МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СОСНИЦЬКИЙ ОЛЕГ ЄВГЕНОВИЧ

УДК 519.21

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙ НА ФІНАНСОВОМУ ТА СТРАХОВОМУ РИНКАХ

01.01.05-теорія ймовірностей і математична статистика

Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико - математичних наук

Київ - 2014

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей та математичної статистики Донецького національного університету МОН України

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
БОНДАРЕВ Борис Володимирович,
Донецький національний університет,
завідувач кафедри теорії ймовірностей
та математичної статистики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ЄЛЕЙКО Ярослав Іванович,
Львівський національний університет
імені І. Франка,
завідувач кафедри теоретичної
та прикладної статистики

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ЯМНЕНКО Ростислав Євгенович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
доцент кафедри теорії ймовірностей, статистики
та актуарної математики

Захист відбудеться 29 вересня 2014 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4-Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці ім. М.Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "22"сепрня 2014 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 М.П.Моклячук

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Стохастичне моделювання є невід'ємним інструментом для побудови інвестиційної стратегії. Це обумовлюється тим, що у даний час інвестори все частіше вкладають свій капітал в ризикові активи. При більшій середній прибутковості ризикового активу ніж у безризикового, природно, інвестора чекає і більша невизначеність. Тому для побудови і аналізу інвестиційної стратегії в умовах невизначеності використання стохастичних методів є не тільки логічним, але й необхідним. Очевидно, що інвестор, вкладаючи свій капітал в ризикові і безризикові активи, переслідує цілком певну мету, засновану на його перевагах. Задача знаходження оптимальних часток вкладення, при яких досягається кінцева мета інвестора, стала класичною в фінансовій математиці. Вирішенням подібних оптимізаційних задач у серединці XX століття займалися Г. Марковіц та Ф. Блейк. Пізніше Р. Мертон вирішив оптимізаційну задачу у випадку, якщо стратегічною метою інвестора є максимізація середнього сумарного дисконтованого споживання.

Важливою частиною побудови інвестиційної стратегії є вибір адекватної моделі, що описує еволюцію ціни ризикового активу. Взагалі, перша спроба математичної побудови моделі еволюції вартості акції, що ґрунтувалася на теорії ймовірностей, була зроблена ще Л. Башел'є на початку XX століття. Далі, подібним дослідженнями займалися такі відомі зарубіжні вчені, як: Г. Воркинг, А. Каулес, Г. Джонс і Л. Галиць. Але, лише тільки, в середині XX століття після серйозного статистичного дослідження в роботі М. Кендалла почався сучасний період дослідження еволюції цін акцій. Великий внесок у цьому напрямку був зроблений М. Осборном, П. Самуельсоном, П. Кларком та іншими. Серед досліджень вітчизняних і російських вчених варто відзначити роботи А. Ширяєва, А. Мельникова, В. Королюка, Б. Бондарева, М. Карташова, Я. Єлейко, Ю. Мішури, Б. Норкіна. У даній роботі, на відміну від популярної моделі П. Самуельсона, в якості математичної моделі еволюції ціни акції використовувалася модель П. Кларка і модифікована модель П. Самуельсона, що включає в себе стрибкоподібну компоненту.

Якщо в якості інвестора виступає страхова компанія, то в цьому випадку, важливою задачею буде визначення ймовірності нерозорення, що традиційно є мірою платоспроможності страхової компанії. Однак, отримати явний вираз для ймовірності нерозорення страхової компанії в рамках обраної ризикової схеми, як правило, є досить складно, тому актуальною задачею є побудова оцінки, що обмежувала б цю ймовірність знизу. Розробкою і аналізом моделей страхування займалися: Ф. Лундберг, Г. Крамер, С. Андерсен, Х. Шмідлі, С. Асмуссен, Х. Гербер, Н. Бауерс, Я. Гранделл та ін. Серед результатів, отриманих вітчизняними та російськими вченими, слід відзначити роботи А. Мельникова, В. Королюка, Я. Єлейко, Ю. Мішури, Б. Бондарева, М. Карташова, Б. Норкіна, А. Бойкова, В. Каца. У даній роботі для побудови оцінок ймовірності нерозорення страхової компанії використовувалися нерівність Колмогорова, нерівність Розенталя з точною константою, нерівність Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, нерівність С. Утєва для сум слабо залежних випадкових величин.

Зв'язок роботи з науковими програмами планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась в рамках плану наукової роботи кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики факультету математики та інформаційних систем Донецького національного університету. Результати дисертації отримано в рамках науково-дослідних тем: «Стохастичний аналіз і його застосування в задачах актуарної та фінансової математики» (номер державної реєстрації 0112U004755) і «Математичне моделювання, оптимальне керування ризиками. Методи наближеного оцінювання ризиків, задачі оптимального прогнозу та ідентифікації» (номер державної реєстрації 0113U003010).

Мета і основні завдання дослідження. Мета дослідження – розвинути теорію стохастичного моделювання інвестицій на фінансовому та страховому ринках. Сформульована мета передбачає вирішення наступних завдань:

1. Вивести балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку у випадку, коли ціна ризикового активу описується моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою. Розглянути випадки стохастичних та невипадкових премій.
2. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримати оцінки ймовірності нерозорення страхової компанії у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.
3. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримати оцінки ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, що описується моделлю П. Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.
4. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримати оцінки ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, що описується моделлю П. Кларка у випадку, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга.
5. Для моделі П. Кларка вирішити інвестиційну задачу Р. Мертона оптимізації портфеля активів і споживання таким чином, щоб розглянутий функціонал якості приймав максимальне значення. В якості функціоналу якості пропонується використовувати середнє сумарне дисконтоване

споживання. Розглянути випадки інвестора схильного до ризику, нейтрального до ризику та несхильного до ризику.

6. Для моделі П. Кларка вирішити інвестиційну задачу Р. Мертона для інвестора, діяльність якого представляє собою компіляцію накопичувально-споживчого фонду та страхової компанії на (B,S)-ринку.

7. Використовуючи нерівності Колмогорова, Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, нерівності С.А. Утєва для сум слабо залежних випадкових величин, побудувати оцінки знизу для ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує в дискретному часі. Розглянути випадкові впливи: незалежні, пов'язані мартингальною залежністю, а також впливи, що задовольняють умовам сильного та рівномірно сильного перемішування.

8. Отримати узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї для мартингал-різниць на випадок випадкових границь.

9. Використовуючи узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї побудувати оцінку ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку у дискретному часі. Отримати умову, таку щоб робота з ризиковим активом давала більший ефект, ніж при вкладенні тільки на банківський рахунок.

Об'єктом дослідження є моделювання діяльності інвестора.

Предметом дослідження є математичні моделі еволюції капіталу інвестора, який розміщує кошти на фінансовому (B,S)-ринку, та виконує певні функції страхової компанії.

Методи дослідження. Для вирішення поставлених у дисертації завдань використовуються наступні методи:

- методи математичного моделювання (для розробки математичних моделей, що описують динаміку капіталу страхової компанії чи накопичувально-споживчого фонду);
- методи теорії ймовірностей та теорії випадкових процесів (для аналізу побудованих моделей);
- методи розв'язання звичайних та стохастичних диференціальних рівнянь ;
- методи оптимального управління стохастичними системами;
- мартингальні методи.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

1. Виведено балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу страхової компанії, що працює на (B,S)-ринку у випадку, коли ціна ризикового активу описується моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою, яка є варіантом геометричного процесу Леві. Розглянуто випадки стохастичних і невипадкових страхових премій.

2. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності небанкрутства страхової компанії у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.

3. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, описуваного моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.
4. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, описуваного моделлю Кларка. Процес ризику описується класичною моделлю Лундберга.
5. Розв'язана інвестиційна задача Р.Мертона оптимізації портфеля активів і споживання таким чином, щоб розглянутий функціонал якості брав максимальне значення. В якості функціоналу якості було обране середнє сумарне дисконтоване споживання. В якості математичної моделі, що описує еволюцію ціни ризикового активу, була обрана модель Кларка. Розглянуто випадки інвестора схильного до ризику, нейтрального до ризику і несхильного до ризику.
6. Розв'язана інвестиційна задача Р.Мертона для інвестора діяльність якого представляє собою компіляцію накопичувально-споживчого фонду та страхової компанії на (B,S)-ринку. У якості математичної моделі, що описує еволюцію ціни ризикового активу, була обрана модель Кларка.
7. Використовуючи нерівності Колмогорова, Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, нерівності С.А. Утєва для сум слабо залежних випадкових величин, були побудовані оцінки знизу для ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує у дискретному часі. Були розглянуті випадкові впливи: незалежні, пов'язані мартингальною залежністю, а також впливи, які задовольняють умовам сильного та рівномірно сильного перемішування.
8. Було отримано узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї для мартингал-різниць на випадок випадкових границь.
9. Використовуючи узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, була побудована оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку у дискретному часі. Також була представлена умова, за якої, робота з ризиковим активом давала більший ефект, ніж при вкладення тільки на банківський рахунок.

Практичне значення одержаних результатів. Всі отримані в дисертаційній роботі результаті мають теоретичне значення. Практичне застосування результатів дослідження визначається можливістю їх використання в задачах актуарної і фінансової математики, математичному моделюванні еволюцій цін ризикових активів.

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійно виконаним науковим дослідженням. Основні результати та їх узагальнення отримані автором самостійно. Наукові публікації дисертанта, що містять результати даної роботи, підготовлені ним або самостійно, або у співавторстві з науковим керівником. Науковому керівнику Бондареву Б.В. належить постановка задачі та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на засіданнях наукового семінару кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики Донецького національного університету, засіданні наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету ім. Т. Шевченка, засіданні наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики Львівського національного університету ім. І. Франка, а також на конференціях: шоста міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів і молодих вчених "Сучасні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної і фінансової математики" (Донецьк, 9-11 квітня, 2012 р.), міжнародна конференція "XXI International Conference problems of decision making under uncertainties (PDMU-2013)" (Східниця, 13-17 квітня, 2013 р.).

Публікації. Основний зміст дисертації в повній мірі відображено в 6 статтях [1]-[6], всі 6 з яких були надруковані в виданнях з Переліку наукових фахових видань України. Статті [2]-[3] опубліковані в журналі, який включено до науковометричних баз. Кожна з опублікованих статей має достатній обсяг і містить ґрунтовні доведення всіх основних результатів. Також є 2 публікації [7]-[8] у збірниках тез та матеріалах наукових конференцій.

Структура й обсяг роботи. Дисертація складається зі вступу, основної частини із чотирьох розділів, розділених на підрозділи, висновків, додатків, списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 142 сторінки, з них 128 - основного змісту. Список використаних джерел займає 11 сторінок і включає 114 найменувань.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, визначено мету і завдання дослідження, означена наукова новизна і практична цінність отриманих результатів.

Перший розділ містить огляд літератури за темою даної роботи.

У другому розділі розглядається математична модель еволюції ціни ризикового активу (акції), що містить стрибкоподібну компоненту. Модель є у деякому роді модифікацією моделі П. Самуельсона і має наступний вигляд:

$$S(t) = S(0) \times$$

$$\times \exp\left\{\alpha(t) + \beta(t) - \frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t + \int_{U_1} \alpha\mu_1(d\alpha,t) - \int_{U_1}\left[e^{\alpha} - 1 - \alpha\right]\pi_1(d\alpha)\lambda_1(t)\right\},$$

де $S\ \ t$ – ціна акції у момент часу t; $\alpha\ \ t\ \ ,\alpha\ \ 0\ \ =0$ – неперервний процес обмеженої варіації; $\beta\ \ t\ \ ,\beta\ \ 0\ =0$ – неперервний квадратично інтегрований локальний мартингал, причому $\beta\ \ t$ ортогонален $\int\limits_{U_1}\alpha\mu_1\ \ d\alpha,t$; $\nu_1\ \ A,t$ – цілочислова міра, причому із розклада Дуба-Мейєра маємо: $\nu_1\ \ A,t\ =\mu_1\ \ A,t\ +\pi_1\ \ A,t$, де $\mu_1\ \ A,t$ – стохастична мартингальна міра, $\pi_1\ \ A,t$ – неперервний монотонно неспадний інтегрований процес, причому $\pi_1\ \ A,t$ представима у вигляді $\pi_1\ \ A,t\ \ =\pi_1\ \ A\ \ \lambda_1\ \ t$; U_1 – обмежений простір.

Доведена безарбітражність цієї моделі:

Теорема 2.1. *Нехай*

1) еволюція ціни ризикового активу описується функцією

$$S\ \ t\ \ =S\ \ 0\ \ \exp\left\{\alpha\ \ t\ \ +\xi_1\ \ t\ \ -\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t-\int\limits_{U_1}\left[e^{\alpha}-1-\alpha\right]\pi_1\ \ d\alpha\ \ \lambda_1\ \ t\ \ \right\}=$$

$$=S\ \ 0\ \ \exp\left\{\alpha\ \ t\ \ +\beta\ \ t\ \ -\frac{1}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t+\int\limits_{U_1}\alpha\mu_1\ \ d\alpha,t\ \ -\int\limits_{U_1}\left[e^{\alpha}-1-\alpha\right]\pi_1\ \ d\alpha\ \ \lambda_1\ \ t\ \ \right\};$$

2) U_1 – обмежений простір (що відповідає обмеженості величин стрибків мартингала $\xi_1\ \ t\ \ ,t\in\ \ 0,T$);

3) з імовірністю 1 існують обмежені з імовірністю 1 похідні $\alpha'\ \ t\ \ ,\langle\beta,\beta\rangle_t',\lambda_1'\ \ t$ та $\lambda_1'\ \ t\ \ \geq\lambda_0>0$.

Тоді запропонована модель безарбітражна.

Виведено балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу страхової компанії, що працює на (B,S)-ринку у випадку, коли ціна ризикового активу описується моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою. У випадку невипадкових страхових премій балансове рівняння має наступний вигляд:

$$X\ \ t\ \ =\chi^{-1}\ \ t\ \ \left[x+\int\limits_0^t\chi(s)\left\{[c_2\ \ s\ \ -m_2\lambda_2\ \ s\ \ ]ds-\int\limits_{U_2}\alpha\mu_2\ \ d\alpha,ds\ \ \right\}\right],$$

де

$$\chi\ \ t\ \ =\exp\ \ -u\ \ \alpha\ \ t\ \ +\beta\ \ t\ \ \ -u^2\int\limits_{U_1}\left[e^{\alpha}-1\right]^2F_1(d\alpha)\lambda_1\ \ t\ \ -$$

$$-\int\limits_0^t(1-u)r\ \ s\ \ ds+\frac{u^2}{2}\langle\beta,\beta\rangle_t+\int\limits_{U_1}\ln\ \ 1+u^2\left[e^{\alpha}-1\right]^2-u\left[e^{\alpha}-1\right]\ \ \nu_1\ \ d\alpha,t\ \ \Bigg\}. \qquad (1)$$

Тут $X(t)$ – капітал страхової компанії у момент часу t; $c_2(t)$ – невід'ємна невипадкова функція, що описує інтенсивність з якою страхова компанія отримує страхові премії від клієнтів у момент часу t; $m_2 = \int\limits_{U_2} \alpha F_2(d\alpha)$; як і раніше будемо вважати, що $\pi_2(A,t)$ представима у вигляді $\pi_2(A,t) = \int\limits_A F_2(d\alpha)\int\limits_0^t \lambda_2(s)\,ds$; $r(t)$ – банківська ставка у момент часу t, $x = X(0)$ – капітал компанії у початковий момент часу.

У випадку стохастичних премій балансове рівняння має вигляд:

$$X(t) = \chi^{-1}(t)x + \chi^{-1}(t)\int\limits_0^t \chi(s)\left(m_3\lambda_3(s) - m_2\lambda_2(s)\right)ds -$$

$$-\chi^{-1}(t)\int\limits_0^t \chi(s)\left(\int\limits_{U_2} \alpha\mu_2(du,ds) - \int\limits_{U_3} \alpha\mu_3(du,ds)\right),$$

де $m_3 = \int\limits_{U_3} \alpha F_3(d\alpha)$, $\pi_3(A,t) = \int\limits_A F_3(d\alpha)\int\limits_0^t \lambda_3(s)\,ds$.

Далі, у роботі широко використовується наступний результат, отриманий П.Уиттлом:

Теорема 2.2. (нерівність Колмогорова-Гаєка-Рен'ї для мартингал-різниць, неперервний час). *Нехай $\mu(t)$ – мартингал відносно потоку $\Im_0^t$, $u(t)$ – невід'ємна висхідна функція, $\varphi(x)$ – невід'ємна висхідна функція. Тоді справедлива оцінка*

$$P\left\{|\mu(t)| \le u(t), t \in [0,T]\right\} \ge 1 - \int\limits_0^T \frac{dM\varphi(\mu(t))}{\varphi(u(t))}$$

За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності небанкрутства страхової компанії у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.

У випадку класичної моделі Лундберга оцінка ймовірності нерозорення має вигляд:

$$P\left\{X(t) > 0, t \in [0,+\infty)\right\} \ge 1 - \frac{1}{x}\frac{m_2^{(2)}\lambda_2}{c - m_2\lambda_2},$$

де $x = X(0)$, $\int\limits_{U_2} \alpha^2 F_2(d\alpha) = m_2^{(2)}$.

Тут в якості функції $\varphi(x)$ у нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї була взята квадратична функція.

Можна посилити цю оцінку, взяв $\varphi(x) = x^4$, тоді

$$P\{X(t)>0, t\in[0,+\infty)\} \geq 1-\frac{\left(\lambda_2 m_2^{(2)}\right)^2}{\left(c-m_2\lambda_2\right)^2}\frac{1}{x^2}-\frac{m_2^{(4)}\lambda_2}{c-m_2\lambda_2}\frac{1}{3x^3}$$

Якщо в якості інтенсивності отримання страхових премій та позовів взяти не сталу, а деяку невід'ємну невипадкову функцію $c(t)$ та $\lambda_2(t)$ відповідно, то оцінка має вигляд:

$$P\{X(t)>0, t\in[0,T]\} \geq 1-m_2^{(2)}L_2\left(\frac{1}{x\delta}-\frac{1}{x\delta+\delta^2 T}\right),$$

де $c(t)-m_2\lambda_2(t)\geq\delta>0, <\lambda_2(s)\leq L_2<+\infty$.

У випадку моделі Лундберга зі стохастичними преміями оцінка ймовірності нерозорення має вигляд:

$$P\{X(t)>0, t\in[0,+\infty)\} \geq 1-\frac{m_2^4\lambda_2+m_3^4\lambda_3}{3(m_3\lambda_3-m_2\lambda_2)}\frac{1}{x^3}-\frac{\left[\lambda_2 m_2^{(2)}+\lambda_3 m_3^{(2)}\right]^2}{(m_3\lambda_3-m_2\lambda_2)^2}\frac{1}{x^2}$$

Якщо в якості інтенсивності отримання страхових премій та позовів взяти не сталу, а деяку невід'ємну невипадкову функцію $\lambda_3(t)$ та $\lambda_2(t)$ відповідно, то оцінка має вигляд:

$$P\{X(t)>0, t\in[0,+\infty)\} \geq 1-\frac{m_2^2L_2+m_3^2L_3}{\delta}\frac{1}{x}.$$

де $m_3\lambda_3(s)-m_2\lambda_2(s)\geq\delta>0, 0<\lambda_3(s)\leq L_3<+\infty, 0<\lambda_2(s)\leq L_2<+\infty$.

За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, описуваного моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою.

У випадку моделі Лундберга зі стохастичними преміями оцінка ймовірності нерозорення має вигляд:

$$P\{X(t)>0, t\in[0,+\infty)\} \geq 1-\frac{m_2^2L_2+m_3^2L_3}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t 2r(s)ds}dt,$$

якщо $\int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t 2r(s)ds}dt<+\infty.$

У третьому розділі в якості математичної моделі еволюції ризикового активу розглядається модель П.Кларка, що відрізняється від моделі П.Самуельсона тим, що в якості "основного" процесу замість вінеровського $W(t)$ був взятий підпорядкований вінеровський процес $W(Z(t))$. Якщо в якості $Z(t)$ взяти процес Пуассона с параметром λ, який не залежить від $W(t)$, то процес $W(Z(t))$ буде мати додатний ексцес, тобто крива розподілу є більш гостровершинною порівняно з кривою нормального розподілу. Тим самим модель позбулася таких недоліків як: неперервність змін цін акцій і нормальність розподілів приростів цих цін. В цьому розділі в якості математичної моделі еволюції ризикового активу буде використовуватися модель

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \lambda\left[\sqrt{e} - 1\right]\right)t + W\left(Z(t)\right)\right),$$

що відрізняється від моделі П.Кларка тим, що параметр $\mu > 0$, як і в моделі П.Самуельсона, має сенс локальної прибутковості. Показана безарбітражність цієї моделі.

Розглядається діяльність страхової компанії, що функціонує на фінансовому (B,S)-ринку з ціною ризикового активу, що описується моделлю П.Кларка. Модель ризику описується класичною моделлю Лундберга. Знайдені такі управління капіталом компанії, щоб ймовірність нерозорення страхової компанії була найбільшою. Для побудови оцінки ймовірності нерозорення був використаний наступний результат, що належить А.Баєву.

Теорема 3.1. *Нехай* $\mu > r > 0$, *якщо для якогось цілого* $m > 0$

$$\int_B x^{2m} dF(x) < +\infty, \mathrm{M}\left[\xi_t^0\right]^{2m} \le \exp\left(-2mdt\right), 0 < d < +\infty,$$

то має місце нерівність

$$\sup_{0 \le \tau < +\infty} \mathrm{M}\left|\overline{\xi}_\tau\right|^{2m} \le b^{2m}\left(\frac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m \left[1 + \sqrt{\frac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)},$$

де $b = \left[\int_B x^{2m} dF(x)\right]^{1/2m}$.

За допомогою цієї оцінки та нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримана оцінка для ймовірності нерозорення страхової компанії, а саме:

Теорема 3.2. *Нехай* $x > 0$ *– початковий капітал страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, на якому еволюція ризикового активу описується моделлю П.Кларка. Нехай* $0 < r < \mu$, $r -$ *діюча процентна ставка, сумарні позови до страхової компанії описуються складним процесом Пуассона* $\sum_{k=0}^{N(t)} \varsigma_k$ *,де* $\lambda_0 > 0$ *– інтенсивність стандартного процесу Пуассона* $N(t)$*, який описує число позовів, які поступили до страхової компанії за час* $[0,t]$, $F(x) = P(\varsigma_k < x)$, $0 < \varsigma_k$ *– незалежні між собою і від* $N(t)$*, однаково розподілені величині позовів, мають кінцеві моменти* $\mathrm{M}\varsigma_k^{2m} < +\infty, b = \left(\mathrm{M}\varsigma_k^{2m}\right)^{1/2m}$, $\mathrm{M}\varsigma_k = a$, *тоді якщо* $0 \le \overline{u} \le 1$ *така, що* $\psi(\overline{u}) = \max_{0 \le u \le 1} \psi(u) = d > 0$, *то якщо* $\overline{u} \cdot 100\%$ *грошей вкладаються в акції, а* *залишок на банківський рахунок, тоді для ймовірності нерозорення страхової компанії справедлива оцінка*

$$P\{X(t)>0, t\in[0,+\infty)\}\ge 1-\frac{b^{2m}\left(\dfrac{\lambda_0 C_{2m}^2}{2d}\right)^m\left[1+\sqrt{\dfrac{2d}{\lambda_0 C_{2m}^2}}\right]^{2m(m-1)}}{x^{2m}}.$$

Також у третьому розділі розглядається інвестиційна задача Р.Мертона зі споживанням: нехай $X(t)$ – капітал інвестора на момент часу $t\in[0,T]$, $X(0)$ – початковий капітал. Інвестор управляє своїм капіталом наступним чином: управління $u\in[0,1]$ – частка капіталу, який вкладається в акції; $1-u\in[0,1]$ – частка капіталу, який вкладається на банківський рахунок, причому $u_1(t,x)$ – швидкість споживання на момент часу $t\in[0,T]$, якщо капітал інвестора на цей момент дорівнював x. Був обраний наступний функціонал якості:

$$V(t,x,u,u_1)=\mathrm{M}\left[\int_t^T e^{-\rho s}\left[u_1(s,X_{t,x}(s))\right]^{\gamma}ds\right],$$

Задача Р.Мертона полягає в тому, щоб найти такі управління u,u_1, при яких заданий функціонал якості брав максимальне значення. У випадку коли інвестор не схильний до ризику, тобто $0<\gamma<1$, були отримані наступні оптимальні управління:

Теорема 3.3. *Припустимо, що еволюція ціни акції описується моделлю П.Кларка. А u^* – корінь наступного рівняння:*

$$f'(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+u\left(e^{\alpha}-1\right)\right)^{\gamma-1}\left(e^{\alpha}-1\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha+\frac{\mu-r}{\lambda}-\sqrt{e}+1=0.$$

Тоді

1) якщо $0<u^*<1$, то максимум функціонала якості буде досягатися при $\bar{u}=u^*$;

2) якщо $u^*\le 0$, то максимум функціонала якості буде досягатися при $\bar{u}=0$;

3) якщо $u^*\ge 1$, то максимум функціонала якості буде досягатися при $\bar{u}=1$;

тут $\bar{u}$ – оптимальна частка вкладень в акції, залишок (частка) $1-\bar{u}$ вкладається на банківський рахунок, при цьому оптимальне споживання дорівнюватиме

1) $\bar{u}_1(t,x)=x\dfrac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}\left[e^{\frac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{-1}$, *якщо* $\gamma B+C-\rho\neq 0$;

2) $\bar{u}_1(t,x)=x(T-t)^{-1}$, *якщо* $\gamma B+C-\rho=0$, *і ціна управління дорівнює*

1) $\bar{V}(t,x)=x^{\gamma}\left[\dfrac{1-\gamma}{\gamma B+C-\rho}\right]^{1-\gamma}\left[e^{\frac{\gamma B+C-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{(1-\gamma)}e^{-\rho t}$, *якщо* $\gamma B+C-\rho\neq 0$;

2) $\bar{V}(t,x)=x^{\gamma}(T-t)^{1-\gamma}e^{-\rho t}$, *якщо* $\gamma B+C-\rho=0$,

де

$$B=\left(\bar{u}\mu+(1-\bar{u})r\right),\ C=\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\left(1+\bar{u}\left(e^{\alpha}-1\right)\right)^{\gamma}-1-\gamma\bar{u}\left(e^{\alpha}-1\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha,$$

$$\bar{V}(t,x)=\max_{0\le u\le 1,u_1\in\Re}V\left(t,x,u,u_1\right).$$

У випадку коли інвестор нейтральний до ризику, тобто $\gamma=1$, були отримані наступні оптимальні управління:

Теорема 3.4. *Припустимо, що еволюція ціни акції описується моделлю П.Кларка. А* $t_1\in\left[t,T\right]$ *– корінь наступного рівняння:*

$$e^{(\mu-\rho)t_1}=\int_{t_1}^{T}e^{(\mu-\rho)s}C(s)\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds.$$

Тоді оптимальне вкладення дорівнюватиме $\bar{u}=1$, *тут* $\bar{u}$ *– оптимальна частка вкладення в акції, залишок (частка)* $1-\bar{u}$ *вкладається на банківський рахунок, при цьому оптимальне споживання дорівнюватиме*

1) $\bar{u}_1(s,x)=0$ *на проміжку* $[t,t_1)$;

2) $\bar{u}_1(s,x)=C(s)x$ *на проміжку* $[t_1,T]$,

і ціна управління дорівнює

$$\bar{V}(t,x)=xe^{-\mu t}\int_{t_1}^{T}e^{(\mu-\rho)s}C(s)\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds.$$

У випадку коли інвестор схильний до ризику, тобто $\gamma>1$, були отримані наступні оптимальні управління:

Теорема 3.5. *Припустимо, що еволюція ціни акції описується моделлю П.Кларка, та* $C(s)$ *– висхідна функція. А* $t_1\in\left[t,T\right]$ *– корінь наступного рівняння:*

$$\frac{1}{\gamma}C^{\gamma-1}(t_1)e^{(\mu+b(1-\rho))t_1}=\int_{t_1}^{T}e^{(\mu+b(1-\rho))s}C^{\gamma}(s)\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds.$$

Тоді оптимальне вкладення дорівнюватиме $\bar{u}=1$, *тут* $\bar{u}$ *– оптимальна частка вкладення в акції, залишок (частка)* $1-\bar{u}$ *вкладається на банківський рахунок, при цьому оптимальне споживання дорівнюватиме*

1) $\bar{u}_1(s,x)=0$ *на проміжку* $[t,t_1)$;

2) $\bar{u}_1(s,x)=C(s)x$ *на проміжку* $[t_1,T]$,

і ціна управління дорівнює

$$\overline{V}(t,x)=x^{\gamma}e^{-(\mu+b(1))t}\int_{t_1}^{T}C^{\gamma}(s)e^{(\mu+b(1)-\rho)s}\exp\left\{-\int_{t_1}^{s}C(\tau)d\tau\right\}ds,$$

де $b(1)=\lambda\left(e^{\frac{\gamma^2}{2}}-1-\gamma(\sqrt{e}-1)\right).$

Також розглядається задача Р.Мертона для інвестора, діяльність якого представляє собою компіляцію накопичувально-споживчого фонду та страхової компанії на (B,S)-ринку. Сумарні виплати страхової компанії на проміжку часу від t до $t+\Delta t$ описуються величиною

$$\sum_{i=Z(t)+1}^{Z(t+\Delta t)}X(t)\chi(\eta_i,\beta),$$

де η_i – незалежні додатні однаково розподілені випадкові величин, які керують величинами виплат страхової компанії. Керуюча величина будується наступним чином: $\eta=\frac{\varsigma}{K}$, де ς – величина позову до фонду, $K>0$ – деяке число, яке може бути достатньо великим, тоді

$$\chi(\eta,\beta)=\begin{cases}\eta, 0<\eta<\beta<1,\\ \beta,\eta\geq\beta.\end{cases}=\begin{cases}\frac{\varsigma}{K}, 0<\frac{\varsigma}{K}<\beta<1,\\ \beta,\frac{\varsigma}{K}\geq\beta.\end{cases}=\begin{cases}\frac{\varsigma}{K}, 0<\varsigma<K\beta<K,\\ \beta,\varsigma\geq\beta K.\end{cases}$$

В цьому випадку були отримані наступні оптимальні управління:

Теорема 3.7. *Нехай* u^* *– корінь рівняння*

$$\gamma(\mu-r)+\gamma\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+u^*(e^{\alpha}-1))^{\gamma-1}(e^{\alpha}-1)-\gamma(e^{\alpha}-1)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha=0,$$

тоді, якщо корінь u^* *існує та* $0<u^*<1,$ *то* $\overline{u}=u^*$; *інакше* $\overline{u}=1$ *– тут* $\overline{u}$ *– оптимальна частка вкладення в ризиковий актив. Нехай*

$$A(\overline{u})=\gamma((1-\overline{u})r+\overline{u}\mu)+$$

$$+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(1+\overline{u}(e^{\alpha}-1))^{\gamma}-1-\gamma\overline{u}(e^{\alpha}-1)\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha+C(\lambda_0,\beta),$$

де

$$C(\lambda_0,\beta)=\lambda_0\int_{0}^{\beta K}\left(1-\frac{\alpha}{K}\right)^{\gamma}F(d\alpha)+\lambda_0(1-\beta)^{\gamma}\left[1-F(\beta K)\right]-\lambda_0,$$

тоді оптимальним буде споживання зі швидкістю

1) $\bar{u}_1(t,x) = x\dfrac{A(\bar{u})-\rho}{1-\gamma}\left[e^{\frac{A(\bar{u})-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{-1}$, *якщо* $A(\bar{u})-\rho \neq 0;$

2) $\bar{u}_1(t,x) = x(T-t)^{-1}$, *якщо* $A(\bar{u})-\rho = 0,$

та ціна управління дорівнює

1) $\bar{V}(t,x) = x^{\gamma}\left[\dfrac{A(\bar{u})-\rho}{1-\gamma}\right]^{\gamma-1}\left[e^{\frac{A(\bar{u})-\rho}{1-\gamma}(T-t)}-1\right]^{1-\gamma}e^{-\rho t}$, *якщо* $A(\bar{u})-\rho \neq 0;$

2) $\bar{V}(t,x) = x^{\gamma}(T-t)^{1-\gamma}e^{-\rho t}$, *якщо* $A(\bar{u})-\rho = 0,$

тут $0 \le t \le T$ *– момент часу, починаючи з якого стартує функціонування фонду,* $x > 0$ *– капітал фонду у момент часу* t.

У четвертому розділі розглядається функціонування страхової компанії у дискретному часі, а саме: нехай є $m \ge 1$ регіонів, в яких є філії страхової компанії. У регіоні з номером $k,\ 1 \le k \le m$ у філії початковий капітал $x^{(k)},\ k=1,...,m$, на інтервалі часу від $l-1$ до l діє депозитна ставка $r_{l-1}^{k} \ge r_k > 0,\ 1 \le k \le m,\ l=1,...,n$, в k-ий філіал компанії на інтервалі часу від $l-1$ до l надходять випадкові премії $C_l^k,\ l=1,...,n,\ k=1,...,m$ з функцією розподілу $G_l^k(x) = P(C_l^k < x)$, $M|C_l^k| < +\infty,\ l=1,...,n,\ k=1,...,m$, і приходять позови $Z_l^k,\ l=1,...,n,\ k=1,...,m$ з функцією розподілу $F_l^k(y) = P(Z_l^k < y)$, $M|Z_l^k| < +\infty,\ l=1,...,n,\ k=1,...,m$. Еволюція капіталу на часовому проміжку $(l-1,l]$, $l=1,...,n$ буде описуватися рекурентним співвідношенням $R_l^k = R_{l-1}^k(1+r_{l-1}^k)+C_l^k - Z_l^k,\ l=1,...,n,\ k=1,...,m$, звідки

$$R_n^k = x^{(k)}\prod_{l=0}^{n-1}(1+r_l^k)+\sum_{l=1}^{n}(C_l^k - Z_l^k)\prod_{\nu=l}^{n-1}(1+r_\nu^k) =$$

$$= x^{(k)}\prod_{l=0}^{n-1}(1+r_l^k)+\prod_{l=0}^{n-1}(1+r_l^k)\sum_{l=1}^{n}(C_l^k - Z_l^k)\left(\prod_{\nu=0}^{l-1}(1+r_\nu^k)\right)^{-1}$$

Отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії у випадку незалежних випадкових впливів, а саме

Теорема 4.2. *Нехай на інтервалі часу від* $l-1$ *до* l *діє депозитна ставка* $r_{l-1}^k \ge r_k > 0,\ 1 \le k \le m,\ l=1,...$. *Нехай* $Z_j^k,\ C_j^k$ *такі, що випадкові величини* $Z_j^k - C_j^k$ *при кожному конкретному* $k,\ k=1,...,m$ *незалежні при зміні* $j=1,2,...,$ $\bar{C}_j^k \ge \bar{Z}_j^k,\ j=1,...,\ k=1,...,m,$ *де* $\tilde{C}_l^k = C_l^k - \bar{C}_l^k, \bar{C}_l^k = MC_l^k, \tilde{Z}_l^k = Z_l^k - \bar{Z}_l^k, \bar{Z}_l^k = MZ_l^k,\ l=1,...,\ k=1,...,m.$

Припустимо, що при $p > 1$ *виконано*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k\right|^{2p} < +\infty,\ j=1,...;k=1,...,m.$$

Тоді справедлива оцінка

$$P\left(R_l^k \geq 0, l=1,...;k=1,...,m\right) \geq 1-2M\left(\theta-1\right)^{2p}\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\times$$

$$\times\max\left(\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2p}, \left[\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2}\right]^p\right),$$

де θ *– пуассонівська випадкова величина з параметром 1.*

Отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії у випадку, коли випадкові впливи пов'язані мартингальною залежністю:

Теорема 4.3. *Нехай на інтервалі часу від* $l-1$ *до* l *діє депозитна ставка* $r_{l-1}^k \geq r_k > 0,\ 1 \leq k \leq m,\ l=1,...,$ *якщо послідовність* $\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right),\ j=1,2,...$ *– мартингал при кожному фіксованому* $1 \leq k \leq m$*, а при* $p>1$ *виконано*

$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p} < +\infty,\ j=1,...,\ k=1,...,m,$$

то справедлива оцінка

$$P\left(R_l^k \geq 0, l=1,...;k=1,...,m\right) \geq$$

$$\geq 1-2\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\sum_{j=1}^{\infty}M\left(\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right)^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-p}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-\frac{p}{2p-1}}\right]^{2p-1}.$$

У випадку, коли випадкові впливи задовольняють умовам сильного перемішування (перемішування по Розенблатту), отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, а саме:

Теорема 4.5. *Нехай на інтервалі часу від* $l-1$ *до* l *діє депозитна ставка* $r_{l-1}^k \geq r_k > 0,\ 1 \leq k \leq m,\ l=1,...,$ *послідовність* $\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k,\ j=1,2,...$ *при кожному фіксованому* $1 \leq k \leq m$ *задовольняє умові сильного перемішування з коефіцієнтом перемішування* $\alpha(t)$ *таким, що визначені функції при* $t=2p, p>1$*:*

$$j(t)=2\min\left(k\in N: 2k \geq t\right),\ b(\alpha,t,\delta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^{\frac{\delta}{\delta+j(t)}}\left(k\right)\left(k+1\right)^{j(t)-2},$$

$$\varepsilon(\alpha,t,\delta)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^{\frac{\delta}{(t\delta+t)}}\left(k\right),\ L_t(n,\delta)=\sum_{k=1}^{n}\left(M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{t+\delta}\right)^{\frac{t}{t+\delta}},\quad \left(D_n\left(\delta\right)\right)^2=L_2(n,\delta).$$

та виконано

$$M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p+\delta} \leq \sigma_k^{2p+\delta} < +\infty,\ j=1,...,\ k=1,...,m,$$

тоді справедлива оцінка

$$P\left\{R_l^k \ge 0, l=1,\ldots k=1,\ldots,m\right\} \ge$$
$$\ge 1 - c_2\varepsilon(\alpha,2p,\delta)\left\{b(\alpha,2p,\delta)+\varepsilon^{2p}(\alpha,2p,\delta)\right\}\times$$
$$\times\left\{L_{2p}(\propto,\delta,k)+\left(D_\propto(\delta,k)\right)^{2p}\right\}\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}$$

У випадку, коли випадкові впливи задовольняють умовам рівномірно сильного перемішування (перемішування по Ібрагімову), отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, а саме:

Теорема 4.7. *Нехай на інтервалі часу від* $l-1$ *до* l *діє депозитна ставка* $r_{l-1}^k \ge r_k > 0,\ 1 \le k \le m,\ l=1,\ldots,$ *послідовність* $\tilde{Z}_j^k - \tilde{C}_j^k,\ j=1,2,\ldots$ *при кожному фіксованому* $1 \le k \le m$ *задовольняє умові рівномірно сильного перемішування з коефіцієнтом перемішування* $\varphi(\tau)$ *таким, що визначені функції*

$$L_{2p}(\propto,k)=\sum_{j=1}^{\infty}M\left|\tilde{Z}_j^k-\tilde{C}_j^k\right|^{2p}\prod_{\nu=0}^{j-1}\left(1+r_\nu^k\right)^{-2p}<+\infty,$$
$$a(\varphi,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi^{1/j(t)}(k)(k+1)^{j(t)-2}<+\infty, \varphi(0)=1, p\ge 1,$$

тоді справедлива оцінка

$$P\left\{R_l^k \ge 0, l=1,\ldots k=1,\ldots,m\right\} \ge$$
$$\ge 1-c_2a(\varphi,2p)a(\varphi,2)\sum_{k=1}^{m}\left[x^{(k)}\right]^{-2p}\left(L_{2p}(\infty,k)+\left(D_\infty^k\right)^{2p}\right).$$

Також у четвертому розділі розглядається функціонування страхової компанії, що працює на фінансовому (B,S)-ринку у дискретному часі, а саме: нехай ціни банківського рахунка та акцій еволюціонують згідно різницевим рівнянням:

$$\Delta B_l = rB_{l-1}, B_0>0, \Delta B_l = B_l - B_{l-1}, l=1,\ldots,n;$$
$$\Delta S_l = \rho_l S_{l-1}, S_0>0, \Delta S_l = S_l - S_{l-1}, l=1,\ldots,n,$$

де $\{\rho_l\}, l=1,\ldots,n$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які приймають два значення: b – з ймовірністю p та a – з ймовірністю $q=1-p$, причому $0<a<r<b$. В цьому випадку отримана оцінка нерозорення страхової компанії:

Теорема 4.9. *Якщо*

$$\bar{C}_i = C_i - MC_i,\ \bar{Z}_i = Z_i - MZ_i,\ M_{\bar{z}-\bar{c}}\left(\bar{Z}_k-\bar{C}_k\right)^2<+\infty,\ i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots n$$

а

$$M\left(\left[\bar{C}_i-\bar{Z}_i\right]/\Im_1^{i-1}\right)=0,\ \Im_1^i=\sigma\left(\bar{C}_1-\bar{Z}_1,\ldots,\bar{C}_i-\bar{Z}_i\right),\ i=1,\ldots,n,$$

причому послідовності $\left[\bar{C}_i - \bar{Z}_i\right]$, $\rho_i, i = 1,...,n$ *– незалежні між собою, то справедлива оцінка*

$$P\left(R_1(x) \geq 0,...,R_n(x) \geq 0\right) \geq$$

$$\geq 1 - \sum_{k=1}^{n} M\left(\bar{Z}_k - \bar{C}_k\right)^2 \left(\frac{p}{\left[x\prod_{l=1}^{k}\left[1 + r_{l-1} + u_{l-1}(b - r_{l-1})\right] + \sum_{i=1}^{k}(MC_i - MZ_i) \right]^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-p}{\left[x\prod_{l=1}^{k}\left[1 + r_{l-1} + u_{l-1}(a - r_{l-1})\right] + \sum_{i=1}^{k}(MC_i - MZ_i) \right]^2} \right).$$

Цей результат був отриманий за допомогою наступного узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї: нехай послідовність $X_1, X_2,..., X_n$ така, що

$$MX_i = 0, i = 1,...,n, M\left(X_j / X_1,...,X_{j-1}\right) = 0, j = 1,2,..., S_k = \sum_{l=1}^{k} X_l, k = 1,...,n,$$

тоді має місце нерівність

$$P(|S_1| < \alpha_1,...,|S_n| < \alpha_n) \geq 1 - \sum_{j=1}^{n} MX_j^2 M\frac{1}{\alpha_j^2}.$$

для випадкової послідовності $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$, що з ймовірністю 1 зростає та незалежна від послідовності $X_1, X_2,..., X_n$.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянуті різні моделі діяльності інвестора в неперервному та дискретному часі, вирішені відповідні інвестиційні та актуарні завдання. Розглянуті математичні моделі акцій, які, як було показано, на відміну від класичної моделі П. Самуельсона, враховують стрибки змін цін акцій.

Основні наукові результати роботи:

1. Виведено балансове рівняння, що описує еволюцію капіталу страхової компанії, що працює на (B,S)-ринку у випадку, коли ціна ризикового активу описується моделлю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою, яка є варіантом геометричного процесу Леві. Розглянуто випадки стохастичних і невипадкових страхових премій.
2. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності небанкрутства страхової компанії у випадках, коли процес

ризику описується класичною моделюю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.

3. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримані оцінки ймовірності страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, описуваного моделюю П.Самуельсона зі стрибкоподібною компонентою у випадках, коли процес ризику описується класичною моделлю Лундберга і моделлю Лундберга зі стохастичними преміями.

4. За допомогою нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї отримана оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку, з ціною ризикового активу, описуваного моделлю Кларка. Процес ризику описується класичною моделлю Лундберга.

5. Розв'язана інвестиційна задача Р.Мертона оптимізації портфеля активів і споживання таким чином, щоб розглянутий функціонал якості брав максимальне значення. В якості функціоналу якості була обрана дисконтова на очікувана корисність. В якості математичної моделі, що описує еволюцію ціни ризикового активу, була обрана модель Кларка. Розглянуто випадки інвесторів схильного до ризику, нейтрального до ризику і несхильного до ризику.

6. Розв'язана інвестиційна задача Р.Мертона для інвестора діяльність якого представляє собою компіляцію накопичувально-споживчого фонду та страхової компанії на (B,S)-ринку. У якості математичної моделі, що описує еволюцію ціни ризикового активу, була обрана модель Кларка.

7. Використовуючи нерівності Колмогорова, Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, нерівності С.А. Утєва для сум слабо залежних випадкових величин, були побудовані оцінки знизу для ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує у дискретному часі. Були розглянуті випадкові впливи: незалежні, пов'язані мартингальною залежністю, а також впливи, які задовольняють умовам сильного та рівномірно сильного перемішування.

8. Було отримано узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї для мартингал-різниць на випадок випадкових границь.

9. Використовуючи узагальнення нерівності Колмогорова-Гаєка-Рен'ї була побудована оцінка ймовірності нерозорення страхової компанії, що функціонує на (B,S)-ринку у дискретному часі. Також були представлена умова, за якої, робота з ризиковим активом давала більший ефект, ніж при вкладенні тільки на банківський рахунок.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Bondarev B.V. Estimates for non-ruin probability of the insurance company in the discrete time model / B.V. Bondarev, O.E. Sosnytskyy // Вісник

Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фізико-математичні науки. – 2013. – №1. – С. 7-14.
2. Бондарев Б.В. Некоторые задачи для модели Кларка II. Решение задачи Р.Мертона / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №5. – С. 99-111.
3. Бондарев Б.В. Некоторые задачи для модели Кларка. I. Оценка вероятности неразорения страховой компании / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – №2. – С.139-149.
4. Бондарев Б.В. Оценка вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B,S)-рынке. Дискретное время / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. – 2012. – №2. – С.66-74.
5. Бондарев Б.В. Применение неравенства Колмогорова-Гаека-Реньи для оценки вероятности неразорения страховой компании, работающей на (B,S)-рынке / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. – 2010. – №1-2. – С.23-62.
6. Сосницкий О.Е. Решение задачи о накопительно-потребительском фонде с функциями страховой компании. Модель Кларка / О.Е. Сосницкий // Прикладная статистика. Актуарная и финансовая математика. – 2012. – №1. – С.115-127.
7. Бондарев Б.В. Задача Р. Мертона с потреблением для модели Кларка / Б.В. Бондарев, О.Е. Сосницкий // Тезисы докладов шестой международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Современные задачи прикладной статистики, промышленной, актуарной и финансовой математики", Донецк. – 2012.
8. Сосницкий О.Е. Оценка вероятности неразорения страховой компании в дискретном времени / О.Е. Сосницкий // XXI International Conference "Problems of decision making under uncertainties", May 13-17, 2013, Skhidnytsia, Ukraine: abstracts. – P. 197-198.

АНОТАЦІЯ

Сосницький О.Є. Стохастичне моделювання інвестицій на фінансовому та страховому ринках. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2014.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню питань, пов'язаних з моделюванням діяльності інвестора на фінансовому та страховому ринках, а саме: моделювання цін ризикових активів, знаходження оптимальних управлінь портфелем активів, побудування оцінок для ймовірності нерозорення страхової компанії. В якості математичної моделі еволюції

ціни ризикового активу використовувалась модель П. Кларка та модифікація моделі П. Самуельсона, що включає стрибкоподібну компоненту. Розглядалось функціонування страхової компанії у неперервний та дискретний час.

Ключові слова: ймовірність нерозорення страхової компанії, фінансовий (B,S)-ринок, нерівність Колмогорова-Гаєка-Рен'ї, безарбітражність, оптимальні управління.

АННОТАЦИЯ

Сосницкий О.Е. Стохастическое моделирование инвестиций на финансовом и страховом рынках. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2014.

Диссертационная работа посвящена решению вопросов, связанных с моделированием деятельности инвестора на финансовом и страховом рынках, а именно: моделирование цен рисковых активов, нахождение оптимальных управлений портфелем активов, построение оценок для вероятности неразорения страховой компании.

В работе было выведено балансовое уравнение, которое описывает эволюцию капитала страховой компании, которая работает на (B,S)-рынке, в случае, когда эволюция цены рискового актива описывается моделью П.Самуэльсона со скачкообразной компонентой.

При помощи неравенства Колмогорова-Гаека-Реньи получены оценки вероятности неразорения страховой компании в случаях, когда процесс риска описывается классической моделью Лундберга и моделью Лундберга со стохастическими премиями. Также были получены оценки вероятности неразорения страховой компании, которая функционирует на (B,S)-рынке, с ценкой рискового актива, описываемого моделью П.Самуэльсона со скачкообразной компонентой в случаях, когда процесс риска описывается классической моделью Лундберга и моделью Лундберга со стохастическими премиями.

Решена инвестиционная задача Р.Мертона оптимизации портфеля активов и потребления таким образом, чтобы рассматриваемый функционал качества принимал максимальное значение. В качестве функционала качества было выбрано среднее суммарное дисконтированное потребление. В качестве математической модели, описывающей эволюцию рискового актива, была выбрана модель Кларка. Рассмотрены случаи инвестора склонного к риску, нейтрального к риску и несклонного к риску. Также была решена задача Р.Мертона для инвестора,

деятельность которого представляет собой компиляцию накопительно-потребительского фонда и страховой компании на (B,S)-рынке.

При помощи неравенства Колмогорова-Гаека-Реньи получена оценка вероятности неразорения страховой компании, которая функционирует на (B,S)-рынке, с ценой рискового актива, описываемого моделью П.Кларка в случае, когда процесс риска описывается классической моделью Лундберга.

Используя неравенства Колмогорова, Колмогорова-Гаека-Реньи, неравенства С.А. Утева для сумм слабо зависимых случайных величин, были построены оценки снизу для вероятности неразорения страховой компании, которая функционирует в дискретном времени. Были рассмотрены случайные воздействия: независимые, связанные мартингальной зависимостью, а также воздействия, которые удовлетворяют условиям сильного и равномерно сильного перемешивания.

Было получено обобщение неравенства Колмогорова-Гаека-Реньи для мартингал-разностей на случай случайных границ. Используя это обобщение, была построена оценка вероятности неразорения страховой компании, функционирующей на (B,S)-рынке в дискретном времени. Также было получено условие такое, чтобы работа с рисковым активом давала больший эффект, нежели при вложение только на банковский счет.

Ключевые слова: вероятность неразорения страховой компании, финансовый (B,S)-рынок, неравенство Колмогорова-Гаека-Реньи, безарбитражность, оптимальные управления.

ANNOTATION

Sosnytskyj O.E. Stochastic modeling of investments on financial and insurance market. – Manuscript.

Thesis for scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in speciality 01.01.05 – theory of probability and mathematical statistics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of the MES of Ukraine, Kiev, 2014.

The thesis is devoted to solution of problems related with the modeling of investor's activities at the financial and insurance markets, namely: modeling of risky asset prices, finding the optimal management of assets portfolio, estimates for the probability of non-ruin of an insurance company. As mathematical model of the evolution of risky asset prices the model of P. Clark is used together with the modification of the P. Samuelson model, which includes jump component. The functioning of the insurance company in continuous and discrete time is under investigation.

Keywords: probability of non-ruin, financial (B,S)-market, Kolmogorov-Hajek-Renyi inequality, non-arbitrary, no-arbitrage, optimal control.