**Тюрюкина Людмила Владимировна. Сравнительный анализ сложной динамики дифференциальных уравнений и отображений на примере систем с импульсным воздействием : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.04.03.- Саратов, 2003.- 181 с.: ил. РГБ ОД, 61 03-1/839-5**

**САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО**

**На правах рукописи**

**Тюрюкина Людмила Владимировна**

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛОЖНОЙ ДИНАМИКИ**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ НА**

**ПРИМЕРЕ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ**

**Специальность 01.04.03 - Радиофизика**

**Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук**

**Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Кузнецов А. П.**

**Саратов, 2003**

**Содержание**

**Введение 4**

**Глава 1 Сложная динамика и критические явления в осцилляторе**

**Дуффинга с импульсным воздействием 15**

**1.1 От дифференциального уравнения к двумерному обратимому отображению 17**

**1.2 Одномерное необратимое отображение 29**

**1.3 От одномерного «отображения косинуса» к двумерному**

**отображению Икеды 33**

**1.4 Критические явления на границе хаоса в одномерном**

**«отображении косинуса» 38**

**1.4.1 Переход к хаосу по Фейгенбауму и скейлинг в окрестности фейгенбаумовской критической точки 40**

**1.4.2 Нефейгенбаумовский переход к хаосу и скейлинг в окрестности трикритической точки 40**

**1.4.3 Бинарное дерево сверхустойчивых орбит Мак-Кея-Ван-Зейтца и множество трикритических точек 46**

**1.5 Критические явления в двумерном отображении Икеды 54**

**1.5.1 Трикритическая динамика в отображении Икеды 55**

**1.5.2 Псевдотрикритические точки в отображении Икеды 57**

**Выводы 68**

**Глава 2 Синхронизация короткими импульсами.**

**Изохронный случай 72**

**2.1 Основные модели: осциллятор Ван-дер-Поля под**

**периодическим импульсным воздействием, двумерное**

**и одномерное отображения 74**

**2.2 Картина синхронизации в одномерном отображении 81**

**2.3 Динамика двумерного отображения. Метаморфозы языков**

**2**

**синхронизации при переходе к одномерному отображению 89**

**2.4 Дифференциальная система - осциллятор Ван-дер-Поля под**

**периодическим импульсным воздействием 102**

**Выводы 122**

**Глава 3 Синхронизация короткими импульсами.**

**Неизохронный случай 124**

**3.1 Основные модели: осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга с периодическим импульсным воздействием, двумерное и одномерное отображения 125**

**3.2 Динамика моделей при небольших значениях параметра фазовой нелинейности 131**

**3.3 Особенности динамики моделей в случае больших значений параметра фазовой нелинейности 140**

**3.4 Синхронизация в системе с неустойчивым предельным циклом под действием периодической последовательности 5-импульсов 150**

**3.5 Синхронизация в системе с жестким возбуждением 156**

**Выводы 163**

**Заключение 166**

**Литература 171**

**Список публикаций по теме диссертации 178**

**3**

**ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность задачи. При описании сложных колебательных режи¬мов и хаоса в конкретных радиофизических системах возникает проблема выбора класса динамической системы, которая будет моделью исходной. Это может быть система дифференциальных уравнений, двумерное обратимое отображение, одномерное необратимое отображение. Успехи концепции универсальности в нелинейной динамике отчасти заслонили эту проблему, поскольку исследователи привыкли, что реальные системы и широкий спектр математических моделей демонстрируют такие же закономерности, что и простейшие формальные модели типа логистического отображения. Дейст¬вительно картина перехода к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму [1-Ю], все закономерности подобия (скейлинга) на пороге хаоса будут оди¬наковы во всех моделях из трех названных типов. Так если в двумерном ото-бражении наблюдается переход к хаосу через удвоения периода по Фейген¬бауму, то и одномерное отображение демонстрирует бесконечный каскад уд¬воений периода. Причем точки бифуркаций и критические точки будут близ¬ки друг другу в обоих отображениях, а значения констант, характеризующий сходимость, будут точно равны друг другу. Этот факт, являющийся следст¬вием универсальности Фейгенбаума, строго обоснован методом ренормгруп-пы и подтвержден многочисленными исследованиями конкретных примеров [11-21]. Однако, как оказалось, не все феномены одномерных отображений, допускающие ренормгрупповое описание и относящиеся к удвоениям перио¬да, столь просто переносятся от одномерных отображений на двумерные и далее на потоки и наоборот [21-29]. Эти особенности поведения выявляются при двухпараметрическом анализе. Например, для одномерных отображений линия перехода к хаосу может обрывается в обнаруженных Чангом с соавто¬рами так называемых трикритических точках, окрестность которых устроена универсальным образом и характеризуется двухпараметрическим скейлин-**

**4**

**гом [30]. Для двумерных обратимых отображений (и, соответственно, для дифференциальных уравнений) трикритические точки такого типа, строго говоря, не наблюдаются [23-25]. Соответствующее устройство плоскости па¬раметров может реализовываться лишь приближенно в той мере, в какой эф¬фективна одномерная аппроксимация. Таким образом, двухпараметрическое исследование конкретной системы требует тщательного отслеживания рабо¬тоспособности той или иной динамической модели и обсуждения вопроса о соответствии описаний на «разных уровнях».**

**Удобным объектом для изучения названной проблемы являются сис¬темы с импульсным воздействием, поскольку для них удается получить ряд результатов аналитически. К таким системам относятся нелинейный контур под импульсным воздействием [31], модели Улама ускорения космических лучей Ферми [3, 32], ротатор под действием импульсной силы [2], математи¬ческий маятник с затуханием, находящийся между полюсами электромагни¬та, периодически включаемого на короткое время [12, 33] и др.**

**Особенность задач с импульсным воздействием состоит в том, что в промежутках между импульсами система является автономной. Это означает, что динамику дифференциальной системы в промежутках между ними мож¬но проанализировать, пусть и приближенно, аналитически и получить в яв¬ном виде соответствующее двумерное отображение с помощью метода сече¬ний Пуанкаре [1-3]. В рамках этого метода информацию о динамике систе¬мы, описываемой дифференциальным уравнением, получают, изучая после¬довательность значений переменных в дискретные моменты времени, отве¬чающие пересечению траекторий в фазовом пространстве с некоторой секу¬щей поверхностью. В качестве секущей поверхности для систем под перио¬дическим импульсным воздействием можно выбрать, например, плоскости координата-скорость, расположенные через период внешнего воздействия. Этот метод, однако, не избавляет от необходимости решать само дифферен¬циальное уравнение. Это можно сделать либо числено, используя компьютер,**

**5**

**либо аналитически, используя те или иные методы решения дифференциаль¬ных уравнений. В случае достаточно сильной диссипации, в свою очередь, можно перейти от двумерного отображения к одномерному. Однако, в этом случае ситуация намного сложнее, так как не существует единого метода пе¬рехода от двумерного отображения к одномерному, в каждом конкретном случае он свой. Кроме того, при построении как двумерного, так и одномер¬ного отображений необходимо делать некоторые приближения. А так как рассматриваются нелинейные системы, то эти приближения, хотя и имеют весьма серьезное обоснование, имеют ограниченную область применения.**

**Наряду с удвоениями периода, другое, не менее интересное, явление нелинейной динамики, которое может быть рассмотрено в рамках задачи о сопоставлении динамических систем разных классов - это явление синхрони¬зации [1,2, 34-36]. Явление синхронизации известно очень давно и, тем не менее, продолжает привлекать внимание исследователей. Классическая си¬туация синхронизации состоит в том, что реализуется внешнее периодиче¬ское, обычно гармоническое, воздействие на автоколебательную систему с устойчивым предельным циклом [36, 37]. В этом случае возможны режимы захвата частоты и квазипериодические режимы, соответственно, внутри и вне области синхронизации (языков Арнольда) на плоскости частота - амплитуда внешнего воздействия. В фазовом пространстве в этом случае реализуются либо устойчивый тор, которому в сечении Пуанкаре отвечает замкнутая кри¬вая, либо устойчивый и седловой предельные циклы, возникающий на этом торе при переходе через границу языка. Хорошо известны основные законо-мерности синхронизации, эталонной моделью для изучения которых является стандартное синус-отображение окружности [1]. Однако, оказывается, что в зависимости от вида внешнего воздействия (например, когда в качестве внешнего воздействия взята периодическая последовательность 5-импульсов) явление синхронизации может характеризоваться и закономерностями, от¬личными от классических. Так, например, в работах Динга и Гласса [38-41],**

**б**

**было показано, что для изохронных систем под импульсным воздействием в одномерном случае получается отображение окружности с разрывом. В то же время стандартное синус-отображение может быть использовано в качестве одномерной аппроксимации для неизохронных систем с периодическим им¬пульсным воздействием в случае сильной фазовой нелинейности [9] Поэтому важной является задача исследования всех аспектов картины синхронизации короткими импульсами и, особенно, соответствия различных моделей и их взаимных «превращений».**

**При рассмотрении явления синхронизации возможен и альтернатив¬ный вариант - когда в автономной системе реализуется неустойчивый пре¬дельный цикл. На первый взгляд при наличии внешнего воздействия можно ожидать в фазовом пространстве неустойчивый тор или же неустойчивые циклы, отвечающие синхронизации на этом торе. В нелинейной динамике, однако, известен широкий круг явлений, связанный с так называемой про¬блемой управления хаосом [9]. В рамках этих представлений изучаются си¬туации воздействия на систему, которые могут стабилизировать неустойчи¬вость. (Например, если в дискретной системе имеется неустойчивый цикл, то, воздействуя на него сигналом, определяемым элементами цикла, можно до¬биться его стабилизации.) Возникает интересный вопрос: нельзя ли, исполь¬зуя импульсное воздействие, вызвать стабилизацию в системе с неустойчи¬вым предельным циклом и инициировать устойчивые синхронные и квазипе¬риодические режимы? Как мы покажем, такая схема управления возможна.**

**Цель работы состоит в сравнительном анализе сложной динамики нелинейных систем разных классов (дифференциальных уравнений, двумер¬ных и одномерных отображений), описывающих системы, находящиеся под периодическим импульсным воздействием и рассмотрении явления синхро¬низации в системе с устойчивым или неустойчивым предельным циклами под периодическим импульсным воздействием.**

**7**

**Научная новизна работы.**

**1. Проведено сравнительное сопоставление динамических систем разных классов на примере осцилляторов Дуффинга, Ван-дер-Поля и Ван-дер-Поля-Дуффинга под периодическим импульсным воздействием. Для всех этих систем получены двумерные аппроксимирующие отображения, кото¬рые в свою очередь были сведены к одномерным.**

**2. Для двумерного отображения Икеды, дающего приближенное описание осциллятора Дуффинга с периодическим импульсным воздействием, и его одномерной аппроксимации - «отображения косинуса» показано, что трикритические точки коразмерности два, характерные для одномерных отображений, не переносятся на двумерные, а реализуются лишь прибли¬женно в той мере, в которой эффективна одномерная аппроксимация.**

**3. Для двумерного отображения Икеды числено найден аналог трикритиче-ских точек - псевдотрикритические точки. Показано, что в этих точках реализуется трикритическая универсальность, но лишь до некоторого ко¬нечного уровня иерархии. Дана оценка числа уровней, на которых реали¬зуется трикритическая универсальность.**

**4. Рассмотрена синхронизация в изохронной системе с предельным циклом под периодическим импульсным воздействием. Проведено сопоставление динамики исходной системы и полученных для нее двумерного и одно¬мерного отображений. Детально исследованы метаморфозы языков син¬хронизации с ростом управляющего параметра, что отвечает переходу от описания в терминах двумерного отображения к одномерному.**

**5. Изучена модификация картины синхронизации короткими импульсами при введении неизохронности. Показано, что даже малая фазовая нели-нейность существенно меняет картину синхронизации, в частности харак¬тер особенности в отображении для фазы колебаний.**

**6. Показано, что в нелинейной системе с неустойчивым предельным циклом под периодическим импульсным воздействием возможны устойчивые**

**8**

**квазипериодические режимы и устойчивые режимы захвата фазы (син-хронизации).**

**Достоверность научных выводов работы подтверждается воспроиз¬водимостью всех численных результатов, а так же хорошим совпадением теоретических и численных результатов и результатов, полученных разными методами.**

**Основные положения выносимые на защиту.**

**1. На примере осцилляторов Дуффинга и Ван-дер-Поля с периодическим импульсным воздействием показано, что двухпараметрическое исследо-вание сложной динамики и хаоса в конкретных системах требует тща-тельного отслеживания работоспособности той или иной динамической модели и обсуждения вопроса о соответствии описания на «разных уров¬нях» представления: дифференциальные уравнения, двумерные и одно¬мерные отображения.**

**2. Для одномерной аппроксимации отображения Икеды найдена система трикритических точек коразмерности два, являющихся существенным эле¬ментом картины двухпараметрического перехода к хаосу, причем окрест¬ность этих точек устроена универсальным образом и характеризуется сво¬им специфическим скейлингом. В исходном отображении Икеды трикри-тическая универсальность наблюдается лишь как промежуточная асимпто¬тика, работоспособность которой зависит от эффективности одномерной аппроксимации.**

**3. Задача о синхронизации изохронной системы последовательностью 5-импульсов приводит к нетривиальным метаморфозам картины языков Ар¬нольда при переходе от описания в терминах дифференциальных уравне¬ний к двумерным отображениям и далее к одномерным. Добавление даже малой фазовой нелинейности приводит к существенной модификации картины языков синхронизации и вида отображения для фазы колебаний.**

**4. Периодическое импульсное воздействие на систему, имеющую в авто-**

**9**

**номном случае неустойчивый предельный цикл, приводит к стабилизации неустойчивого режима и инициирует устойчивые квазипериодические ре¬жимы и режимы захвата фазы (синхронизации). Такая инициированная синхронизация возможна лишь в неизохронном случае.**

**Научно практическая значимость работы и рекомендации по ис¬пользованию.**

**• Развитые методики сопоставления дифференциальных систем и отобра-жений могут быть использованы для изучения разнообразных радиофизи¬ческих систем со сложной динамикой.**

**• Построенная картина синхронизации короткими импульсами в «эталон¬ных» нелинейных системах может применяться для описания и объясне¬ния особенностей синхронизации короткими импульсами в конкретных системах.**

**• Результаты, полученные при рассмотрении различных моделей и изучении их взаимных превращений, могут быть использованы в учебном процессе. Часть результатов работы уже использована в учебном пособии А.ПКузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин. Нелинейные колебания, М.: Физматлит, п. 13.4. «Системы под импульсным периодическим воздействи¬ем».**

**Апробация работы и публикации. Результаты работы были пред-ставлены на 5-ой Международной школе «Хаотические автоколебания и обра¬зование структур» (Саратов, Россия, 1998); Школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых-98» (Саратов, Россия, 1998); XI Международной зимней школе по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, Россия, 1999); Iх International Specialist Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NOES'99) (Дания, 1999); V Международной конференции «Нелинейные коле¬бания механических систем» (Нижний Новгород, Россия, 1999); International School for Young Scientist and Students on Optics, Laser Physics and Biophysics**

**10**

**(Саратов, Россия, 1999); Школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых-99» (Саратов, Россия, 1999); 2000 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA2000) (Германия, 2000); Научной школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых-2000» (Саратов, Рос¬сия, 2000); Международной межвузовской конференции Современные пробле¬мы электроники и радиофизики СВЧ (Саратов, Россия, 2001); Международной конференции Dynamics Days Europe 2001 (Германия, 2001); Nonlinear Science Festival III (Дания, 2001); Четвертом международном симпозиуме по классиче-ской и небесной механике (Великие Луки, Россия, 2001); 6 International School on Chaotic Oscillations and Pattern Formation (CHAOS'01) (Саратов, Россия, 2001); International Workshop on Control, Communication and Synchronization in Chaotic Dynamical Systems (Дрезден, Германия, 2001); Всероссийской научной школе Нелинейные волны-2002 (Нижний Новгород, Россия, 2002); The Interna¬tional Conference on Synchronization of Chaotic and Stochastic Oscillations (Сара¬тов, Россия, 2002), Научной школе-конференции «Нелинейные дни в Саратове для молодых-2002» (Саратов, Россия, 2002), XII Зимней школе-семинаре по СВЧ электронике и радиофизике (Саратов, Россия, 2003).**

**По теме диссертации имеется 18 публикаций (5 статей в российских и зарубежных журналах, 4 статьи в сборниках, 9 тезисов докладов).**

**Результаты работы получены в рамках грантов РФФИ № 96-15-96921, № 97-02-16414, № 00-02-17509, ФЦП «Интеграция» № 696.3, Министерства общего и профессионального образования РФ № 97-0-8.3-88, Американского фонда гражданских исследований и развития CRDF № REC-006, а так же персональных грантов РФФИ для молодых исследователей № 01-02-06391 и № 02-02-06469.**

**Личный вклад автора. В совместных работах автором выполнено про¬граммирование всех задач и проведены численные эксперименты. Объяснение и интерпретация полученных результатов проведено совместно с соавторами.**

**Диссертация состоит из введения, 3-х глав и заключения. Диссертация содержит 181 страниц текста, включая 65 рисунков , 6 таблиц, список лите-**

**п**

**ратуры из 112 наименований на 10 страницах. Краткое содержание работы.**

**Во введении обсуждается актуальность работы, формулируется цель исследования, научная новизна и основные положения, выносимые на защи¬ту.**

**В первой главе работы рассмотрен осциллятор Дуффинга под перио¬дическим импульсным воздействием. Для него методом медленно меняю¬щихся амплитуд получено двумерное аппроксимирующее отображение -отображение Икеды, которое, в свою очередь, в случае сильной диссипации сведено к одномерному «отображению косинуса». Для всех указанных моде¬лей построены карты динамических режимов на плоскости управляющих па¬раметров, а для двумерного отображения Икеды и одномерного «отображе¬ния косинуса» так же и карты старшего ляпуновского показателя. Проведено детальное сопоставление карт и бифуркационных деревьев и выявлены об¬ласти соответствия и несоответствия различных моделей.**

**Далее подробно изучена динамика одномерного отображения. Рас-смотрен переход к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму. Однако, основное внимание уделено нефейгенбаумовского перехода к хаосу - так на¬зываемой трикритической динамике. С помощью процедуры построения би¬нарного дерева сверхустойчивых орбит на плоскости параметров числено найдены трикритические точки коразмерности два. Продемонстрированы свойства скейлинга на бифуркационных деревьях, графиках дяпуновских по¬казателей, в структуре аттрактора.**

**В последнем разделе первой главы на примере двумерного отображе¬ния Икеды показано, что трикритические точки коразмерности два не на¬блюдаются в двумерных отображениях. Однако, в двумерных отображениях есть аналог трикритических точек - псевдотрикритические точки. Несколько из них найдены числено для двумерного отображения Икеды. Демонстриру¬ется скейлинг в структуре аттрактора, построенного в одной из псевдотрик-**

**12**

**ритических точек, и показано, что в ее окрестности наблюдается трикритиче-ская универсальность до достаточно глубоких уровней разрешения. Далее отмечается, что трикритичность в двумерных отображениях на глубоких уровнях все же разрушается. Была сделана оценка числа этих уровней. Эта оценка хорошо согласуется с численными результатами.**

**Во второй главе работы на примере осциллятора Ван-дер-Поля под периодическим импульсным воздействием рассмотрена задача о синхрониза¬ции короткими импульсами изохронной системы с предельным циклом, а так же проведено сопоставление динамических моделей «разных классов» (дифференциального уравнения и полученных для него двумерного отобра¬жения и одномерного отображения окружности), построенных для этой сис¬темы. Отмечено, что в изохронном случае системы с импульсным воздейст¬вием в одномерном случае приводят к отображению окружности с разрывом. В разделах 2.1 и2.2 второй главы дан краткий аналитический обзор и воспро¬изведены (в другой технике) результаты, полученные ранее для этого ото¬бражения Дингом и Гласом. В следующем разделе рассмотрена динамика двумерного отображения. Основное внимание уделено метаморфозам языков синхронизации при переходе от двумерного отображения к одномерному. Было показано, что этот процесс связан с образованием внутри языков син¬хронизации «островов» удвоенного периода и хаоса. В последнем разделе второй главы рассмотрена динамика дифференциальной системы Ван-дер-Поля под периодическим импульсным воздействием и проведено ее сопос-тавление с двумерным и одномерным отображениями. Представлены иллю¬страции фазовой динамики для всех трех типов моделей. Приведена теорети¬ческая оценка области одновременной эффективности двумерного и одно¬мерного отображений и проведена ее численная проверка.**

**В третей главе рассмотрен неизохронный вариант системы с предель¬ным циклом - осциллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга под периодическим им¬пульсным воздействием. Для него так же были получены двумерное и одно-**

**13**

**мерное аппроксимирующие отображения. Проведено сопоставление динами¬ки этих трех систем в случаях малых и больших значений параметра фазовой нелинейности. Продемонстрировано, что введение даже малой фазовой не¬линейности существенно меняет фазовую динамику, и как следствие - уст¬ройство плоскости параметров период, амплитуда воздействия. Даны иллю¬страции того, что в случае больших значений параметра фазовой нелинейно¬сти в качестве аппроксимации одномерного отображения можно использо¬вать стандартное синус-отображение окружности.**

**В разделе 3.4 рассмотрена синхронизация короткими импульсами в системе с неустойчивым предельным циклом. Построены плоскости пара-метров период, амплитуда воздействия для такой системы и обнаружена уз¬кая область устойчивых режимов синхронизации и квазипериодических ре¬жимов. Представлены соответствующие фазовые портреты и дано физиче¬ское обоснование этого эффекта. Было показано, что такой тип синхрониза¬ции возможен только в неизохронном случае. В последнем разделе третьей главы рассматривается синхронизация короткими импульсами в системе, у которой в автономном режиме сосуществуют устойчивый и неустойчивый предельные циклы и возможна бифуркация их слияния. Представлены соот¬ветствующие плоскости параметров. Показано, что как в изохронном, так и неизохронном случаях на плоскости параметров есть две системы языков синхронизации, которые после бифуркации слияния устойчивого и неустой¬чивого циклов объединяются в одну.**

**Заключение**

**В** данной работе, в контексте сопоставления динамических систем «разных классов» были рассмотрены следующие модели:

* осциллятор Дуффинга под периодическим импульсным воздействием, для которого методом медленно меняющихся амплитуд было получено двумерное отображение Икеды, которое в свою очередь в приближении сильной диссипации сводиться к одномерному «отображению косинуса»;
* осциллятор Ван-дер-Поля и его неизохронный вариант Ван-дер-Поля-Дуффинга под периодическим импульсным воздействием, для которых так же были получены двумерные и одномерные, представляющие собой некий нетривиальный вариант отображения окружности;
* система типа осциллятора Ван-дер-Поля-Дуффинга, содержащая в ав­тономном режиме неустойчивый предельный цикл (либо сосуществующий с устойчивым, либо изолированный), под периодическим импульсным воз­действием.

Достаточно подробно была рассмотрена динамика перечисленных выше моделей: для всех систем построены карты динамических режимов, а для неко­торых из них и карты старшего ляпуновского показателя, проведено сопостав­ление карт и выявлены области их соответствия и несоответствия; построены бифуркационные деревья и графики зависимости старшего ляпуновского пока­зателя от параметра, портреты аттракторов, а так же продемонстрированы свой­ства скейлинга. Из проведенного рассмотрения можно сделать ряд выводов.

При двухпараметрическом исследовании системы со сложной динами­кой необходимо не только отслеживать работоспособность той или иной дина­мической модели, но и рассмотреть вопрос о соответствии описания системы на «разных уровнях» представления. При этом работоспособность тех или иных динамических моделей требует обсуждения не только с позиции физических мотивов, но и с позиции самих феноменов нелинейной динамики. Особенно, это относится к глобальной бифуркационной картине, линиям и точкам накоп-

166

ления бифуркаций. Так, например, в случае осциллятора Дуффинга работоспо­собность двумерного приближения, при переходе от дифференциальной систе­мы к двумерному отображению Икеды заметно хуже, чем эффективность од­номерного приближения при переходе от отображения Икеды к одномерному «отображению косинуса». Для осциллятора Дуффинга тонкая структура долго-периодических областей на плоскости параметров в окрестности точек резонан­са плохо передается двумерным отображением не зависимо от значения пара­метра диссипации, в то время как для двумерного отображения Икеды сущест­вует область параметров, в которой тонкая структура в окрестности точек сбор­ки практически идеально описывается одномерным «отображением косинуса».

Если сопоставить эффективность двумерных приближений, получен­ных для разных дифференциальных систем, то становится понятно, что она зависит не только от метода, которым было получено приближение, но и от вида самих дифференциальных систем. Так, например, работоспособность двумерного отображения, полученного для осциллятора Ван-дер-Поля, суще­ственно лучше, чем работоспособность двумерного отображения, полученного для осциллятора Дуффинга, хотя для решения обоих дифференциальных уравнений, использовался один метод - метод медленно меняющихся ампли­туд. Кроме этого, если в изохронном случае (осциллятор Ван-дер-Поля) полу­ченное для него одномерное отображение плохо описывает картину синхрони­зации в дифференциальной системе, то введение фазовой нелинейности (ос­циллятор Ван-дер-Поля-Дуффинга) приводит к заметному улучшению эффек­тивности одномерного отображения.

Проведенное в первой главе данной работы сопоставление динамики двумерного отображения Икеды и одномерного «отображения косинуса» под­тверждает выводы ренормгруппового анализа о том, что соотношение одно­мерных и двумерных отображений тривиально только при однопараметриче-ском анализе. Так переход к хаосу через удвоения периода по Фейгенбауму и связанная с ним универсальность одинаковы в обеих системах. Однако, суще-

167

ственным элементом картины двухпараметрического перехода к хаосу через удвоения периода в одномерных отображениях являются трикритические точ­ки, представляющие собой концевые точки фейгенбаумовских линий перехода к хаосу. На плоскости параметров фейгенбаумовская линия выглядит разо­рванной и ограничена трикритическими точками. Окрестность каждой такой точки устроена универсальным образом и характеризуется двухпараметриче-ским скейлингом, отличным от фейгенбаумовского. Найти и классифициро­вать их можно с помощью процедуры построения бинарного дерева сверхус­тойчивых орбит, предложенной Мак-Кеем-Ван-Зейтцем. Однако, в двумерном отображении Икеды трикритические точки коразмерности два не наблюдают­ся. Трикритическая универсальность реализуется в этом отображении лишь как некая промежуточная ассимптотика, эффективность которой хоть и может быть достаточно высокой, но все же зависит от работоспособности одномер­ной аппроксимации.

Аналогом трикритических точек в двумерном отображении служат точки, названые псевдотрикритическими. Для нахождения псевдотрикритиче-ских точек в двумерном отображении Икеды использовалась численная про­цедура, основанная на представлении двумерного отображения как непрерыв­ного продолжения по параметру от одномерного. Этим методом были найде­ны псевдотрикритические точки отображения Икеды. В окрестности псевдо-трикритических точек наблюдается трикритическая универсальность, но лишь для конечного, хотя иногда и достаточно большого, числа уровней иерархии. Для некоторых псевдотрикритических точек двумерного отображения Икеды была сделана теоретическая оценка максимального числа уровней, для кото­рых еще работает трикритическая универсальность. Было показано, что эта оценка очень хорошо совпала с численными результатами.

Во второй главе работы представлен краткий обзор работ по синхрони­зации в простейшей системе с предельным циклом в виде окружности, нахо­дящейся под периодическим импульсным воздействием. Обсуждены особен-

168

ности такой синхронизации по сравнению с картиной, наблюдаемой в синус-отображении окружности. В таком отображении, реализуется новый тип уни­версальности, отличный от классической и характеризующийся сверхсходи­мость структуры языков синхронизации. Перекрытие языков связано с появ­лением в отображении кусочно-линейного разрыва, а не кубической точки пе­региба, как в классическом синус-отображении окружности.

Переход от двумерного отображения к одномерному отображению Гласа с ростом управляющего параметра сопровождается нетривиальными ме­таморфозами языков синхронизации. Внутри языков возникают острова пе­риодических режимов, затем область хаоса и разрыв в языке, в результате чего возникают два языка синхронизации, относящиеся к разным системам. В ко­нечном итоге «выживает» лишь одна из них. Этот процесс охватывает неожи­данно широкий диапазон изменения управляющего параметра. Следствием этого является, в частности, достаточно низкая эффективность отображения Гласа для описания исходной системы Ван-дер-Поля. Соответствующие зна­чения управляющего параметра оказываются отвечающими уже существенно релаксационным колебаниям, когда вид предельного цикла и характер дина­мики на нем совершенно не отвечают представлению о равномерном движе­нии изображающей точки по предельному циклу в виде окружности.

Весьма подробно обсуждена и попарно сопоставлена динамика фазы для двумерного и одномерного отображений и дифференциальной системы Ван-дер-Поля.

В третьей главе работы был рассмотрен неизохронный случай системы с предельным циклом под периодическим импульсным воздействием - осцил­лятор Ван-дер-Поля-Дуффинга. На примере этой системы было показано, что введение даже малой фазовой нелинейности приводит к существенному изме­нению картины синхронизации, что обусловлено изменением характера осо­бенности в отображении для фазы - от кусочно-линейного разрыва к логар-фмической особенности.

169

С другой стороны, в неизохронной системе в одномерном отображении перекрытие языков синхронизации связано с кубической точкой перегиба, как и в классическом синус-отображении окружности, а не с разрывом как в изо­хронном случае. Более того, для аппроксимации одномерного отображения можно использовать синус-отображение окружности, работоспособность ко­торого высока уже даже для случая умеренной фазовой нелинейности. Об­ласть работоспособности синус-отображения, однако, ограничена величиной нормированной амплитуды воздействия (С=1 в наших обозначениях), отве­чающей особенности в отображении для фазы.

Работоспособность одномерного отображения намного выше, чем в изохронном случае. Оно хорошо описывает устройство языков синхронизации не только в двумерном отображении, но и в дифференциальной системе тоже, даже при достаточно большой значениях управляющего параметра. При этом, правда, надо рассматривать область достаточно больших значений периода внешнего воздействия.

В последнем разделе третьей главы была рассмотрена синхронизация короткими импульсами в системе, имеющей в автономном режиме неустойчи­вый предельный цикл. Показано, что в такой системе в неизохронном случае возможны устойчивые синхронные и квазипериодические режимы. На плос­кости параметров они реализуются в узкой полосе, разделяющей область ре­жима периода один и область разбегания. В фазовом пространстве им отвечает движение вблизи неустойчивого предельного цикла, причем внешние импуль­сы периодически возвращают изображающую точку в его окрестность.

Если же в автономной системе сосуществуют устойчивый и неустой­чивый циклы (система с жестким возбуждением), то появляется вторая систе­ма языков, связанная с синхронизацией уже на устойчивом предельном цикле. Когда параметр, управляющий взаимным расположением предельных циклов, становиться больше значения, при котором происходит бифуркация их слия­ния, эти две системы языков объединяются в одну.