

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи



Крупницын Евгений Стниславович

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЯДОВ НЕКОТОРЫХ
КЛАССОВ**

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре математического анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Владимир Григорьевич Чирский** доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Добровольский Николай Михайлович**, доктор физ.-мат. наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет, зав. кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии

Горелов Василий Александрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент, ФГБОУ ВО «НИУ «МЭИ», доцент кафедры математического и компьютерного моделирования

Пачев Урусби Мухамедович, доктор физ.-мат. наук, профессор, ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений

Защита состоится «16» октября 2020 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/302880902/>

Автореферат разослан «16» сентября 2020 года.

Ученый секретарь диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ,
д.ф.-м.н, доцент



Мануйлов В.М.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разботанности. В диссертации рассматриваются количественные задачи теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексное число α называется алгебраическим, если существует многочлен $P(x) \not\equiv 0$ с рациональными коэффициентами, такой что $P(\alpha) = 0$.*

Степенью алгебраического числа α называется степень неприводимого многочлена с рациональными коэффициентами, имеющего α своим корнем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексное число ζ , не являющееся алгебраическим, называется трансцендентным.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Комплексные числа $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ называются алгебраически независимыми, если для любого многочлена, отличного от тождественного нуля, $P(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных с рациональными коэффициентами выполнено неравенство $P(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \neq 0$. В противном случае эти числа называются алгебраически зависимыми.*

В 1844 г. Ж. Лиувиль^{1 2} доказал существование трансцендентных чисел, откуда следовал достаточный признак трансцендентности.

ТЕОРЕМА (Лиувилля). *Если α — алгебраическое число, степени $n \geq 2$, то существует такая постоянная $c = c(\alpha)$, что для любых целых рациональных p и q , $q > 0$, справедливо неравенство*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(\alpha)}{q^n}.$$

СЛЕДСТВИЕ (Достаточное условие трансцендентности). *Пусть α — иррациональное число. Если для любой константы $c > 0$ и любого натурального числа n существует рациональное число $\frac{p}{q}$, такое что*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c}{q^n},$$

¹Liouville J. Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même reductible à des irrationnelles algébriques //Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), no 18, 1844, pp. 883-885.

²Liouville J. Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le Compte rendu de la dernière séance //Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), no 18, 1844, pp. 910-911.

то α — трансцендентное число.

При помощи этого признака были построены первые примеры трансцендентных чисел.

Лиувилль показал, что иррациональное число с очень хорошими рациональными приближениями трансцендентно. В более общем случае подход Лиувилля позволяет конструировать алгебраически независимые числа.

Лиувиллевы числа являются U -числами по классификации Малера³.

Лиувиллевым числам посвящены многие работы. Упомянем, Э. Малле^{4 5 67}, К. Малера⁸, Кабаннэ⁹, П. Эрдёша¹⁰. В работах Дж. фон Неймана¹¹, Х. Кнезера¹², Ф. Куйпера и Я. Попкена¹³, В. Шмидта^{14 15} и А. Френкеля^{16 17} строятся примеры множеств алгебраически независимых чисел Лиувилля.

Лиувиллевы числа до сих пор представляют собой объект исследований многих математиков.

³Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus //J. Reine ang. Math., no 166, 1932, pp. 118-136.

⁴Maillet E. Sur certains nombres transcendants //Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), no 143, 1906, pp. 873-874.

⁵Maillet E. Sur les nombres de Liouville et les fractions continues quasi-périodiques //Ass. Franc. Congress de Lyon 1906, no 35, 1906, pp. 52-53.

⁶Maillet E. Sur quelques propriétés des nombres transcendants de Liouville //Bull. Soc. Math. France, no 50, 1922, pp. 74-99.

⁷Maillet E. Nombres transcendants de Liouville (Question 5119) //L'Intermédiaire Math., no 2(1), 1922, pp. 136-137.

⁸Mahler K. On the theorem of Liouville in fields of positive characteristic //Canad. Journ. Math., no 1, 1949, pp. 397-400.

⁹Cabannes H. Applications des fractions continues a la formation de nombres transcendants //Revue Sci., no 82, 1944, pp. 365-367.

¹⁰Erdős P. Representation of real numbers as sums and product of Liouville numbers// Bull. Amer. Math. Soc., vol. 68, no 5, 1962, pp. 475-478.

¹¹J. von Neuman Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen //Math. Ann., vol. 99, 1928, pp. 134-141.

¹²Kneser H. Eine kontinuumsmächtige, algebraisch unabhängige Menge reeller Zahlen //Bull. Soc. Math. Belg., no 12, 1960, pp. 23-27.

¹³Kuiper F., Popken J. On the so-called von Neumann numbers //Proc. Akad. Wet. Amst., no A 65, 1962, pp. 385-390.

¹⁴Schmidt W. Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers //Bull. Amer. Math. Soc., vol. 68, no 5, 1962, pp. 465-478.

¹⁵Schmidt W. Remark on my paper «Simultaneous approximation and algebraic independence of numbers» //Bull. Amer. Math. Soc., vol. 56, no 2, 1963, pp. 465-478.

¹⁶Fraenkel A.S. Transcendental numbers and a conjecture of Erdős and Mahler //ourn. Lond. Math. Soc., vol. 39, 1964, pp. 405-416.

¹⁷Fraenkel A.S. Distance to nearest integer and algebraic independence of certain real numbers //Proc. Amer. Math. Soc., vol. 16, no 1, 1965, pp. 154-160.

Вопросами алгебраической независимости лиувиллевых чисел посвящена работа В. Адамса¹⁸. Основными результатами работы Адамса являются доказательства следующих теорем.

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha_1 = \sum_{v=1}^{\infty} p_1^{-k_v}$, $\alpha_2 = \sum_{v=1}^{\infty} p_2^{-k_v}$ и $\alpha_3 = \sum_{v=1}^{\infty} p_3^{-k_v}$ лиувиллевы числа, $p_1 \neq p_2$, $P > 2$ — простое число такое что

$$P \mid p_3, \quad P \nmid p_1, \quad \text{и} \quad P-1 \mid k_v$$

для любого достаточно большого числа v .

Пусть также последовательность натуральных чисел N_j строго возрастает и последовательность N_j имеет конечное число предельных точек в p -адических целых числах $\mathbb{Z}_p$ и такая что

$$\text{ord}_P k_{N_j} < \text{ord}_P k_v \quad \text{для всех} \quad v > N_j$$

и

$$\frac{k_{N_j-1}}{\text{ord}_P k_{N_j}} \rightarrow \infty \quad (j \rightarrow \infty).$$

Тогда числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ алгебраически независимы.

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha_i = \sum_{v=1}^{\infty} p_i^{-k_v}$ — лиувиллево число ($1 \leq i \leq n$), где $p_1, p_2, \dots, p_n$ мультипликативно независимые целые числа большие 1. Тогда $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ алгебраически независимы.

В 1935 году К. Малер¹⁹ опубликовал первую работу про p -адические трансцендентные числа, в которой был доказан p -адический аналог теоремы Гельфонда-Шнайдера.

ТЕОРЕМА. Пусть α и β p -адические целые алгебраические числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < |\alpha - 1|_p \leq \frac{1}{p}, \quad 0 < |\beta - 1|_p \leq \frac{1}{p}.$$

Тогда $\frac{\ln_p \alpha}{\ln_p \beta}$ либо рациональное, либо трансцендентное p -адическое число.

¹⁸Adams W. On the algebraic independence of certain Liouville numbers //Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 13, 1978, pp. 41-47.

¹⁹Mahler K. Über transzendente p -adische Zahlen //Compos. Math., vol. 2, 1935, pp. 259-275.

(Под $\ln(1+z)$ здесь понимается стандартное Тейлоровское разложение этой функции. При подстановке сюда вместо z $\alpha - 1$ и $\beta - 1$ получаем сходящиеся в p -адической области ряды, которые и обозначаются $\ln_p \alpha$ $\ln_p \beta$.)

В работе К. Малера²⁰ описаны свойства p -адических чисел и рассматриваемых в диссертации g -адических чисел. Полиадические числа, также рассматриваемые в диссертации, описаны в книге А.Г. Постникова²¹.

Поле p -адических чисел будем обозначать $\mathbb{Q}_p$, кольцо целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$, кольцо целых g -адических чисел $\mathbb{Q}_g$. Свойства этих объектов описаны в главах 1 и 2, соответственно.

Элементы кольца целых полиадических (глава 3) чисел имеют каноническое представление в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m m!, \quad a_m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_m \leq m. \quad (1)$$

Степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители равна $\frac{n - S_n}{p - 1}$, где S_n обозначает сумму цифр в p -ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p при $n \rightarrow \infty$ выполняется соотношение $|a_n n!|_p \rightarrow 0$, достаточное для того, чтобы ряд (1) сходиллся в поле $\mathbb{Q}_p$. Сумму ряда (1) в поле $\mathbb{Q}_p$ обозначим $\mathbf{a}^{(p)}$. Само полиадическое число $\mathbf{a}$ можно рассматривать как бесконечный вектор с координатами $\mathbf{a}^{(p_n)}$, где p_n — простое число с номером n .

Для вопросов, рассматриваемых в диссертационной работе, важно, что кольцо целых полиадических чисел представляет собой прямое произведение по всем простым числам p колец целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p$.

Введем дополнительное определение. Предположим, что $\alpha \in \mathbb{Z}$ и что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n!$ сходится в кольце $\mathbb{Z}_p$ для всех простых чисел p . Как отмечено выше, это позволяет рассматривать этот ряд, как элемент бесконечного прямого произведения этих колец. Это прямое произведение имеет естественную структуру кольца, операциям в котором соответствуют операции по каждой координате. Для элемента $\mathbf{a}$ этого прямого произведения обозначим $\mathbf{a}^{(p)}$ его координату в кольце $\mathbb{Z}_p$.

²⁰Mahler K. Introduction to p -adic numbers and their functions, London, Cambridge University Press, 1981.

²¹Постников, А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971.

Если существует $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля такой, что $P(\mathfrak{a}) = 0$ (иными словами, $P(\mathfrak{a}^{(p)}) = 0$ в каждом кольце $\mathbb{Z}_p$ этого прямого произведения), то будем говорить, что $\mathfrak{a}$ — алгебраический элемент. Если элемент $\mathfrak{a}$ не является алгебраическим, то его называют трансцендентным. Трансцендентность элемента означает, что для любого многочлена $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует простое число p , такое что $P(\mathfrak{a}^{(p)}) \neq 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p$. Назовем элемент $\mathfrak{a}$ бесконечно трансцендентным, если для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , такое что $P(\mathfrak{a}^{(p)}) \neq 0$ в кольце $\mathbb{Z}_p$. Элемент $\mathfrak{a}$ называется глобально трансцендентным, если для любого $P(x)$ — многочлена с рациональными коэффициентами, отличного от тождественного нуля, неравенство $P(\mathfrak{a}^{(p)}) \neq 0$ выполняется во всех кольцах $\mathbb{Z}_p$ рассматриваемого прямого произведения.

Примерами глобально трансцендентных чисел служат ряды $\sum_{k=0}^{\infty} n_k!$, где $\{n_k\}$ — достаточно быстро растущая последовательность натуральных чисел. Более того, ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n_k!}{p_k^{m_k}}$, в которых p_k — простое число с номером k , а $\{n_k\}$ и $\{m_k\}$ — достаточно быстро растущие последовательности натуральных чисел, дают примеры чисел Лиувиллевых, следовательно, трансцендентных как в поле $\mathbb{R}$, так и в любом поле $\mathbb{Q}_p$. Действительно, быстрый рост последовательности $\{n_k\}$ обеспечивает трансцендентность суммы этого ряда в любом поле $\mathbb{Q}_p$, а быстрый рост последовательности $\{m_k\}$ — трансцендентность суммы этого ряда в поле $\mathbb{R}$.

Отметим, что из бесконечной трансцендентности элемента не следует трансцендентность $\mathfrak{a}^{(p)}$ хотя бы для одного простого числа p и кольца $\mathbb{Z}_p$. Например, элемент $(1, 2, \dots, n, \dots)$ прямого произведения полей $\mathbb{Q}_p$ (координата которого равна n в поле $\mathbb{Q}_{p_n}$ соответствующем n -му простому числу p_n) бесконечно трансцендентен. Действительно, любой $P(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля, может обратиться в ноль лишь на конечном множестве натуральных чисел.

Для совокупности элементов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ аналогичным образом определяются понятия их алгебраической зависимости, алгебраической независимости, бесконечной алгебраической независимости и глобальной алгебраической независимости. Достаточно вместо многочлена $P(x)$ рассмотреть $P(x_1, \dots, x_m)$ — многочлен с рациональными коэффициентами, отличный от тождественного нуля.

Из доказанных в главе 3 диссертации теорем следует, в частности, глобальная алгебраическая независимость рассматриваемых в этих теоремах чисел.

Вопросам трансцендентности в p -адической области посвящено не так много работ, отметим, например, работу В. Адамса²².

Кроме теорем об трансцендентности и алгебраической независимости чисел, носящих качественный характер, важную роль в теории трансцендентных чисел играет, так называемый, количественный результат. К ним относятся оценки линейных форм и многочленов от совокупностей чисел, оценки мер иррациональностей, линейной независимости, мер трансцендентности и мер алгебраической независимости совокупностей чисел. Эти величины определяются следующим образом.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — действительные или комплексные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мерой алгебраической независимости чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $m \geq 2$ называется функция

$$L = L(\alpha_1, \dots, \alpha_m; H) = \min |a_1 \alpha_1, \dots, a_m \alpha_m|,$$

где H — натуральное число, a_k — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $|a_k| \leq H$, $k = 1, \dots, m$ $|a_1| + \dots + |a_m| > 0$ и минимум берется по всем числам a_k удовлетворяющим указанным неравенствам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мерой алгебраической независимости чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, $m \geq 1$ называется функция от s и H :

$$\Phi = \Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_m; s; H) = \min |(P(\alpha_1, \dots, \alpha_m))|,$$

где s и H — натуральные числа, отличный от тождественного нуля многочлен $P = P(x_1, \dots, x_m)$ степени s по совокупности переменных имеет

²²Adams W. Transcendental numbers in the p -adic domain// Amer. J. Math., vol. 88, 1966, pp. 279-307.

целые коэффициенты, абсолютные величины которых не превосходят числа H и минимум берется по всем многочленам P , удовлетворяющим указанным условиям.

В работе Цайсова²³ доказана теорема

ТЕОРЕМА. *Существует абсолютная постоянная S_0 такая, что неравенство*

$$\left| Q \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k!} \right) \right| > \exp \{ -10 (N^N + NS(\log S)^2) \}$$

выполняется для всех неприводимых многочленов $Q \in \mathbb{Z}[z]$ степени $N \geq 1$ и высоты $S > S_0$.

Основная трудность в доказательстве этой теоремы состояла в доказательстве отличия от нуля этого многочлена в приближающей точке.

В диссертационной работе при рассмотрении p -адических, g -адических и полиадических лиувиллевых чисел эту трудность удастся обойти, используя известную в алгебре лемму о границе положительных корней многочлена.

Цель и задачи работы

1. Получение оценок снизу для многочленов от некоторых p -адических чисел.
2. Получение оценок снизу для многочленов от некоторых g -адических чисел.
3. Получение оценок снизу для многочленов от некоторых полиадических чисел.

Методы исследования В диссертации используются методы теории алгебраических чисел, методы общей алгебры, методы классического математического и неархимедова анализа.

Объект и предмет исследования Объектом исследования служат лиувиллевы p -адические, лиувиллевы g -адические и лиувиллевы полиадические числа.

²³Cijsouw P.L. Transcendence measures, Amsterdam, Acad. Proefschrift, 1972.

Предмет исследования — оценки снизу многочленов от лиувиллевых p -адических, лиувиллевых g -адических и лиувиллевых полиадических чисел.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Их описание приведено в разделе «Содержание диссертации»

Положения выносимые на защиту

- способы доказательства отличия от нуля рассматриваемого многочлена в точках, приближающих исследуемые совокупности лиувиллевых чисел;
- оценки многочлена от одного p -адического лиувиллева числа и совокупности p -адических лиувиллевых чисел;
- оценки многочлена от одного g -адического лиувиллева числа и совокупности g -адических лиувиллевых чисел;
- оценки многочлена от одного полиадического лиувиллева числа и совокупности полиадических лиувиллевых чисел.

Практическая и теоретическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты являются новыми и дополняют известные факты о лиувиллевых числах в областях с неархимедовыми нормированиями. Они будут использованы при подготовке специальных курсов для студентов и магистрантов.

Степень достоверности и апробации результатов Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях:

- XVII международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессора Н.И. Фельдмана и девяностолетию со дня рождения профессоров А.И. Виноградова, А.В. Малышева и Б.Ф. Скубенко, Тула, 23-28 сентября 2019.
- XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная

столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. Тула, 28 – 31 мая 2018.

- IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики». Кабардино-Балкария, 22 – 26 мая 2018.
- Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и физики». Нальчик-Терск, 17 – 21 мая 2017.
- Международная конференция «Математика и Информатика». Москва, 14 – 16 марта 2016.
- XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения». Тула, 25 – 30 мая 2015.
- Международная конференция «Алгебра и приложения», посвященная 100 – летию со дня рождения Л.А. Калужнина. Нальчик, 6 – 11 сентября 2014.
- Московский семинар по теории чисел. Москва, 07.02.2014
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2013». Москва, 2013.
- IX Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая 80-летию со дня рождения профессора Мартина Давидовича Гриндлингера. Тула, 2012.
- Всероссийская конференция, посвящённая 110-летию Математического факультета МПГУ. Москва, 2011.
- VII Международная научная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвящённая памяти профессора Анатолия Алексеевича Карацубы. Тула, 2010.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, которые индексируются в международной базе Scopus или входят в

список рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности. Список работ приведен в конце автореферата. В работе, написанной совместно с В.Г. Чирским, соавтору принадлежит постановка задачи и выбор метода доказательства результатов.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, библиографического списка. Общий объём — 72 страницы. Библиографический список содержит 54 наименования.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава посвящена исследованию лиувиллевых p -адических чисел и получению оценок снизу для многочленов от некоторых совокупностей p -адических чисел.

Пусть $\gamma(x)$ — возрастающая функция такая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\gamma(x+1)}{\gamma(x)} = \infty$ и $\gamma(n) \in \mathbb{N}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Пусть p — фиксированное простое число, $a(n)$ — натуральнозначная функция такая, что $1 \leq a(n) < p$. Обозначим $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)p^{\gamma(n)}$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0(d)$ выполняется неравенство*

$$|P(\alpha)|_p \geq \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{p^2}{p-1} \right)^d p^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_p H)+1))} \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n!}.$$

Тогда для любого натурального числа d и любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_p \geq \left(H(d+1) \left(\frac{p}{p-1} \right)^d \right)^{-1} H^{-d(\ln \log_p H)^{1+\varepsilon}}.$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} p^{\gamma_i(n)}$, $i = 1, \dots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leq a_{n,i} < p$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{i+1}(n)}{\gamma_i(n)} = \infty, \quad i = 1, \dots, m-1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$, при условии $H \geq H_0(d)$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p > H^{-1} \left(\frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left(p^{\gamma_m(\tau^{-1}(H)+1)} \right)^{-d},$$

где $\tau^{-1}(x)$ — обратная функция к функции $\tau(x) = \gamma_1(x+1) - d(\gamma_m(x)+1)$.

ТЕОРЕМА 1.4. Любое целое p -адическое число представимо суммой двух Лиувиллевых чисел.

Вторая глава посвящена исследованию лиувиллевых g -адических чисел и получению оценок снизу для многочленов от некоторых совокупностей g -адических чисел.

Пусть $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, $a(n), \gamma(n)$ — натуральнозначные функции такие, что $1 \leq a(n) < g$, $\gamma(n)$ возрастающая и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma(n+1)}{\gamma(n)} = \infty$. Обозначим $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) g^{\gamma(n)}$.

ТЕОРЕМА 2.5. Для любого натурального числа d найдется постоянная $H_0(d)$ такая, что для каждого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0(d)$ выполняется неравенство

$$|P(\alpha)|_g \geq \left(H \cdot (d+1) \cdot \left(\frac{g^2}{g-1} \right)^d g^{d(\gamma(\gamma^{-1}(\log_g H)+1))} \right)^{-1}.$$

ЛЕММА 2.1. Для любого целого числа a , выполняется неравенство

$$|a|_g \geq \frac{1}{|a|}.$$

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\varepsilon > 0$,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} g^{n!}.$$

Существует эффективная постоянная $H_0 = H_0(\varepsilon, d)$ такая, что для любого отличного от нуля многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени d и высоты $H \geq H_0$ выполнена оценка

$$|P(\alpha)|_g \geq \left(H(d+1) \left(\frac{g}{g-1} \right)^d \right)^{-d} H^{-d(\ln \log_g H)^{1+\varepsilon}}.$$

Пусть $\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i} g^{\gamma_i(n)}$, $i = 1, \dots, m$, где $a_{n,i} \in \mathbb{N}$ и $1 \leq a_{n,i} < g$. Пусть функции $\gamma_i(x)$ возрастающие, такие что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{i+1}(n)}{\gamma_i(n)} = \infty, \quad i = 1, \dots, m-1$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_1(n+1)}{\gamma_m(n)} = \infty$$

ЛЕММА 2.2.

$$\left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial x_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_m)(\alpha_{i,N} - \alpha_i) + R(\alpha_{1,N} - \alpha_1, \dots, \alpha_{m,N} - \alpha_m) \right|_g \leq g^{-\gamma_1(N+1)}$$

ТЕОРЕМА 2.7. Для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, отличного от тождественного нуля, высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$, при условии $H \geq H_0(d)$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_g > H^{-1} \left(\frac{(d+m-1)!}{d!m!} \right)^{-1} \cdot \left(g^{\gamma_m(\tau^{-1}(H))+1} \right)^{-d},$$

где $\tau^{-1}(x)$ — обратная функция к функции $\tau(x) = \gamma_1(x+1) - d(\gamma_m(x) + 1)$.

ТЕОРЕМА 2.8. Любое целое g -адическое число представимо суммой двух Лиувиллевых чисел.

Третья глава посвящена исследованию лиувиллевых полиадических чисел и получению оценок снизу для многочленов от некоторых совокупностей полиадических чисел.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k n_k!, \quad a_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq a_k \leq n_k, \quad n_k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{(n_k + 1) \ln(n_k + 1)}{n_k + 1} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty.$$

Пусть $\varepsilon(H) \rightarrow 0$ при $H \rightarrow +\infty$. Пусть $\tilde{p} \in \mathbb{N}$. Тогда существует $H_0 = H_0(\tilde{p})$ такая, что для любого простого числа $p \leq \tilde{p}$ и любого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами, не превосходящими по абсолютной величине числа H , $H \geq H_0$, имеющего степень m , удовлетворяющую неравенству

$$m\varepsilon(H) < \frac{\ln \tilde{p}}{2(\tilde{p} - 1)}$$

выполнено неравенство

$$|P(\alpha)|_p > \frac{1}{m+1} \cdot H^{-1-\varepsilon^{-1}(H)(\ln \ln H + \ln \varepsilon^{-1}(H)) \cdot m}.$$

ЛЕММА 3.1. Если при $H \geq H_1$ число N удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} (1 - \delta)\varphi_1(N) \ln \varphi_1(N) &> \ln H, \\ (1 - \delta)\varphi_2(N) \ln \varphi_2(N) &> (1 + \delta) \ln H, \\ &\dots \\ (1 - \delta)\varphi_m(N) \ln \varphi_m(N) &> (1 + \delta) \ln H, \end{aligned}$$

то

$$P(\alpha_{1,N}, \dots, \alpha_{m,N}) \neq 0$$

и справедлива оценка

$$|P(\alpha_{1,N}, \dots, \alpha_{m,N})| \leq H \cdot \left(\frac{(d+m)!}{d!m!} \right) ((\varphi_m(N) + 1)!)^d.$$

ЛЕММА 3.2. Для всех $N \in \mathbb{N}$ и всех простых чисел p выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial P}{\partial x_i}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)(\alpha_{i,N} - \alpha_i) + R(\alpha_{1,N} - \alpha_1, \dots, \alpha_{m,N} - \alpha_m) \right|_p \leq |\varphi_1(N+1)!|_p.$$

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть

$$\alpha_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,i}(\varphi_i(n))!, \quad i = 1, \dots, m,$$

где

$$a_{n,i} \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq a_{n,i} \leq \varphi_i(n), \quad i = 1, \dots, m,$$

а функции $\varphi_i(n)$ принимают натуральные значения и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i+1}(n)}{\varphi_i(n) \ln \varphi_i(n)} &\rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \frac{\varphi_1(n+1)}{\varphi_m(m) \ln \varphi_m(n)} &\rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty \\ \frac{\varphi_1(n) \ln \varphi_1(n) (\ln \varphi_m(n))^{\frac{3}{2}m}}{\varphi_m(n)} &\rightarrow +\infty \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Пусть $p_0 \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0, \delta = 1 - \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}m+2}}$. Тогда существует число $H_0 = H_0(p_0, \varepsilon)$ такое, что для любого отличного от нулевого многочлена $P(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$ высоты H и степени d по совокупности переменных $x_1, \dots, x_m$ при условиях $H \geq H_0$,

$$\ln \frac{(d+m)!}{d!m!} \leq (1+\delta) \ln H$$

для любого простого числа $p \leq p_0$ выполнено неравенство

$$|P(\alpha_1, \dots, \alpha_m)|_p > H^{-d(1+\varepsilon)(\ln \ln H)^{\frac{3}{2}m+1}}.$$

ТЕОРЕМА 3.3. Существует последовательность натуральных чисел N_m такая, что для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $p \in \{p_1, \dots, p_m\}$ выполнено неравенство

$$\gamma_1(p, N_{m+1}) \geq (m+1)\gamma_2(p, N_m)$$

ТЕОРЕМА 3.6. Любое целое полиадическое число α допускает представление в виде

$$\alpha = L_1 + L_2,$$

где L_1, L_2 — полиадические ливиллевы числа.

Заключение

Работа посвящена количественным задачам теории трансцендентных чисел в неархимедовски нормированных областях. Основные результаты, полученные в диссертации состоят в следующем:

- получены оценки снизу для многочленов от некоторых p -адических чисел;
- получены оценки снизу для многочленов от некоторых g -адических чисел;
- получены оценки снизу для многочленов от некоторых полиадических чисел.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Г. Чирскому за постановку задачи, научные идеи, поддержку, постоянное внимание к работе и ценные советы.

Автор выражает благодарность всем сотрудникам кафедры математического анализа за проявленный интерес к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности.

1. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. — 2019. — Т. 20, № 2. — С. 374–383.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт-фактор 0,324 (за 2018 год)

2. Крупицын Е. С. Оценка многочлена от глобально трансцендентного числа // Чебышевский сборник. — 2017. — Т. 18, № 4. — С. 245–254.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт-фактор 0,324 (за 2018 год)

3. Krupitsyn E.S. Estimates of polynomials of some p -adic numbers, Moscow University Mathematics Bulletin, 2015, 70(4), pp. 187-190.

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт-фактор 0,348 (за 2018 год)

4. Chirskii, V.G., Krupitsyn, E.S. Estimates of polynomials of some g-adic numbers, Moscow University Mathematics Bulletin, 2012, 67(2), pp. 89.
(автору принадлежат доказательства результатов)

Журнал индексируется в Scopus, РИНЦ
Импакт-фактор 0,348 (за 2018 год)

Публикации автора по теме диссертации, примыкающие к основным.

5. Chirskii V. G., Krupitsyn E. S. On liouville decomposition of polyadic integers // Global Journal of Science Frontier Research (GJSFR): F Mathematics & Decision Sciences. — 2018. — Vol. 18, no. 1. — P. 33–36.
6. Крупицын Е. С. Арифметические свойства рядов некоторых классов // Чебышевский сборник. — 2010. — Т. 11, № 1. — С. 184–188.