Ральченко Костянтин Володимирович, доцент кафе&shy;дри теорії ймовірностей, статистики та актуарної мате&shy;матики Київського національного університету імені Тараса Шевченка: &laquo;Стохастичний аналіз та статистич&shy;не оцінювання для дробових і споріднених процесів&raquo; (01.01.05 - теорія ймовірностей та математична статис&shy;тика). Спецрада Д 26.001.37 у Київському національ&shy;ному університеті імені Тараса Шевченка МОН України

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Квалiфiкацiйна наукова

праця на правах рукопису

Ральченко Костянтин Володимирович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦIЯ

Стохастичний аналiз та статистичне

оцiнювання для дробових

i спорiднених процесiв

01.01.05 — теорiя ймовiрностей i математична статистика

Подається на здобуття наукового ступеня

доктора фiзико-математичних наук

Дисертацiя мiстить результати власних дослiджень. Використання iдей, результатiв i текстiв iнших авторiв мають посилання на вiдповiдне джерело.

К. В. Ральченко

Науковий консультант

Мiшура Юлiя Степанiвна,

доктор фiзико-математичних наук, професор

Київ — 2019

Змiст

Вступ 19

1 Огляд лiтератури за темою дисертацiї 44

1.1 Огляд за роздiлом 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44

1.2 Огляд за роздiлом 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

1.3 Огляд за роздiлом 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

1.4 Огляд за роздiлом 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

1.5 Огляд за роздiлом 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

2 Попереднi вiдомостi. Деякi стохастичнi моделi з дробовим броунiвським рухом та спорiдненими процесами 51

2.1 Дробовий броунiвський рух . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

2.1.1 Означення та основнi властивостi . . . . . . . . . . . . . . 51

2.1.2 Оцiнки дробової похiдної . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

2.2 Дробовий процес Орнштейна – Уленбека . . . . . . . . . . . . . . 55

2.2.1 Коварiацiйна функцiя . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56

2.2.2 Iмовiрнiсть потрапляння в нуль . . . . . . . . . . . . . . . . 62

2.3 Дробовий процес Кокса – Iнгерсолла – Росса . . . . . . . . . . . . . 68

2.3.1 Дробовий процес Кокса – Iнгерсолла – Росса при H ∈ (2/3, 1) 69

2.3.2 Узагальнення дробового процесу Кокса – Iнгерсолла – Росса

на випадок H ∈ (0, 1) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70

2.4 Стохастичне iнтегрування. Процеси Вольтерра, якi керуються

шумом Левi та мартингальним шумом . . . . . . . . . . . . . . . 73

2.4.1 Iнтегрування вiдносно процесiв Левi . . . . . . . . . . . . . 73

2.4.2 Приклад процесу Левi як iнтегратора: субординований

вiнерiвський процес . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84

15

16

2.4.3 Елементи дробового числення та iснування узагальнених

iнтегралiв Лебега – Стiлтьєса . . . . . . . . . . . . . . . . . . 90

2.4.4 Умови, за яких процес Y· =

∫ ·

0

д(·,s)dZs є прийнятним (p, α)-

iнтегратором . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 94

3 Мультидробовi та неевклiдовi узагальнення дробових процесiв 106

3.1 Мультидробовий процес Пуассона, мультистiйкий субординатор

та пов’язанi з ними граничнi теореми . . . . . . . . . . . . . . . . 106

3.1.1 Мультистiйкий субординатор i мультидробовий процес

Пуассона . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107

3.1.2 Граничнi теореми . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110

3.2 Неевклiдове узагальнення дробового броунiвського поля . . . . . 117

3.2.1 Норми та зiрковi тiла . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117

3.2.2 Дробове броунiвське поле Мiнковського . . . . . . . . . . . 119

3.3 Дробовi пуассонiвськi поля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 126

3.3.1 Означення та властивiсть масштабування . . . . . . . . . 127

3.3.2 Зв’язок з мультидробовим броунiвським полем Мiновського 128

3.3.3 Збiжнiсть до мультидробового броунiвського поля Мiнковського при H =

1

2

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130

3.3.4 Iншi конструкцiї дробових пуассонiвських полiв . . . . . 134

3.4 Асимптотичне зростання траєкторiй мультидробового броунiвського руху . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 136

3.4.1 Експоненцiйнi максимальнi оцiнки та асимптотичне зростання траєкторiй гауссових процесiв . . . . . . . . . . . . 136

3.4.2 Асимптотичне зростання з iмовiрнiстю 1 мультидробового

броунiвського руху та його приростiв . . . . . . . . . . . . 150

4 Стохастичнi диференцiальнi рiвняння з частинними похiдними 164

4.1 Iснування та єдинiсть м’якого розв’язку дробового рiвняння теплопровiдностi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 164

4.1.1 Попереднi вiдомостi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 166

4.1.2 Властивостi функцiї Грiна . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170

4.1.3 Апрiорнi оцiнки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173

4.1.4 Iснування та єдинiсть м’якого розв’язку . . . . . . . . . . . 185

17

4.2 Iснування та єдинiсть м’якого розв’язку стохастичного рiвняння

теплопровiдностi з бiлим та дробовим шумами . . . . . . . . . . 192

4.2.1 Постановка задачi та основний результат . . . . . . . . . . 193

4.2.2 Допомiжнi твердження . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195

4.2.3 Доведення теореми 4.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 210

5 Оцiнювання параметра зсуву в дифузiйних моделях зi стохастичною волатильнiстю 216

5.1 Асимптотична нормальнiсть дискретизованої оцiнки максимальної вiрогiдностi параметра зсуву в однорiднiй дифузiйнiй моделi 216

5.1.1 Опис моделi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216

5.1.2 Асимптотичнi властивостi оцiнки . . . . . . . . . . . . . . 218

5.1.3 Результати моделювання . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226

5.2 Iснування та єдинiсть розв’язкiв стохастичних диференцiальних

рiвнянь зi стохастичною волатильнiстю . . . . . . . . . . . . . . . 228

5.2.1 Рiвняння з мультиплiкативною стохастичною волатильнiстю 228

5.2.2 Рiвняння з узагальненою стохастичною волатильнiстю . 237

5.3 Оцiнювання параметра зсуву в моделях зi стохастичною волатильнiстю . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 240

5.3.1 Загальнi результати щодо строгої конзистентностi оцiнок

у дифузiйнiй моделi зi стохастичною волатильнiстю . . . 240

5.3.2 Лiнiйне рiвняння зi стохастичною волатильнiстю . . . . . 244

5.3.3 Процес Орнштейна – Уленбека зi стохастичною волатильнiстю . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251

6 Оцiнювання параметра зсуву в дробових i мультидробових моделях 260

6.1 Оцiнювання в однорiднiй дробовiй дифузiйнiй моделi за дискретними спостереженнями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 260

6.1.1 Оцiнка максимальної вiрогiдностi . . . . . . . . . . . . . . 261

6.1.2 Оцiнки для розв’язку однорiдного стохастичного диференцiального рiвняння, керованого дробовим броунiвським

рухом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 267

18

6.1.3 Оцiнювання параметра зсуву за дискретними спостереженнями в однорiднiй дробовiй дифузiйнiй моделi . . . . . 270

6.1.4 Моделювання . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 279

6.2 Статистичнi задачi для дробового процесу Орнштейна – Уленбека 281

6.2.1 Оцiнювання параметра зсуву в неергодичному випадку

випадку θ > 0 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 281

6.2.2 Оцiнки ергодичного типу для випадку θ < 0 . . . . . . . . 290

6.2.3 Перевiрка гiпотез про знак параметра зсуву . . . . . . . . 292

6.3 Оцiнювання параметра зсуву в моделях з мультидробовим броунiвським рухом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 300

6.3.1 Лiнiйна мультидробова модель . . . . . . . . . . . . . . . . 301

6.3.2 Мультидробовий процес Орнштейна – Уленбека . . . . . 302

6.4 Оцiнки максимальної вiрогiдностi параметра зсуву гауссового

процесу зi стацiонарними приростами . . . . . . . . . . . . . . . . 308

6.4.1 Оцiнка максимальної вiрогiдностi за дискретними спостереженнями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 308

6.4.2 Оцiнка максимальної вiрогiдностi за неперервними спостереженнями . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 314

Висновки 325

Список використаних джерел 328

Висновки

Удисертацйнйроботодержанонаступнрезультати

•ДлядробовогопроцесуОрнштейна–Уленбеканаведеноверхнюоцнкудля

ймоврностпотрапляннявнульзаскнченнийчасЯкдопомжнийрезультат

одержаноформулудляковарацйноїфункцїцьогопроцесуВизначено

дробовийпроцесКокса–нгерсолла–Россаякийєквадратомдробового

процесуОрнштейна–Уленбекадопершогомоментупотрапляннявнуль

•ЗадопомогоюдробовогочисленнявведенопотраєкторнентегруваннявдноснопроцесвВольтерраяккеруютьсяшумомЛевабомартингальним

шумомВстановленоумовиснуваннянтегралавтермнахдробовихпохдних

тавивченойоговластивост

•ВведеномультистйкийсубординаторякийузагальнюєстйкийсубординаторнавипадокзмнноговчаспараметрастйкостЗайогодопомогою

означеномультидробовийпроцесПуассонаДослдженовластивостцихпроцесвтавстановленозбжнстьвипадковихблуканьзнеперервнимчасомдо

мультидробовогопроцесуПуассона

•ДослдженоузагальненнядробовогоброунвськогополяЛеввевклдовому

просторякебазуєтьсяназамневклдовоїнорминшоюнормоюв

зокремавиведенокритерйснуваннятантегральнзображенняВведенасм’я

процесвзбгаєтьсязсм’єювсхсамоподбнихгауссовихполвзстацонарнимиприростами

•Введенодекльканеевклдовихварантвдробовогопуассонвськогополята

показанощовонимаютьоднаковуковарацйнуструктурузнеевклдовим

дробовимброунвськимполемтазбгаютьсядоньогоПараметриформи

пуассонвськогоброунвськогополвпов’язанмжсобоюзадопомогою

перетвореньопуклоїгеометрїасамерадальногосередньоготлапорядку

таполярногопроектування





•ОдержаноасимптотичноцнкизмоврнстюшвидкостзростаннятраєкторймультидробовогоброунвськогорухутайогоприроствЯкдопомжн

результатищомаютьсамостйнезначенняодержаноасимптотичноцнкиз

моврнстюшвидкостзростаннятраєкторйгауссовогопроцесутадеяких

функцоналввднього

•Дляпевногокласунеавтономнихпараболчнихстохастичнихдиференцальнихрвняньзчастиннимипохднимивизначенихнаобмеженйпдмножин

⊂

керованих



значнимдробовимброунвськимрухомзндексом

Хюрставстановленоновийрезультатщодоснуваннятаєдиност

розв’язкуАналогчнутеоремуотриманодлязмшаногостохастичногодиференцальногорвняннязчастиннимипохднимиякемститьзвичайний

дробовий



значнброунвськрухи

•Доведеноасимптотичнунормальнстьдискретизованоїоцнкимаксимальної

врогдностдляпараметразсувуводнорднйергодичнйдифузйнймодел

•Доведенотеоремиснуваннятаєдиностдляслабкихсильнихрозв’язкв

стохастичногодиференцальногорвняннякоефцєнтдифузїякогоєфункцєювддеякогоузгодженогопроцесуПобудованооцнкипараметразсуву

цьогорвнянняметодаминайменшихквадратвтамаксимальноїврогдноствстановленоумовистрогоїконсистентностодержанихоцнокДетально

дослдженодеклькаприкладвтакихмоделейзокремалнйнумодельта

модельОрнштейна–Уленбеказстохастичноюволатильнстю

•Побудованострогоконзистентноцнкиневдомогопараметразсувувстохастичномудиференцальномурвняннкерованомудробовимброунвським

рухомякбазуютьсянадискретнихспостереженняхрозв’язкутакогорвняння

•ПобудованооцнкиневдомогопараметразсувудробовогопроцесуОрнштейна–Уленбекаякбазуютьсянадискретнихспостереженняхцьогопроцесу

Розробленоновийметодперевркигпотезипрознакпараметразсувута

доведеноконсистентнстьпобудованоготесту

•Побудованооцнкуметодунайменшихквадратвдляневдомогопараметра

зсувувмультидробовймоделОрнштейна–Уленбекавстановленоїїстрогу

консистентнстьвнеергодичномувипадку

•Дослдженорегресйнумодельθ

деθ—невдомийпараметр

—центрованийгауссвпроцесзстацонарнимиприростамиПобудовано



оцнкимаксимальноїврогдностпараметразсувуθнаосновдискретних

танеперервнихспостереженьтраєкторїпроцесутадоведеноїхнюстрогу

консистентнсть