На правах рукописи

Зайцева Наталья Владимировна

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ B-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2017

Работа выполнена на кафедре высшей математики и математического моделирования ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» и на кафедре математического анализа Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет»

Научный руководитель: **Сабитов Камиль Басирович**
доктор физико-математических наук,
профессор, чл.-корр. АН РБ,
заведующий кафедрой математического анализа
Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО
«Башкирский государственный университет»

Официальные оппоненты: **Пулькина Людмила Степановна**
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры уравнений математической физики ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Ляхов Лев Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического и прикладного анализа ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный университет»

Ведущая организация: ФГБУН Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН

Защита состоится «29» июня 2017 г. в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 35, ауд. 610.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет» по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан « 18 » мая 2017 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.kpfu.ru

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
кандидат физико-математических наук, доцент Е.К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория краевых задач для вырождающихся или сингулярных гиперболических уравнений представляет собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных. Это объясняется ее многочисленными приложениями в газовой динамике, теории оболочек, магнитной гидродинамике и других областях науки и техники. Особое место занимают исследования уравнений, содержащих дифференциальный оператор Бесселя

$$B_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}, \quad k = \mathrm{const}.$$

Интерес к вырождающимся уравнениям гиперболического типа вызван не только необходимостью решения прикладных задач, связанных с различного рода колебательными процессами, но и интенсивным развитием теории уравнений смешанного типа, которое тесно связано с изучением эллиптических и гиперболических уравнений, вырождающихся на границе области. Большое количество работ в этой области принадлежит К.И. Бабенко, А.В. Бицадзе, С.П. Пулькину, А.М. Нахушеву, В.Ф. Волкодавову, К.Б. Сабитову, Р.С. Хайруллину и др.

Интерес к задачам, связанным с оператором Бесселя, известен как со стороны фундаментальной физики, так и со стороны абстрактных геометрий. Так, еще в работах А. Вайнштейна и Р. Гильберта было отмечено, что в случае осесимметрических переменных сферическое преобразование координат выявит интегральное выражение, содержащее обобщенные сдвиги, «нагруженные» переменные и сингулярные дифференциальные операторы, порожденные оператором Бесселя

$$\Delta_B u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Обширное исследование по изучению оператора Δ_B принадлежит И.А. Киприянову, Л.Н. Ляхову, Н. Раджабову, С.М. Ситнику и другим ученым. Краевые задачи для эллиптических уравнений с оператором Бесселя исследовались в работах Ф.Г. Мухлисова и его учеников Р.М. Асхатова, М.Ю. Денисовой, Э.Д. Хусаиновой, Э.В. Чеботаревой. Краевые задачи для параболических и гиперболических уравнений с оператором Бесселя изучены сравнительно мало. Смешанные задачи для параболических уравнений с оператором Бесселя рассматриваются в работе Н.Э. Бенуара и Н.И. Юрчука. В работе И.Б. Гарипова методом интегрального преобразования Фурье-Бесселя решена задача Коши для однородного и неоднородного параболического уравнения с оператором Бесселя и другие краевые задачи. Работы И.А. Киприянова и Л.А. Иванова, Н.И. Юрчука, С.А. Бейлина, С.М. Гафуровой, С.М. Гафуровой и И.Б. Гарипова, Ю.К. Сабитовой посвящены исследованию гиперболических уравнений с оператором Бесселя.

Отметим, что в последнее время в теории дифференциальных уравнений с частными производными бурно развивается направление теории нелокальных задач. Это объясняется необходимостью обобщения классических задач математической физики и постановки качественно новых, вызванной задачами современного естествознания. Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений возникают во многих областях науки: физике, химии, биологии. Нелокальными задачами принято называть задачи, в которых вместо классических начальных и граничных условий задаются условия, связывающие значение решения (и, возможно, его производных) в точках внутренних и граничных многообразий.

Нелокальные задачи для различных классов дифференциальных уравнений изучались Ф.И. Франклем, В.И. Жегаловым, J.R. Cannon, А.В. Бицадзе и А.А. Самарским, А.М. Нахушевым, А.П. Солдатовым, Н.И. Ионкиным, А.В. Бицадзе, А.Л. Скубачевским, В.А. Ильиным и Е.И. Моисеевым, М.Е. Лернером и О.А. Репиным, Н. Попивановым, Л.С. Пулькиной, В.А. Нахушевой, З.А. Нахушевой, А.И. Кожановым, М.С. Салахитдиновым и М. Мирсабуровым, Л.Н. Сербиной, Е.А. Уткиной, К.Б. Сабитовым и его учениками Ю.К. Сабитовой, Л.Х. Рахмановой, Н.В. Мартемьяновой, Г.Р. Юнусовой, С.Н. Сидоровым и другими авторами.

В трансзвуковой газовой динамике Ф.И. Франкль впервые для уравнения Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия $u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$, $0 < y < a$, является часть границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. При этом на ней задается производная по нормали искомой функции $u_x(0, y)$.

В.И. Жегаловым впервые для уравнения Лаврентьева-Бицадзе изучен аналог задачи Трикоми с нелокальным условием, связывающим значение искомого решения на обеих характеристиках (задача со смещением).

Исследованию задач со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типа посвящены также работы А.М. Нахушева.

А.В. Бицадзе и А.А. Самарским для уравнения Лапласа были предложены задачи с нелокальным условием, связывающим значения искомого решения во внутренних точках области со значениями на границе. Эта работа, можно сказать, послужила отправной точкой для исследований нелокальных задач для эллиптических уравнений, продолженных в работах А.К. Гущина, А.К. Гущина и В.П. Михайлова, А.Л. Скубачевского.

Исследования нелокальных задач для параболических уравнений представлены в работах Н.И. Ионкина, А. Бузиани, А.И. Кожанова и других авторов.

Нелокальные задачи для гиперболических уравнений изучаются с 90-х годов и вызывают большой научный интерес, обусловленный выбором доказательства разрешимости нелокальных задач видом самих этих условий. Исследованию таких нелокальных задач посвящены работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева, Л. Бижевского, Д.Г. Гордезиани и Г.А. Авалишвили, А. Бузиани, Л.С. Пулькиной, Л.С. Пулькиной и О.М. Кечиной, А.И. Кожанова, С.А. Бейлина, В.Б. Дмитриева и других авторов.

К нелокальным условиям относятся и условия, заданные в виде интегралов. Задачи с интегральными условиями возникли при изучении некоторых физических процессов, границы областей протекания которых могут оказаться недоступными для непосредственных измерений, но среднее значение искомых величин известно. Нелокальные интегральные условия можно считать обобщением дискретных нелокальных условий. Нелокальные задачи с интегральными условиями встречаются при математическом моделировании некоторых процессов теплопроводности, влагопереноса в капиллярно-пористых средах, процессов, происходящих в турбулентной плазме, при изучении задач математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

В работах Л.С. Пулькиной впервые методами функционального анализа изучены краевые задачи с интегральными условиями для телеграфного уравнения и для более общих уравнений гиперболического типа с гладкими коэффициентами

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x + c(x,t)u = f(x,t).$$

В работе Л.С. Пулькиной были введены термины «интегральные условия первого и второго рода». Согласно данной работе, если нелокальное условие содержит только интегральный оператор, то такое условие принято называть интегральным условием первого рода. А если нелокальное условие помимо интегрального оператора содержит значение искомого решения или его производных на границе области исследования, то условие такого вида называется интегральным условием второго рода. В работе Л.С. Пулькиной и А.И. Кожанова была доказана однозначная разрешимость краевых задач с нелокальным интегральным условием для многомерных гиперболических уравнений, что явилось важным шагом в исследовании подобных задач.

Данная диссертационная работа посвящена изучению нелокальных краевых задач с интегральными граничными условиями первого и второго родов для одного гиперболического уравнения с оператором Бесселя, которое по терминологии И.А. Киприянова будем называть B-гиперболическим уравнением. Исследованию нелокальных задач для уравнений с оператором Бесселя посвящены работы Н.И. Юрчука, Н.Э. Бенуара и Н.И. Юрчука, A. Bouziani, S. Mesloub, С.А. Бейлина и других авторов.

Цель и задачи диссертационного исследования. В данной работе рассматриваются начально-граничные задачи с нелокальными интегральными условиями первого и второго рода для B-гиперболического уравнения

$$\square_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\, 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где $l > 0$, $T > 0$, $k = \mathrm{const} \neq 0$ – заданные действительные числа. Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений начально-граничных задач для уравнения (1) в области D.

Объектом исследования являются начально-граничные задачи с нелокальными интегральными условиями первого и второго рода для B-гиперболического уравнения.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности, существования и устойчивости решений краевых задач для гиперболического уравнения с оператором Бесселя с нелокальными интегральными граничными условиями составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Найдены промежутки изменения параметра k: $k \leq -1$; $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$; $k \geq 1$, в которых начально-граничные задачи с интегральным условием первого рода для B-гиперболического уравнения в прямоугольной области поставлены корректно. В каждом из этих случаев доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задач. Решения построены в виде суммы ряда Фурье-Бесселя по собственным функциям одномерной спектральной задачи с соответствующим обоснованием сходимости рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

2. Установлены промежутки изменения параметра k: $k \leq -1$; $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$; $k \geq 1$, в которых нелокальные задачи с интегральным условием второго рода для уравнения (1) в прямоугольной области поставлены корректно. Доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задач, которые построены в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной спектральной задачи. Установлены достаточные условия сходимости рядов в классе регулярных решений уравнения (1).

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах кафедры математического анализа Стерлитамакского филиала Башкирского государственного университета (Стерлитамак, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов, 2016 – 2017 гг.), кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов, 2017 г.), кафедры высшей математики и математического моделирования Казанского (Приволжского) федерального университета (Казань, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ю.Г. Игнатьев, 2016 – 2017 гг.), кафедры уравнений математической физики Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева (Самара, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Л.С. Пулькина, 2017 г.), отдела математической физики Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (Уфа, руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор И.Т. Хабибуллин, 2017 г.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях: **1.** Международная научная конференция «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014», посвященная юбилею В.И. Жегалова (Казань, 29 сентября – 1 октября, 2014 г.); **2.** Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование» (Улан-Удэ, 22 – 27 июня, 2015 г.); **3.** Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А.В. Бицадзе (Москва, 16 – 18 июня, 2016 г.); **4.** Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям П.А. и А.П. Широковых (Казань, 26 июня – 2 июля, 2016 г.); **5.** Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики» (Нальчик, 17 – 21 октября, 2016 г.); **6.** Международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» (Москва, 31 октября – 3 ноября, 2016 г.); **7.** XV Всероссийская молодежная школа-конференция «Лобачевские чтения – 2016» (Казань, 24 – 29 ноября, 2016 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [14]. Список публикаций приведен в конце автореферата. При этом статьи [1] – [6] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. Постановка задач принадлежит научному руководителю профессору К.Б. Сабитову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, списка литературы, содержащего 121 наименование. Общий объем диссертации – 90 страниц.

Автор выражает благодарность научному руководителю $\boxed{\text{Ф.Г.Мухлисову}}$ и глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** приведен обзор литературы, обоснована актуальность, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1**, состоящей из трех параграфов, для уравнения (1) исследуются начально-граничные задачи с нелокальными интегральными граничными условиями первого рода. Поставленные задачи с нелокальным интегральным условием первого рода эквивалентно сведены к локальным начально-граничным задачам со смешанными краевыми условиями. Методом спектрального анализа доказаны теоремы единственности и существования решений эквивалентных задач. Решения построены в явном виде в виде рядов Фурье-Бесселя и приведено обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений. Доказательство единственности решений эквивалентных задач проводится на основании полноты системы собственных функций соответствующих одномерных задач на собственные значения в пространстве квадратично суммируемых функций с весом. Для доказательства существования решений этих задач используются оценки коэффициентов рядов и систем собственных функций. Получены достаточные условия относительно начальных условий, которые гарантируют сходимость построенных рядов в классе регулярных решений. Затем показана однозначная разрешимость первоначальных задач и доказана устойчивость их решений.

Рассмотрим B-гиперболическое уравнение (1) в прямоугольной области $D = \{(x,t)|\,0 < x < l,\, 0 < t < T\}$, где $l > 0$, $T > 0$, k – заданные действительные числа. Для уравнения (1) в этой области в зависимости от значений параметра k поставлены и исследованы следующие нелокальные задачи.

Задача 1.1. *Пусть $k \geq 1$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D), \tag{2}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{4}$$

$$\int_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = A = \text{const}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{5}$$

где A – заданное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l \varphi(x)\,x^k\,dx = A, \quad \int_0^l \psi(x)\,x^k\,dx = 0. \tag{6}$$

Задача 1.2. *Пусть $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2) – (5) и условию*

$$\lim_{x\to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования (6).

Из постановки задач 1.1 и 1.2 видно, что граничное условие (5) является нелокальным. Такое интегральное условие ранее возникло в работах I.R. Cannon, Л.И. Камынина, Н.И. Ионкина для уравнения теплопроводности, например, в работе Н.И. Ионкина при изучении вопроса об устойчивости разрежения плазмы. Физически нелокальное условие (5) означает постоянство внутренней энергии системы.

В работах Л.С. Пулькиной впервые методами функционального анализа изучены краевые задачи с интегральными условиями типа (5) и более сложными условиями для уравнения (1) при $k = 0$. В работе К.Б. Сабитова впервые исследована краевая задача для смешанного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области с нелокальным условием (5).

Задача 1.3. *Пусть $k \le -1$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (2) – (4) и условиям*

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\int_0^l u(x,t)\,x\,dx = A = \mathrm{const}, \quad 0 \le t \le T, \tag{9}$$

где A – заданное число, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\int_0^l \varphi(x)\,x\,dx = A, \quad \int_0^l \psi(x)\,x\,dx = 0. \tag{10}$$

Для примера здесь приведем результаты по **задаче 1.1** для уравнения (1) при $k \geq 1$.

Отметим, что в случае B-эллиптического уравнения

$$u_{tt} + x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0$$

при $k \geq 1$ в силу результатов работ М.В. Келдыша, С.П. Пулькина в классе ограниченных решений отрезок $x = 0$ границы области освобождается от граничного условия Дирихле. При этом в работах С.П. Пулькина, К.Б. Сабитова показано, что производная по нормали, то есть u_x, на отрезке $x = 0$ равна нулю.

Аналогичная ситуация имеет место и для уравнения (1) при $k \geq 1$. Разделяя переменные нетрудно показать, что справедливо равенство

$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{11}$$

Тем самым устанавливается дополнительное свойство решения задачи 1.1. В дальнейшем равенством (11) можно воспользоваться или этот факт не использовать в последующих доказательствах, что зависит от поведения производной u_x при $x \to 0$. Если эта производная при $x \to 0$ остается ограниченной, то нет необходимости в условии (11), что и будет показано.

Задача (2) – (5) эквивалентно сведена к задаче (2) – (4) с локальным граничным условием второго рода

$$u_x(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{12}$$

Методом спектрального анализа решение задачи (2) – (4), (12) построено в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{13}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos\lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n t, \tag{14}$$

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\,dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) x^k X_n(x)\,dx, \tag{15}$$

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}}\widetilde{X}_n(x), \tag{16}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{k-1}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

$$||\widetilde{X}_n||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} = \int_0^l \rho(x)\,\widetilde{X}_n^2(x)\,dx, \quad \rho(x) = x^k. \tag{18}$$

Здесь $J_\nu(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν. Собственные значения μ_n определяются как нули уравнения

$$J_{\frac{k+1}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{19}$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи (2) – (4), (12), то оно единственно.*

Доказательство единственности решения проводится на основе полноты системы собственных функций спектральной задачи $X_n(x)$ в пространстве $L_2[0,l]$ с весом x^k.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0,T]$ справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \le C_1 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n} \right), \tag{20}$$

$$|u_n'(t)| \le C_2 \left(n|\varphi_n| + |\psi_n| \right), \tag{21}$$

$$|u_n''(t)| \le C_3 \left(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n| \right), \tag{22}$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Лемма 1.2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0,l]$ выполнены оценки:*

$$|X_n(x)| \le C_4, \tag{23}$$

$$|X_n'(x)| \le C_5 n, \tag{24}$$

$$|X_n''(x)| \le C_6 n^2. \tag{25}$$

Лемма 1.3. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0,l]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0,l]$, функция $\psi(x) \in C^1[0,l]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0,l]$, и*

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \psi'(0) = \varphi'(l) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки:

$$|\varphi_n| \le \frac{C_7}{n^4}, \quad |\psi_n| \le \frac{C_8}{n^3}. \tag{26}$$

На основании лемм 1.1 – 1.3 доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3, то существует единственное решение $u(x,t)$ задачи (2) – (4), (12), определяемое рядом (13), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 1.3. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 1.3 и условиям (6), то существует единственное решение задачи (2) – (6), определяемое рядом (13), при этом $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 1.4. *Для решения задачи (2) – (6) справедлива оценка*

$$||u||_{L_{2,\rho}(0,l)} \leq C_9(||\varphi||_{L_{2,\rho}(0,l)} + ||\psi||_{L_{2,\rho}(0,l)}), \tag{27}$$

где

$$||f||^2_{L_{2,\rho}(0,l)} = \int\limits_0^l \rho(x)|f(x)|^2 dx, \quad \rho(x) = x^k.$$

Аналогично доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решений задачи 1.2 для уравнения (1) при $-1 < k < 1$, $k \neq 0$ и задачи 1.3 для уравнения (1) при $k \leq -1$.

Глава 2 посвящена изучению нелокальных задач с интегральными граничными условиями второго рода для уравнения (1) при $k \geq 1$; $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$; $k \leq -1$. Также методом спектрального анализа доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач и установлен критерий единственности задачи в случае $k \leq -1$. Единственность решения задач в случаях $k \geq 1$ и $-1 < k < 1$, $k \neq 0$ доказана методом интегральных тождеств. Решения задач получены в виде рядов Фурье-Бесселя.

Для уравнения (1) в прямоугольной области D в зависимости от k поставлены и исследованы следующие нелокальные задачи.

Задача 2.1. *Пусть $k \geq 1$. Найти функцию $u(x,t)$, которая удовлетворяет следующим условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D) \tag{28}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{29}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{30}$$

$$u_x(l,t) + \int\limits_0^l u(x,t)\, x^k\, dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{31}$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi'(l) + \int\limits_0^l \varphi(x)\, x^k\, dx = 0, \quad \psi'(l) + \int\limits_0^l \psi(x)\, x^k\, dx = 0. \tag{32}$$

Задача 2.2. *Пусть $-1 < k < 1$ и $k \neq 0$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям (28) - (31) и условию*

$$\lim_{x \to 0+} x^k u_x(x,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{33}$$

где функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям (32).

Задача 2.3. *Пусть $k \leq -1$. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D) \tag{34}$$

$$\Box_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D, \tag{35}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{36}$$

$$u(0,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{37}$$

$$\left(x^{k-1} u(x,t)\right)'_x \Big|_{x=l} + \int_0^l u(x,t)\, x\, dx = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{38}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)'_x \Big|_{x=l} + \int_0^l \varphi(x)\, x\, dx = 0, \quad \left(x^{k-1}\psi(x)\right)'_x \Big|_{x=l} + \int_0^l \psi(x)\, x\, dx = 0. \tag{39}$$

Рассмотрим здесь **задачу 2.3** для уравнения (1) при $k \leq -1$.

Решение задачи (34) - (39) построено в виде суммы ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{40}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t +$$

$$+ \frac{\sqrt{l^{k-1}}}{\lambda_n^2 - l^{2-k}} \left[l\varphi'(l) + (k-1)\varphi(l) \right] J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n l) \left(\cos \sqrt{l^{2-k}}\, t - \cos \lambda_n t \right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{l^{k-1}}}{\lambda_n^2 - l^{2-k}} \left[l\psi'(l) + (k-1)\psi(l) \right] J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n l) \times$$

$$\times \left(\sqrt{l^{k-2}} \sin \sqrt{l^{2-k}}\, t - \frac{1}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \right), \tag{41}$$

$$\varphi_n = \int\limits_0^l \varphi(x) x^k X_n(x)\, dx, \quad \psi_n = \int\limits_0^l \psi(x) x^k X_n(x)\, dx, \tag{42}$$

$$X_n(x) = \frac{1}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,l)}} \widetilde{X}_n(x), \tag{43}$$

$$\widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x),\ n \in \mathbb{N}, \tag{44}$$

где норма определяется по формуле (18), а собственные значения есть нули уравнения

$$J_{\frac{3-k}{2}}(\mu) = 0, \quad \mu = \lambda l. \tag{45}$$

На основании полноты системы собственных функций (43) строится доказательство единственности решения задачи. Справедлива

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи (34) – (39), то оно единственно.*

Также справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1. *Для достаточно больших* n *и при любом* $t \in [0, T]$ *справедливы оценки*

$$|u_n(t)| \le K_1 \left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n} \right) + \frac{|\varphi'(l)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi'(l)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(l)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi(l)|}{n^{3/2}}, \tag{46}$$

$$|u'_n(t)| \le K_2 \left(n|\varphi_n| + |\psi_n| \right) + \frac{|\varphi'(l)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi'(l)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(l)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi(l)|}{n^{3/2}}, \tag{47}$$

$$|u''_n(t)| \le K_3 \left(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n| \right) + n^{1/2}|\varphi'(l)| + \frac{|\psi'(l)|}{n^{1/2}} + n^{1/2}|\varphi(l)| + \frac{|\psi(l)|}{n^{1/2}}. \tag{48}$$

Для функций (43) справедливы оценки леммы 1.2. А функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ подчиним следующим условиям

Лемма 2.2. *Если функция* $\varphi(x) \in C^2[0, l]$ *и существует производная* $\varphi'''(x)$*, имеющая конечное изменение на* $[0, l]$*, функция* $\psi(x) \in C^1[0, l]$ *и существует производная* $\psi''(x)$*, которая имеет конечное изменение на* $[0, l]$*, и*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

$$\psi(0) = \psi(l) = \psi'(0) = \psi'(l) = 0,$$

то выполняются оценки:

$$|\varphi_n| \le \frac{K_4}{n^4}, \quad |\psi_n| \le \frac{K_5}{n^3}. \tag{49}$$

С учетом условий леммы 2.2 коэффициенты $u_n(t)$ ряда (40) примут вид

$$u_n(t) = \varphi_n \cos \lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n} \sin \lambda_n t. \tag{50}$$

При выполнении условий лемм 2.1, 1.2 и 2.2 справедлива следующая

Теорема 2.2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2.2 и выполнены условия (39), то существует единственое решение задачи (34) - (39), определяемое рядом (40), при этом сумма ряда $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Для решения задачи (34) - (39) справедлива оценка теоремы 1.4.

Отметим, что аналогичные результаты получены для остальных задач этой главы, а именно, доказаны теоремы единственности, решения построены в виде сумм рядов, обоснована сходимость рядов в соответствующих классах функций и доказана устойчивость решений.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Зайцева, Н.В. Смешанная задача для одного B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода / Н.В. Зайцева // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2012. – Вып. 2. – С. 39 – 50.

2. Зайцева, Н.В. Смешанная задача для одного B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / Н.В. Зайцева // Известия Смоленского государственного университета. – 2013. – № 4(24). – С. 397 – 403.

3. Зайцева, Н.В. Решение смешанной задачи с нелокальным интегральным условием для гиперболического уравнения с оператором Бесселя / Н.В. Зайцева // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. URL: http://www.science-education.ru/116-12809

4. Зайцева, Н.В. Начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения / Н.В. Зайцева // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучн. сер. – 2016. – № 3-4. – С. 51 – 62.

5. Зайцева, Н.В. Нелокальная краевая задача для $B-$гиперболического уравнения в прямоугольной области / Н.В. Зайцева // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки. – 2016. – Т. 20. – № 4. – С. 589 – 602. DOI: 10.14498/vsgtu1501

6. Zaitseva, N.V. Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind / N.V. Zaitseva // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – № 1. – P. 162 – 169. DOI: 10.1134/S199508021701022X

Публикации в других изданиях

7. Зайцева, Н.В. Смешанные задачи с нелокальными интегральными условиями для B-гиперболического уравнения / Н.В. Зайцева // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы Международной научной конференции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций – 2014», посвященной юбилею В.И. Жегалова. – Казань: Изд-во Казан. ун-та. – 2014. – Т. 49. – С. 165 – 167.

8. Зайцева, Н.В. Краевые задачи для гиперболического уравнения с оператором Бесселя / Н.В. Зайцева // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование»: Тез. докл. – Улан-Удэ. – 2015. – С. 119 – 120.

9. Zaitseva, N.V. Boundary value problem for B-hyperbolic equation with an integral condition of the second kind / N.V. Zaitseva // Journal of Theoretical and Applied Technology. – 2015. – V. 78. – № 3. – P. 497 – 508.

10. Зайцева, Н.В. Начально-граничная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода / Н.В. Зайцева // Международ-

ная научная конференция «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных», посвященная памяти А.В. Бицадзе: Тез. докл. – М. – 2016. – С. 80.

11. Зайцева, Н.В. Задача типа Келдыша для B-гиперболического уравнения с интегральным условием первого рода / Н.В. Зайцева // Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии, посвященная юбилеям П.А. и А.П. Широковых: Тез. докл. – Казань: Казанский университет, Изд-во Академии наук РТ. – 2016. – С. 173 – 174.

12. Зайцева, Н.В. Начальные задачи для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода / Н.В. Зайцева // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики»: Тез. докл. – Нальчик: КБНЦ РАН. – 2016. – С. 130 – 131.

13. Зайцева, Н.В. Об одной нелокальной задаче для гиперболического уравнения с оператором Бесселя / Н.В. Зайцева // Международная научная конференция «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики»: Тез. докл. – М. – 2016. – С. 45.

14. Зайцева, Н.В. Единственность решения задачи типа Келдыша с интегральным условием второго рода для B-гиперболического уравнения / Н.В. Зайцева // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы XV молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2016». – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, Изд-во Академии наук РТ. – 2016. – Т. 53. – С. 77 – 78.

Подписано в печать 14.04.2017.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 120 экз. Заказ 199/4

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Издательства Казанского университета

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28