ является наилучшим из возможных в условиях следствия 2.4.3, как показывает пример 2.2.3.

В **третьей главе** исследуются оценки расстояний по вариации между распределениями измеримых многочленов и измеримых полиномиальных случайных векторов на пространстве с гауссовской мерой. В этой главе рассматриваются оценки следующих видов:

$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C d_{\mathrm{K}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1})^\theta,$$
$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C \|f - g\|_2^\theta.$$

Основными результатами об оценках первого типа являются следующие три утверждения. При этом теорема 3.1.1 справедлива не только для распределений измеримых полиномов, но для любых мер с плотностями из классов $B^\alpha(\mathbb{R}^k)$.

Теорема 3.1.1 *Пусть $\nu, \sigma \in B^\alpha(\mathbb{R}^k)$ — борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^k$. Тогда*

$$\|\sigma - \nu\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C(k,\alpha) \|\sigma - \nu\|_{B^\alpha}^{1/(1+\alpha)} d_{\mathrm{K}}(\sigma, \nu)^{\alpha/(1+\alpha)},$$

где

$$C(k,\alpha) = 1 + \int_{\mathbb{R}^k} |x|^\alpha \gamma_k(dx).$$

Следствие 3.1.4 *Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $\tau > 0$. Тогда найдется такое число $C = C(d,a)$, что для всяких γ-измеримых многочленов f и g на X степени d с $\|\nabla f\|_* \geqslant a$ и $\|\nabla g\|_* \geqslant a$ справедливо неравенство*

$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant C d_{\mathrm{K}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1})^\theta, \quad \theta = \frac{1}{d+1}.$$

Следствие 3.1.10 *Пусть γ — центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, $k, d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$. Тогда найдется такое число $C_1 = C_1(d,k,a,b,\tau)$, что для любых*

отображений $f = (f_1, \dots, f_k)$ *и* $g = (g_1, \dots, g_k)$ *из* $\mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^k$, *компоненты* f_i, g_i *которых — измеримые многочлены степени* d *с*

$$\int_X \Delta_f \, d\gamma \geqslant a, \quad \int_X \Delta_g \, d\gamma \geqslant a, \quad \sigma_{f_i} \leqslant b, \quad \sigma_{g_i} \leqslant b, \quad i = 1, \dots, k,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1}) \leqslant C_1 d_{\mathrm{FM}}(\gamma \circ f^{-1}, \gamma \circ g^{-1})^{1/(4k(d-1)+1+\tau)}.$$

Следствия 3.1.4 и 3.1.10 дают оценки с большими показателями θ, чем в оценках из работ[11] и[13], т. е. оказываются сильнее.

В работе[11] для распределений измеримых многочленов (т. е. для случая $f, g\colon X \to \mathbb{R}$) была доказана оценка с показателем $\theta = 1/(2d+1)$.

В работе[13] оценка для распределений k-мерных случайных векторов из измеримых многочленов (т. е. для случая $f, g\colon X \to \mathbb{R}^k$) была доказана для любых показателей

$$\theta < \frac{1}{(k+1)(4k(d-1)+3)+1}.$$

Также следует отметить следующий результат, который является непосредственным улучшением теоремы 3.1 из[11] (в том смысле, что при тех же условиях получается более сильный результат).

Следствие 3.1.7 *Пусть* γ *— центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве* X, $\{f_n\}$ *— последовательность* γ*-измеримых многочленов степени* d. *Предположим, что последовательность мер* $\gamma \circ f_n^{-1}$ *слабо сходится к абсолютно непрерывной мере* ν *на* $\mathbb{R}$. *Тогда эта последовательность сходится по вариации и для всякого* $\tau > 0$ *найдется такое число* $C_2 = C_2(d, \sigma_\nu, \tau)$, *где* σ_ν^2 *— дисперсия* ν, *что для достаточно больших* n *и* m *верна оценка*

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma \circ f_m^{-1}, \gamma \circ f_n^{-1}) \leqslant C_2 d_{\mathrm{K}}(\gamma \circ f_m^{-1}, \gamma \circ f_n^{-1})^{1/(2d-1+\tau)}.$$

Еще одним важным результатом главы 3 является следующая оценка.

Теорема 3.2.1 *Для каждого* $d \in \mathbb{N}$ *найдется число такое число* $c(d)$, *что для любого* n *и любой пары многочленов* $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *степени* d *имеет место неравенство*

$$\|\gamma_n \circ f^{-1} - \gamma_n \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant c(d)\big(\|\nabla g\|_*^{-1/(d-1)} + 1\big)\|f - g\|_2^{1/d}.$$

Степень $1/d$ при L^2-норме уже была достигнута ранее в работе[9] (см. также работы[8,10]) и является наилучшей для измеримых многочленов степени d. Однако в нашем случае получена новая информация о виде константы в этом неравенстве. Подробнее о сравнении результатов см. замечание 3.2.3 в главе 3.

В четвертой главе обсуждаются различные обобщения результатов предыдущих глав. В первом параграфе обсуждаются обобщения результатов первых двух глав на следующий случай: есть пространство $\mathbb{R}^n$ с гауссовской мерой γ, но теперь f — не многочлен, а тригонометрический многочлен. Что мы можем сказать о мере $\gamma \circ f^{-1}$? Доказано, что на этот случай переносятся все основные результаты первых двух глав. В качестве примеров приведем следующие три результата.

Теорема 4.2.8 *Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера $\mathbb{R}^n$. Для всякого $d \in \mathbb{N}$ найдется такое число $C(d)$, зависящее только от d, что для любого тригонометрического полинома f степени d на $\mathbb{R}^n$ и любой функции $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi'(f)\, d\gamma_n \leqslant C(d)\|\nabla f\|_*^{-1/2d}\|\varphi\|_\infty^{1/2d}\|\varphi'\|_\infty^{1-1/2d}.$$

Значит, $\gamma_n \circ f^{-1}$ лежит в классе Никольского–Бесова $B^{1/2d}(\mathbb{R})$ во всех случаях, когда f не является постоянной.

Теорема 4.2.11 *Пусть $k, d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$. Тогда найдется такое число $C = C(d, k, a, b, \tau)$, что для любых отображений $f = (f_1, \ldots, f_k)$ и $g = (g_1, \ldots, g_k)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, компоненты f_i, g_i которых являются тригонометрическими полиномами степени d с*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_f\, d\gamma_n \geqslant a, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_g\, d\gamma_n \geqslant a, \quad \max_{i\leqslant k} \sigma_{f_i} \leqslant b, \quad \max_{i\leqslant k} \sigma_{g_i} \leqslant b,$$

выполнено неравенство

$$d_{\mathrm{TV}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1}) \leqslant C d_{\mathrm{K}}(\gamma_n \circ f^{-1}, \gamma_n \circ g^{-1})^\theta, \quad \theta = \frac{1}{4k(2d-1)+1+\tau}.$$

Теорема 4.2.12 *Для каждого $d \in \mathbb{N}$ найдется такое число $c(d)$, что для любого n и любой пары тригонометрических многочленов $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ степени d имеет место неравенство*

$$\|\gamma_n \circ f^{-1} - \gamma_n \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant c(d)\big(\|\nabla g\|_*^{-1/(2d-1)} + 1\big)\|f - g\|_2^{1/2d}.$$

Другими важными результатами этой главы являются следующие теоремы.

Теорема 4.1.2 *Пусть μ — абсолютно непрерывная логарифмически вогнутая мера мера на прямой, а вероятностная мера ν задана ограниченной плотностью ϱ относительно μ, причем функция ϱ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Тогда найдется такое число $c(d, \varrho, \mu, \nu)$, зависящее от d, ϱ, μ и ν, что для любой пары многочленов f, g степени d выполнено неравенство*

$$\|\nu \circ f^{-1} - \nu \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leqslant c(d, \varrho, \mu, \nu)\left(\|g'\|_{L^2(\mu)}^{-1/(d-1)} + 1\right)\|f - g\|_{L^2(\nu)}^{1/d}.$$

Теорема 4.3.1 *Если последовательность отображений $F_n\colon X \to \mathbb{R}^k$ такова, что*

$$\sup_n \|F_n^i\|_{4k,2} < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0,$$

то последовательность мер $\mu_n = \gamma \circ F_n^{-1}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся по вариации.

Заключение

В диссертации исследованы свойства образов вероятностных мер на локально выпуклых пространствах при измеримых многочленах на этих пространствах. Для борелевских мер на пространстве $\mathbb{R}^k$ получено достаточное условие принадлежности плотности этой меры к классу Никольского–Бесова $B^\alpha(\mathbb{R})$, с его помощью показано, что распределения невырожденных измеримых многочленов принадлежат к этому классу. При этом получено наилучшее значение α. Аналогичный результат получен для образов случайных векторов, составленных из измеримых многочленов. Доказано дробное неравенство Харди–Ландау–Литтлвуда для мер с плотностями из класса Никольского–Бесова. С помощью этого неравенства получены улучшения результатов Нурдина, Нуаларта и Поли об оценке расстояния по вариации между распределениями измеримых многочленов через расстояние по Канторовичу. Также получено уточнение оценки Мартыновой для расстояния по вариации между распределениями измеримых многочленов через L_2-расстояние между многочленами. Аналогичные результаты получены для тригонометрических многочленов. Доказано, что образ гауссовской меры под действием непостоянного тригонометрического многочлена имеет плотность из класса Никольского–Бесова, а также получены оценки на расстояние по вариации между распределениями тригонометрических многочленов. Получены некоторые обобщения этих результатов на другие классы мер и функций.

Дальнейшие исследования по тематике диссертации могут проводиться в следующих направлениях.

1. Поиск оптимального показателя α и дальнейшее улучшение оценок для образов случайных векторов, составленных из измеримых многочленов.

2. Поиск оптимальной степени в оценках расстояния по вариации через расстояние по Канторовичу между распределениями измеримых многочленов.

3. Более глубокое исследование случая негауссовских мер.

4. Улучшение результата теоремы 4.3.1. Первая гипотеза заключается в том можно ослабить условие на функцию. Ключевым шагом доказательства является доказательство принадлежности специально сконструированной меры к классу $BV(\mathbb{R}^n)$ при помощи интегрирования по частям. Однако доказательство не изменится, если удастся установить принадлежность этой меры к классу $B^\alpha(\mathbb{R}^n)$. В этом случае можно ожидать уменьшения показателей соболевского класса, в котором должны лежать компоненты F_n^i. Вторая гипотеза состоит в том, что в условиях теоремы возможно получить оценку на расстояние по вариации через функцию от расстояния по Канторовичу в духе результатов главы 3.

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Игоревичу Богачеву за постановку задач, их обсуждение и постоянную поддержку в работе.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[1] Богачев В.И., Зеленов Г.И. О сходимости по вариации слабо сходящихся многомерных распределений // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 461, №1. – С. 14–17.

Bogachev V.I., Zelenov G.I. On convergence in variation of weakly convergent multidimensional distributions // Doklady Mathematics. – 2015. – Vol. 91, №2. – P. 138–141.

В работе [1] диссертанту принадлежат пример 1, теоремы 1, 2 лемма 1 и следствие 1.

[2] Богачев В.И., Зеленов Г.И., Косов Е.Д. Принадлежность распределений многочленов к классам Никольского–Бесова // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 469, №6. – С. 651–655.

Bogachev V.I., Zelenov G.I., Kosov E.D. Membership of distributions of polynomials in the Nikolskii—Besov class // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 94, №1. – P. 453–457.

В работе [2] диссертанту принадлежат пример 1, теоремы 1–7 и следствия из них.

[3] Zelenov G.I. On distances between distributions of polynomials // Theory of Stochastic Processes. – 2017. – Vol. 22, №2. – P. 79–85.

Тезисы докладов на научных конференциях

[4] Зеленов Г.И. Совместные распределения измеримых многочленов // Сборник тезисов докладов на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015». М.: МГУ, 2015. – 1 с.

Отпечатано в отделе оперативной
печати Геологического ф-та МГУ

Тираж 110 экз. Заказ № 25