На правах рукописи

МАКСИМЕНКО Александр Николаевич

Комбинаторно-геометрические свойства полиэдров задач комбинаторной оптимизации

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Ярославль – 2019

Работа выполнена в лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова».

Официальные оппоненты:

Гасанов Эльяр Эльдарович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова;

Карасев Роман Николаевич, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник кафедры высшей математики Московского физико-технического института;

Котов Владимир Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дискретной математики и алгоритмики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета.

Ведущая организация — ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет»

Защита состоится 31 октября 2019 г. в 14 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (ННГУ) по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ННГУ по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, и на сайте `https://diss.unn.ru/933`

Автореферат разослан «______» __________________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Кротов Н.В.

Общая характеристика работы

Объект исследования. Многие прикладные задачи комбинаторной оптимизации допускают следующую формулировку. Дано конечное множество E, каждому элементу e которого приписан некоторый вес $c_e \in \mathbb{R}$, и полиномиально вычислимый *предикат допустимости* $f\colon 2^E \to \{\text{ложь}, \text{истина}\}$. Подмножество $s \subseteq E$ называется *допустимым решением* этой задачи, если $f(s)$ истинно. Множество всех допустимых решений обозначим S, $S = \{s \subseteq E \mid f(s)\}$. Цель задачи состоит в отыскании *оптимального* решения $s \in S$ с максимальным (минимальным) весом $c(s) = \sum_{e \in s} c_e$.

С теоретической точки зрения, большой интерес представляет *массовая задача*, когда множество E, предикат f и веса c_e, $e \in E$, не зафиксированы, но E и f однозначно определяются набором входных параметров I по некоторому правилу, характеризующему данную массовую задачу. *Индивидуальная задача* представляет собой частный случай массовой задачи, когда входные данные I и c_e, $e \in E$, зафиксированы. Наряду с массовой и индивидуальной задачами существует промежуточный вариант, когда параметры I зафиксированы, а веса c_e — нет. Так как множество допустимых решений S в таком случае определяется однозначно, для такой задачи будем использовать обозначение S.

Например, в задаче о кратчайшем пути входные данные I однозначно определяют множество городов, среди которых выделены города A и B, и множество (участков) дорог E, соединяющих пары городов, веса c_e являются длинами дорог, а предикат допустимости f принимает значение «истина» для каждого подмножества дорог, представляющего собой маршрут из A в B. Другими классическими примерами являются задача поиска минимального остовного дерева, задача о назначениях, задача коммивояжера, задача о рюкзаке и многие другие.

Чаще всего такие задачи встречаются в экономике при оптимизации использования ресурсов, планировании транспортной инфраструктуры и производства, оптимизации доставки грузов, составлении расписаний и т. п. [18]. Более того, в настоящее время задачи комбинаторной оптимизации встречаются практически везде: секвенирование генома, классификация биологических видов, моделирование молекул, планирование коммуникационных и электрических сетей, позиционирование спутников, производство сверхбольших интегральных схем (VLSI), криптография, машинное обучение и т. д. [37].

Как известно [54], во многих случаях такие задачи полезно переводить на язык геометрии. А именно, при фиксированном I, для каждого допустимого решения $s \in S$ рассматривается его *характеристический вектор* $\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^E$, координаты x_e, $e \in E$, которого полагаются равными единице для $e \in s$ и равны нулю для $e \notin s$. Далее множество всех характеристических векторов допустимых решений обозначаем X, $X = X(S) \subseteq \{0,1\}^E$. Набор весов представляется в виде вектора $\boldsymbol{c} = (c_e) \in \mathbb{R}^E$. Цель задачи при такой интерпретации заключается в поиске вектора $\boldsymbol{x} \in X$, на котором *целевая функция* $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$ принимает максимальное (минимальное) значение. Так как целевая функция линейна, то соответствующая задача называется *линейной задачей комбинаторной оптимизации*.

Заметим, что экстремальные значения линейной функции не меняются при замене области определения X выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}(X)$. Таким образом, с каждой задачей S ассоциируется некоторый выпуклый многогранник $\operatorname{conv}(X)$, вершинами которого служит множество $X = X(S)$.

Во-первых, такая геометрическая интерпретация дает возможность при решении задачи пользоваться различными геометрическими инструментами, в частности, методами линейного программирования (см., например, [67]). Как показывает опыт многочисленных исследований в этой области, во многих случаях это позволяет на порядки увеличивать скорость и качество решений [39, 54].

Во-вторых, комбинаторная структура многогранника отражает структуру множества допустимых решений соответствующей задачи. Проиллюстрируем эту мысль с помощью понятия смежных решений. Допустимые решения s_1 и s_2 задачи S называются *смежными*, если для некоторого набора весов $\boldsymbol{c}$ оба эти решения являются оптимальными для соответствующей индивидуальной задачи и других оптимальных решений у неё нет. Смежность решений s_1 и s_2 означает, что при незначительном изменении набора весов $\boldsymbol{c}$ оптимальное решение индивидуальной задачи может меняться с s_1 на s_2 и обратно. То есть в алгоритме, решающем задачу S, должна быть предусмотрена проверка, чувствительная к таким изменениям. Это, в свою очередь, накладывает ряд ограничений на структуру алгоритма и, в итоге, может использоваться для теоретических оценок сложности соответствующей задачи. При геометрическом подходе смежность решений интерпретируется как наличие ребра между соответствующими вершинами многогранника $\operatorname{conv}(X)$. Таким образом, граф многогранника задачи содержит в себе некоторую информацию о её структурной сложности. Продолжая эту мысль, вполне естественно обратиться к изучению свойств всей решетки граней (множества всех граней, упорядоченных по включению) многогранника задачи.

Актуальность темы исследований. Широкий интерес к задачам комбинаторной оптимизации появился в 1950-х гг. Его возникновение было обусловлено тремя факторами: создание первых программируемых ЭВМ, создание концепции линейного программирования Канторовичем и Купмансом и разработка симплекс-метода Данцигом, а также накопленный опыт решения алгоритмических задач на графах. Именно в 1950-х гг. был разработан венгерский метод решения задачи о назначениях, алгоритм Форда-Фалкерсона для задачи о максимальном потоке, несколько алгоритмов для нахождения кратчайших путей, заново открыты старые и предложены новые алгоритмы для нахождения минимального остовного дерева, а также их обобщение для нахождения в матроиде базы минимального веса [55]. В это же время, после разработки Данцигом симплекс-метода, были реализованы первые успешные попытки его применения к различным задачам комбинаторной оптимизации. В частности, с помощью техники линейного программирования был достигнут впечатляющий по тем временам прогресс в решении задачи коммивояжера [30]. Развитие этой методики в настоящее время позволяет решать задачу коммивояжера для миллиона городов [39].

Успешное применение симплекс-метода стало источником многочисленных размышлениий о его теоретической эффективности. Так, например, было замечено, что нижней оценкой числа шагов симплекс-метода может служить диаметр графа многогранника. В связи с этим Хирш в 1957 году сформулировал гипотезу о том, что диаметр графа многогранника не может быть больше разности между числом его гиперграней и размерностью. С тех пор этой гипотезе уделялось значительное внимание, но лишь в 2010 году Сантосу удалось построить пример 43-мерного многогранника с 86 гипергранями, диаметр которого больше, чем 43 [53]. Тем не менее, в общем виде[1] эта гипотеза до сих пор остается открытой и привлекает внимание видных ученых [57].

Одним из основных результатов настоящей работы является точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому. В 1964 г. Кли [44] предположил, что этот диаметр равен $\lfloor n/2 \rfloor$, где n — число гиперграней. Но тремя годами позднее им же был найден контрпример [45]. С тех пор задача оставалась открытой.

Вместе с успехами и неудачами в решении отдельных задач в 1950 – 60-х гг. формировалось понятие эффективного алгоритма, окончательно сформулированное в работах Эдмондса [32] и Кобхэма [26]. В это же время Эдмондс [31] ввел понятие задачи, имеющей «хорошую характеризацию», что, по-сути, является определением того, что позднее было названо классом NP. Всё это послужило предпосылками к открытию в начале 1970-х гг. Куком [29], Карпом [43] и Левиным [65] NP-полных задач. Примечательно то, что каждый из них предложил свой способ сведéния задач. В частности, метод аффинной сводимости, развиваемый в настоящей диссертации, по своей сути ближе всего к сводимости Левина.

Открытие NP-полных задач послужило мощным толчком для дальнейших исследований, в том числе свойств многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами. В 1978 году Пападимитриу [50] показал, что задача проверки несмежности двух произвольно взятых вершин многогранника задачи коммивояжера NP-полна, то есть она также сложна, как и сама задача коммивояжера. Позднее аналогичные результаты для многогранников некоторых других NP-трудных задач появились в работах следующих авторов: Чунг; Гейст и Родин; Мацуи; Бондаренко и Юров; Альфаки и Мурти; Фиорини (см. ссылки в [9]). С другой стороны, в 1975 г. Хватал [25] нашел полиномиальный критерий смежности вершин многогранника независимых множеств. По-сути, этот же критерий смежности верен и для многогранников упаковок множеств,

[1] Верно ли, что диаметр графа ограничен сверху полиномом от числа гиперграней и размерности многогранника?

многогранников разбиений множеств и многогранников трехиндексной задачи о назначениях [38]. В 1984 г. Грешнев обнаружил [63], что граф многогранника задачи об m-вершинной клике полон, т. е. задача проверки смежности вершин для него тривиальна. Чуть позднее аналогичные результаты были получены для многогранника задачи о максимальном разрезе [20, 58] и для булева квадратичного многогранника [49, 59].

В диссертации показано, что семейство многогранников, описанное Мацуи [47], аффинно сводится к семействам многогранников, описанных в работах Чунг; Гейст и Родин; Бондаренко и Юров; Альфаки и Мурти; Фиорини. Одним из следствий этого является то, что все эти семейства наследуют от многогранников Мацуи NP-полноту проверки несмежности вершин. С другой стороны, показано, что перечисленные выше многогранники с полиномиальным критерием смежности аффинно сводятся к многогранникам Мацуи, причем аффинная сводимость в обратную сторону невозможна. Таким образом, оказалось, что многогранники Мацуи образуют своего рода водораздел между семействами многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин и семействами с полиномиальным критерием.

В 1979 году Хачиян [66] описал полиномиальный алгоритм для решения задачи линейного программирования. Этот факт стал теоретическим подтверждением эффективности геометрического подхода к решению задач комбинаторной оптимизации, что увеличило популярность исследований свойств соответствующих многогранников. В частности, большое внимание исследованию свойств графов многогранников уделено в монографии Емеличева, Ковалева и Кравцова [64].

В 1983 г. Бондаренко [61] ввел понятие алгоритма прямого типа и показал, что трудоемкость такого алгоритма оценивается снизу кликовым числом[2] графа многогранника соответствующей оптимизационной задачи. Им же была доказана сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников следующих NP-трудных задач: коммивояжер, максимальная клика, 3-сочетание и некоторых других. С другой стороны, кликовые числа графов многогранников оказались полиномиальны для следующих полиномиально разрешимых задач: сортировка,

[2] В оригинале эта характеристика называется плотностью графа.

минимальное остовное дерево, задача о кратчайшем пути. Также было показано, что некоторые классические комбинаторные алгоритмы являются алгоритмами прямого типа [61]. Недавно список оценок кликовых чисел графов многогранников задач пополнился несколькими новыми результатами (см. [23] и ссылки в ней).

Настоящая диссертационная работа во многом продолжает научные исследования, начало которым было положено в работах В.А. Бондаренко. Во-первых, в диссертации показано, что теория алгоритмов прямого типа применима и в тех случаях, когда на множество целевых векторов накладываются линейные ограничения. В частности, кликовое число полиэдрального графа для задачи о кратчайшем пути из экспоненциального превращается в полиномиальное при ограничении, когда допускаются лишь неотрицательные длины ребер. Предложенная идея успешно используется для получения новых результатов в [22] и [62]. Во-вторых, доказано, что алгоритм Куна–Манкреса для задачи о назначениях не принадлежит классу алгоритмов прямого типа и, кроме того, описан достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из этого класса. В-третьих, установлено, что сверхполиномиальность кликовых чисел графов многогранников NP-трудных задач имеет простое объяснение — ко всем этим семействам аффинно сводятся булевы квадратичные многогранники $P_{\mathrm{BQP}}(n)$, кликовые числа графов которых экспоненциальны по n. Более того, показано, что $\{P_{\mathrm{BQP}}(n)\}$, а вместе с ним и остальные рассматриваемые в настоящей работе семейства многогранников NP-трудных задач, для любого $k \in \mathbb{N}$ содержат k-смежностные[3] грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин.

Открытие Хачияном полиномиального алгоритма для задачи линейного программирования породило в 1980-х гг. волну попыток поиска компактного линейного описания для многогранника задачи коммивояжера. Все эти попытки были направлены на использование идеи расширенной формулировки многогранника (сам термин появился позд-

[3] Многогранник называется k-*смежностным*, если любые k его вершин образуют грань этого многогранника. В частности, многогранник, граф которого полон, называется 2-смежностным.

нее). *Расширенной формулировкой* многогранника P называется набор линейных ограничений, описывающих многогранник Q такой, что P является ортогональной проекцией Q. Сам многогранник Q называется *расширением* многогранника P. К тому времени уже были известны примеры, когда число линейных неравенств, необходимых для описания многогранника, экспоненциально, а для его расширения — полиномиально относительно длины входных данных задачи. Ни одна из попыток поиска компактной расширенной формулировки для многогранника задачи коммивояжера не привела к успеху, и в 1988 году Яннакакис [56] показал, что такие попытки в принципе не имеют перспективы, если предлагаемые расширенные формулировки удовлетворяют некоторым естественным условиям симметрии. Там же была высказана гипотеза, что утверждение остается справедливым и без условий симметрии. Кроме того, Яннакакис показал, что число линейных неравенств в расширенной формулировке многогранника не может быть меньше числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника. Впоследствии минимальное число линейных неравенств, необходимых для описания расширения многогранника было названо *сложностью расширения многогранника.*

В конце 2000-х гг. расширенные формулировки вновь привлекли внимание исследователей [28, 40], что привело к появлению целого ряда новых интересных результатов в данном направлении [27, 34, 41, 42, 46, 51, 52]. В частности, в 2012 г. Фиорини, Массар, Покутта, Тивари и де Вулф [46] доказали справедливость гипотезы Яннакакиса, показав, что число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней для булева квадратичного многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ экспоненциально относительно n и, как следствие, сложность расширения тоже экспоненциальна. Из этого результата, а также из установленного в настоящей диссертации факта аффинной сводимости булевых квадратичных многогранников ко многим другим семействам многогранников NP-трудных задач следует, что все эти семейства тоже обладают сверхполиномиальным числом прямоугольного покрытия и сверхполиномиальной сложностью расширения. С другой стороны, в диссертации впервые описан пример NP-трудной задачи, многогранники которой обладают полиномиальным числом прямоугольного покрытия.

В качестве тестирования потенциала расширенных формулировок в диссертации рассматривается задача оптимизации линейной функции на множестве вершин циклического многогранника $\mathcal{C}_{d,n}$, являющегося выпуклой оболочкой множества $\{(t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d \mid t = 1, 2, \ldots, n\}$. Эта задача тесно связана с задачей локализации корней многочлена с некоторой, заранее заданной точностью. В работе показано, что сложность расширения этого многогранника равна $O(\log n)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ (тогда как число его гиперграней имеет порядок $\Theta(n)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ при фиксированном d [35]).

В настоящей диссертации также введено понятие расширенной аффинной сводимости, сохраняющей такие свойства многогранников, как сверхполиномиальность сложности расширения и числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней. Показано, что семейство многогранников любой линейной задачи комбинаторной оптимизации с предикатом допустимости из класса NP расширенно аффинно сводится к семейству $\{P_{\mathrm{BQP}}(n)\}$. Фиорини, Массар, Патра и Тивари [36] используют этот факт для того, чтобы дать ответ на следующий вопрос из работы Бюрер [24]: «Кроме нескольких перечисленных задач, какие типы задач могут быть представлены как коположительные программы или полностью положительные программы?» (“Other than the handful of problems listed above, what types of problems can be represented as COPs or as CPPs?”).

Целью работы является анализ комбинаторно-геометрических свойств многогранников, характеризующих сложность соответствующих задач комбинаторной оптимизации. Это подразумевает: 1) поиск численных оценок различных комбинаторно-геометрических характеристик для наиболее востребованных семейств многогранников, 2) разработку методологии, упрощающей такого рода поиски, 3) анализ перспективности использования тех или иных характеристик в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач.

Методы исследования. При исследовании семейств комбинаторных многогранников интенсивно используется новое в данной области понятие аффинной сводимости. Также используются методы теории выпуклых многогранников, линейного программирования, теории графов и комбинаторного анализа, теории сложности вычислений.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и могут быть кратко сформулированы следующим образом:

1. Введено понятие аффинной сводимости семейств комбинаторных многогранников, сохраняющей такие свойства многогранников, как NP-полнота критерия несмежности вершин и сверхполиномиальность следующих числовых характеристик: число вершин, число гиперграней, кликовое число графа, сложность расширения, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней. С помощью этого понятия получены следующие результаты:

    - Показано, что специальное семейство многогранников, рассмотренное Мацуи в 1995 г., аффинно сводится к семействам многогранников следующих задач: рюкзак, коммивояжер, кубический подграф, 3-выполнимость, назначения с линейным ограничением. Одним из следствий этого является то, что все эти семейства наследуют от многогранников Мацуи NP-полноту проверки несмежности вершин.
    - Показано, что семейства многогранников независимых множеств, многогранников упаковок и разбиений множества, многогранников задачи об n-назначениях для $n \geqslant 3$ и многогранников раскрасок графа эквивалентны в смысле аффинной сводимости и аффинно сводятся к семейству многогранников Мацуи. Кроме того, установлено, что ни один из многогранников Мацуи (за исключением отрезков) не является гранью (в том числе несобственной) ни для одного из многогранников независимых множеств.

2. Обнаружены особые свойства булевых квадратичных многогранников, указывающие на их особое место среди других известных семейств многогранников NP-трудных задач:

    - Показано, что булевы квадратичные многогранники аффинно сводятся к семействам многогранников, перечисленным в предыдущем пункте (рюкзак, коммивояжер и т. д.), а также к многогранникам линейных упорядочиваний, многогранникам квадратичных назначений и квадратичных линейных упорядочиваний. Из этого следует, в частности, что такие свойства булевых квадратичных многогранников, как сверхполиномиальность кликового числа графа и числа прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней автоматически наследуются всеми этими семействами.

- Введены в рассмотрение семейства булевых многогранников степени p. Показано, что эти многогранники $\lfloor 3p/2 \rfloor$-смежностны и аффинно сводятся к булевым квадратичным. Из этого следует, что для любого натурального k булевы квадратичные многогранники (а вместе с ними и все остальные перечисленные выше семейства многогранников NP-трудных задач) содержат k-смежностные грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин.

3. Введено понятие расширенной аффинной сводимости, отличающееся от аффинной сводимости отсутствием требования биективности соответствующего аффинного отображения. Показано, что семейство многогранников любой линейной задачи комбинаторной оптимизации с предикатом допустимости из класса NP расширенно аффинно сводится к семейству булевых квадратичных многогранников. Таким образом, относительно расширенной аффинной сводимости все перечисленные выше семейства многогранников образуют один класс эквивалентности. Найден пример семейства многогранников NP-трудной задачи, к которому не может быть расширенно аффинно сведено ни одно из упомянутых выше семейств многогранников.

4. Сделаны оценки двух характеристик для циклических многогранников[4]:

   - Описана компактная расширенная формулировка размера

[4] Циклические многогранники обладают максимальным числом граней среди всех выпуклых многогранников, имеющих ту же размерность и такое же число вершин.

$O(\log n)^{\lfloor d/2 \rfloor}$ для d-мерных циклических многогранников на n вершинах.

- Найдено точное значение диаметра графа многогранника, двойственного к циклическому.

5. Выполнен критический анализ перспективности использования различных известных характеристик многогранников в качестве оценок сложности соответствующих оптимизационных задач:

   - На примере задачи о кратчайшем пути показано, что теория алгоритмов прямого типа (разработанная В. А. Бондаренко) применима и в тех случаях, когда на множество целевых векторов накладываются линейные ограничения (при этом многогранник задачи превращается в полиэдр).
   - Доказано, что алгоритм Куна–Манкреса (венгерский метод) для задачи о назначениях не принадлежит классу алгоритмов прямого типа. Кроме того, описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из этого класса.
   - Показано, что у любого выпуклого многогранника есть расширение, граф которого не содержит треугольников.
   - Приводится пример семейства многогранников NP-трудной задачи, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней которых полиномиально.
   - Приводятся примеры двух линейных задач комбинаторной оптимизации, многогранники которых комбинаторно эквивалентны друг другу, но одна из этих задач полиномиально разрешима, а другая NP-трудна.

Теоретическая и практическая значимость. Работа имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследований сложности задач комбинаторной оптимизации и поиска новых эффективных алгоритмов их решения. Значительная часть результатов может быть также использована в исследованиях комбинаторно-геометрических свойств выпуклых многогранников.

Значение полученных результатов подтверждается их цитированием как отечественными, так и зарубежными специалистами (список не включает соавторов соискателя): А.В. Николаев, А.В. Селиверстов, Р.Ю. Симанчев, L.B. Beasley, C.P. Davis-Stober, J.P. Doignon, H. Fawzi, Q. Feng, F. Glineur, J. Huchette, A. Huq, H. Klauck, T. Lee, A. Makkeh, S. Massar, P.A. Parrilo, M.K. Patra, V. Pilaud, M. Pourmoradnasseri, K. Qi, M. Regenwetter, J. Saunderson, D.O. Theis, H.R. Tiwary, J.P. Vielma, K. Zhao.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях, семинарах и симпозиумах: Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Алтай, 2010), XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011), Всероссийская конференция «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2011), Международная конференция «Дискретная геометрия» посвященная 100-летию А.Д. Александрова (Ярославль, 2012), Международная топологическая конференция «Александровские чтения» (Москва, 2012), XXI Международный симпозиум по математическому программированию (Берлин, 2012), Международный симпозиум по комбинаторной оптимизации (Оксфорд, 2012), Международная конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций» (Новосибирск, 2013), 26-я конференция Европейского отделения по комбинаторной оптимизации (2013, Париж), семинар Института математической оптимизации университета Отто фон Герике (Магдебург, 2013), семинар по дискретной математике в Свободном университете Берлина (2013), 5-й семинар по комбинаторной оптимизации (Каржез, Франция, 2014), 9-я Международная конференция по теории графов и комбинаторике (Гренобль, Франция, 2014), XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию С.С. Рышкова (Тула, 2015), 5-я Международная конференция по сетевому анализу (Нижний Новгород, 2015), семинар лаборатории «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П.Г. Демидова, Нижегородский семинар по дискретной математике, семинар по теории сложности вычислений ВЦ ФИЦ ИУ РАН, семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ им. М.В. Ломоносова, семинар «Дискретная и вычислительная геометрия» ИППИ РАН, семинар кафедры математической теории интеллектуальных систем МГУ им. М.В. Ломоносова, семинар кафедры математической кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова, межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, восьми глав, заключения и списка литературы из 194 наименований. В конце каждой библиографической ссылки в списке литературы приводятся страницы диссертации, где эта ссылка используется. Общий объем диссертации — 250 страниц, включая 22 рисунка.

Публикации. Диссертация продолжает исследования, начатые автором в его кандидатской диссертации [17].

Материалы диссертации опубликованы в 16 печатных работах, из них 12 статей [4–15] — в изданиях, индексируемых в Scopus, 3 статьи [1–3] — в журналах, входящих в RSCI, и одна глава в монографии [16].

Одна публикация подготовлена в соавторстве с Ю.В. Богомоловым, К. Пашковичем и С. Фиорини [11]. Совместная работа над основным результатом этой публикации, включенным в текст диссертации, происходила следующим образом (каждый следующий этап работы опирался на предыдущие). Формулировка задачи в целом и доказательство существования расширения размера $2\lfloor \log_2(n-1) \rfloor + 2$ для циклического n-угольника принадлежат диссертанту; конструктивное доказательство последнего факта найдено совместно с С. Фиорини; аналогичный результат для трехмерного циклического многогранника получен Ю.В. Богомоловым; компактная расширенная формулировка для произвольной размерности найдена одновременно и независимо диссертантом и К. Пашковичем.

Финансовая поддержка. Исследования, включенные в диссертацию, были поддержаны грантами РФФИ 00-01-00662-а, 03-01-00822-а; ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (гос. контракт № 02.740.11.0207), лабораторией «Дискретная и вычислительная геометрия» ЯрГУ им. П. Г. Демидова (грант Правительства РФ № 11.G34.31.0057), проектами № 477 и № 984 в рамках базовой части гос. задания на НИР ЯрГУ (2014–2016 гг.) и гос. заданием № 1.5768.2017/П220 на НИР ЯрГУ.

Краткое содержание работы

В **первой главе** перечисляются и уточняются базовые математические понятия и факты, используемые далее в основной части диссертации. В разделах 1.1 и 1.2 вводятся необходимые понятия теории графов и теории выпуклых многогранников, соответственно. В разделе 1.3 приводятся используемые далее понятия теории сложности вычислений и, в частности, теории NP-полных задач.

Общепринятая формулировка задачи комбинаторной оптимизации уточняется в разделе 1.4. Там же приводится определение *линейной задачи комбинаторной оптимизации*, представляющей собой (с учетом сделанных в тексте диссертации замечаний) тройку:

1. Язык входных данных L, $L \in P$. Далее слово $I \in L$ называется *кодом задачи.*
2. *Размерность* $d\colon L \to \mathbb{N}$ (полиномиально вычислима).
3. *Предикат допустимости* $g\colon \mathbb{Z}^d \times L \to \{\text{ложь}, \text{истина}\}$, $g \in \mathrm{NP}$, определяющий *множество допустимых решений*

$$X = X(I) = \Big\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^d \;\Big|\; \mathrm{size}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{poly}(\mathrm{size}(I) + d(I)) \text{ и } g(\boldsymbol{x}, I) \Big\}.$$

Входными данными *индивидуальной* задачи (экземпляра задачи) являются её код I и *целевой вектор* $\boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}^d$. Цель задачи — найти среди всех допустимых решений $X(I)$ такое, на котором целевая функция $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle$ принимает максимальное значение. Найденное решение $\boldsymbol{x}$ называется *оптимальным.* Сложность задачи оценивается относительно величины $\mathrm{size}(I) + d(I)$, называемой *размером* задачи. (В частности, полиномиальная вычислимость понимается в сильном смысле.)

Во **второй главе** вводится специфичная для темы диссертационной работы терминология и приводится обзор известных по этой теме фактов.

В разделе 2.1 вводится определение семейства многогранников линейной задачи комбинаторной оптимизации. С каждым кодом I соответствующей задачи связывается многогранник $\operatorname{conv}(X(I))$, представляющий собой выпуклую оболочку множества допустимых решений. Таким образом, за счет произвольности выбора кода I, образуется семейство многогранников задачи, называемое далее *комбинаторным*. Везде далее многогранником, как правило, называется множество его вершин, то есть его V-описание. Для случая, когда на целевой вектор $\boldsymbol{c}$ задачи накладываются дополнительные линейные ограничения вида $\langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a_i} \rangle \leqslant 0$, $i \in [k]$, соответствующий *полиэдр задачи* определяется как сумма Минковского многогранника $\operatorname{conv}(X(I))$ и конуса $\operatorname{cone}\{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k}\}$. В этом же разделе приводятся определения некоторых, часто встречаемых в литературе комбинаторных многогранников и полиэдров: булева квадратичного многогранника $P_{\mathrm{BQP}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$; многогранника задачи о рюкзаке $P_{\mathrm{knap}}(\boldsymbol{a}, b)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^n$, $b \in \mathbb{Z}$; многогранников путей $P_{\mathrm{path}}(n)$ и орпутей $P_{\mathrm{dipath}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$; многогранников гамильтоновых циклов $P_{\mathrm{TSP}}(n)$ и гамильтоновых контуров $P_{\mathrm{ATSP}}(n)$; перестановочного многогранника $P_{\mathrm{perm}}(n)$; многогранника задачи о назначениях $P_{\mathrm{Birk}}(n)$; многогранника $P_{\mathrm{stab}}(G)$ независимых множеств в графе $G = (V, E)$; полиэдра задачи о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности длин контуров $P_{\mathrm{shortpath}}(n)$; некоторых других многогранников и полиэдров.

В разделе 2.2 обсуждается задача идентификации граней многогранников задач. Основное внимание уделено задаче идентификации смежности вершин. Перечислены известные по этой теме результаты.

Раздел 2.3 посвящен краткому обзору известных фактов для таких характеристик графов многогранников задач, как число вершин, диаметр и кликовое число, а также, связанных с последними двумя характеристиками, гипотезы Хирша и теории алгоритмов прямого типа.

В разделе 2.4 вводится понятие расширения многогранника и приводится краткий обзор известных по этой теме фактов. *Расширением* многогранника $P \subseteq \mathbb{R}^d$ называется многогранник $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ вместе с аффинным отображением $\alpha \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющим условию $P = \alpha(Q)$. Расширения, в первую очередь, интересны тем, что задача оптимизации на многограннике P сводится к задаче оптимизации на его расширении Q. Число линейных неравенств, необходимых для описания расширения Q, называется *размером расширения.* Известны примеры, когда размер расширения оказывается существенно меньше числа неравенств, необходимых для описания исходного многогранника P. *Сложностью расширения* $\mathrm{xc}(P)$ многогранника P называется минимальный размер среди всех его расширений.

Пусть $M \in \{0,1\}^{n \times k}$ — матрица инциденций. Множество $I \times J$, где $I \subseteq [n]$, $J \subseteq [k]$, называется *0-прямоугольником* в матрице M, если $M(i,j) = 0$ для всех $i \in I$ и $j \in J$. *Прямоугольным покрытием* матрицы M называется множество 0-прямоугольников, объединение которых совпадает с множеством нулей в M. *Числом прямоугольного покрытия* матрицы называется наименьшее число 0-прямоугольников, необходимое для её прямоугольного покрытия. Число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней многогранника P обозначаем $\mathrm{rc}(P)$. Эта величина и сложность расширения $\mathrm{xc}(P)$ связаны с размерностью $\dim(P)$, числом вершин $\mathrm{vert}(P)$, числом гиперграней $\mathrm{facet}(P)$ и числом всех граней $\mathrm{face}(P)$ следующими соотношениями [27, 56]:

$$\dim(P) + 1 \leqslant \log_2 \mathrm{face}(P) \leqslant \mathrm{rc}(P) \leqslant \mathrm{xc}(P) \leqslant \min\{\mathrm{vert}(P), \mathrm{facet}(P)\}.$$

Многочисленные известные факты говорят о том, что $\mathrm{rc}(P)$ дает весьма точную нижнюю оценку, а $\mathrm{xc}(P)$ — верхнюю оценку реальной вычислительной сложности соответствующей оптимизационной задачи. Под *реальной сложностью задачи* комбинаторной оптимизации здесь и далее понимаются современные эмпирические представления о её вычислительной сложности. Так, например, реальная сложность NP-трудных задач на сегодняшний день сверхполиномиальна, а реальная сложность задачи о совершенном паросочетании равна $\Theta(n^3)$.

В разделе 2.5, на основе фактов, изложенных во второй главе, формулируются общие вопросы, поиску ответов на которые посвящены последующие главы диссертации.

В третьей главе описан метод аффинной сводимости, активно используемый в последующих двух главах.

В первом разделе вводится определение аффинной сводимости задач, служащее основой для различных его модификаций в последующих разделах. Линейная задача комбинаторной оптимизации (L, d, g) *аффинно сводится* к задаче (L', d', g'), если существуют вычислимые за полиномиальное (относительно размера первой задачи) время:

1. Преобразование $\tau\colon L \to L'$.

2. Алгоритм построения для каждого кода $I \in L$ аффинного отображения $\alpha\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, где $d = d(I)$, $d' = d'(\tau(I))$.

3. Функция $\beta\colon Y \to X$, где $X = X(I)$ — множество допустимых решений первой задачи, а Y — множество всех таких допустимых решений $\boldsymbol{y} \in X'(\tau(I))$ второй задачи, для каждого из которых найдется целевой вектор $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\boldsymbol{y}$ является оптимальным решением второй задачи с входом $(\tau(I), \alpha(\boldsymbol{c}))$. Причем для любого $\boldsymbol{y} \in Y$ и любого $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{y}$ является оптимальным решением второй задачи с входом $(\tau(I), \alpha(\boldsymbol{c}))$ тогда и только тогда, когда $\beta(\boldsymbol{y})$ является оптимальным решением первой задачи с входом $(I, \boldsymbol{c})$.

Прототипом этого определения послужило определение аффинной сводимости из кандидатской диссертации автора [17]. Ключевые отличия: отсутствует требование биективности аффинного отображения α и функции β; учтена зависимость множества допустимых решений от исходного кода задачи.

В разделе 3.2 приводится определение конусного разбиения пространства исходных данных задачи. *Конусным разбиением пространства исходных данных* задачи линейной оптимизации на множестве $X \subset \mathbb{R}^d$ называется совокупность конусов вида:

$$K(\boldsymbol{x}) = \left\{\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}\rangle \geqslant \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}\rangle,\ \forall \boldsymbol{y} \in X\right\},$$

где $\boldsymbol{x} \in X$, причем в разбиение включаются только те конусы, размерность которых равна размерности пространства $\mathbb{R}^d$. Конусное разбиение является двойственной к многограннику $\operatorname{conv}(X)$ конструкцией. По аналогии с конусным разбиением всего пространства определяется разбиение множества исходных данных $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ (предполагается, что Q — полиэдр) задачи линейной оптимизации на $X \subset \mathbb{R}^d$. Оно состоит из полиэдров $K(\boldsymbol{x}, Q) = K(\boldsymbol{x}) \cap Q$. Это определение полезно в тех случаях, когда на целевой вектор накладываются линейные ограничения. Например, в классической задаче о кратчайшем пути — ограничение неотрицательности длин ребер графа. В конце раздела вводится определение аффинной сводимости разбиений исходных данных задач, отличающееся от определения аффинной сводимости задач требованиями биективности аффинного отображения α и функции β.

В разделе 3.3 вводится естественный способ сравнения многогранников: если многогранник P аффинно эквивалентен многограннику Q или же его грани, используем обозначение $P \leqslant_A Q$. Соотношение $P \leqslant_A Q$ позволяет сравнивать различные комбинаторно-геометрические характеристики многогранников P и Q: числа вершин и гиперграней, некоторые свойства графов (например, кликовые числа), сложности расширений, числа прямоугольных покрытий матриц инциденций вершин-гиперграней и некоторые другие. Далее в этом разделе приводится несколько простых примеров использования соотношения $\leqslant_A$. В конце раздела даны определения *многогранника упаковок*, представляющего собой выпуклую оболочку множества $P_{\text{pack}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{1}\}$, где $A \in \{0,1\}^{m\times n}$, и *многогранника разбиений* $P_{\text{part}}(A) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{1}\}$. Непосредственно из определений следует $P_{\text{part}}(A) \leqslant_A P_{\text{pack}}(A)$.

В последнем разделе третьей главы вводится определение аффинной сводимости семейств многогранников, используемое в четвертой главе. По аналогии с размером задачи (L, d, g), *размером* многогранника $\operatorname{conv}(X(I))$ называем величину $\operatorname{size}(I)+d(I)$. Семейство многогранников $\mathcal{P}$ *аффинно сводится* к семейству многогранников $\mathcal{Q}$, если найдутся полиномиально вычислимые (относительно размера многогранника $P \in \mathcal{P}$):

1. Преобразование τ кода I каждого многогранника $P(I) \in \mathcal{P}$ в код I' многогранника $Q(I') \in \mathcal{Q}$.

2. Аффинное отображение $\alpha\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$, $d = d(I)$, $d' = d'(\tau(I))$, такое, что многогранник $\alpha(P(I))$ является гранью (возможно несобственной) многогранника $Q(\tau(I))$ и аффинно эквивалентен $P(I)$.

Факт аффинной сводимости $\mathcal{P}$ к $\mathcal{Q}$ обозначаем так: $\mathcal{P} \propto_A \mathcal{Q}$.

Непосредственно из определения и перечисленных ранее фактов выводится следующее утверждение. Пусть $\mathcal{P} \propto_A \mathcal{Q}$ и в семействе $\mathcal{P}$ есть многогранники, имеющие одно или несколько из следующих свойств: сверхполиномиальность числа вершин или гиперграней (относительно размера многогранника); сверхполиномиальное кликовое число графа многогранника; NP-полнота критерия несмежности вершин; сверхполиномиальное число прямоугольного покрытия; сверхполиномиальная сложность расширения. Тогда в $\mathcal{Q}$ имеются многогранники с теми же свойствами.

Основные результаты раздела 3.4:

1. Семейства многогранников независимых множеств, многогранников упаковок и многогранников разбиений эквивалентны относительно аффинной сводимости [12].

2. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует граф $G = (V, E)$, $|V| = n(n+1)$, $|E| = n(2n-1)$, такой, что $P_{\mathrm{BQP}}(n) \leqslant_A P_{\mathrm{stab}}(G)$ [3, 12]. Если же граф $G = (V, E)$ неполный, то соотношение $P_{\mathrm{stab}}(G) \leqslant_A P_{\mathrm{BQP}}(n)$ невозможно ни при каком n.

В конце раздела устанавливается связь между аффинной сводимостью семейств многогранников и аффинной сводимостью конусных разбиений пространств исходных данных задач.

В **главе 4** представлен ряд результатов, связанных с понятием аффинной сводимости.

По аналогии с многогранниками упаковок и разбиений определяется *многогранник покрытий* $P_{\mathrm{cover}}(M) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid M\boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{1}\}$, $M \in \{0,1\}^{m \times n}$. *Многогранником двойных покрытий* называется выпуклая оболочка множества $P_{\mathrm{2cover}}(B) = \{\boldsymbol{x} \in \{0,1\}^n \mid B\boldsymbol{x} = \mathbf{2}\}$, где $B \in \{0,1\}^{m \times n}$, причем каждая строка матрицы B содержит ровно четыре единицы и не имеет нулевых столбцов. Впервые это семейство многогранников было рассмотрено Мацуи [47], им же было показано, что $P_{\mathrm{2cover}}(B) \leqslant_A P_{\mathrm{cover}}(M)$, где матрица $M \in \{0,1\}^{4m \times n}$ содержит ровно три единицы в каждой строке. Основое внимание в этом разделе уделяется специальным многогранникам $P_{\mathrm{Matsui}}(A)$, где матрица $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ содержит ровно три единицы в каждой строке. Эти многогранники являются многогранниками двойных покрытий. Известно [47], что задача распознавания несмежности вершин для P_{Matsui} NP-полна. Основными результатами раздела являются два утверждения, опубликованные в [15]:

1. Многогранники независимых множеств P_{stab} аффинно сводятся к семейству многогранников P_{Matsui}.

2. Если многогранник $P_{\mathrm{Matsui}}(A)$ не является отрезком, то соотношение $P_{\mathrm{Matsui}}(A) \leqslant_A P_{\mathrm{stab}}(G)$ невозможно ни для какого графа G.

Последнее свойство говорит о безусловном структурном отличии многогранников двойных покрытий от многогранников независимых множеств и аффинно сводящихся к ним семейств.

Далее, в разделе 4.2 рассматриваются семейства многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин: многогранники задачи о рюкзаке $P_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{a}, b)$, многогранники задачи о разбиении чисел $P_{\mathrm{numpart}}(\boldsymbol{a})$, многогранники задачи о назначениях с ограничением $P_{\mathrm{CA}}(\boldsymbol{a}, b)$, многогранники задачи о выполнимости $P_{\mathrm{sat}}(U, C)$, многогранники задачи о частичном упорядочивании $P_{\mathrm{PO}}(n)$, многогранники кубических подграфов $P_{\text{3-factor}}(n)$. Приводится ссылка на результат Фиорини [33] о том, что семейство многогранников задачи о 3-выполнимости эквивалентно семейству многогранников задачи о частичном упорядочивании с точки зрения аффинной сводимости (понятие аффинной сводимости в его работе не используется). В той же работе показано, что многогранники задачи о k-выполнимости не могут быть аффинно сведены к семейству многогранников задачи об m-выполнимости, если $k > m$. Основным результатом этого раздела является серия доказательств того, что многогранники двойных покрытий P_{2cover} аффинно сводятся к перечисленным семействам [7, 9].

В разделе 4.3 рассматриваются многогранники линейных порядков и многогранники деревьев Штейнера в графе. Показано, что булевы квадратичные многогранники $P_{\mathrm{BQP}}(n)$ аффинно сводятся к первому семейству [14], а многогранники независимых множеств $P_{\mathrm{stab}}(G)$ — ко второму.

В разделе 4.4 рассматриваются семейства многогранников, имеющих простой критерий смежности вершин. С точки зрения аффинной сводимости они разбиваются на два класса эквивалентности. Многогранники трехиндексной задачи о назначениях $P_{\text{3-A}}(n)$ и несколько семейств многогранников раскрасок графа ($P_{\text{color1}}(G,k)$, $P_{\text{color2}}(G)$ и $P_{\text{color3}}(G)$) лежат в одном классе эквивалентности с многогранниками независимых множеств. А семейства многогранников квадратичной задачи линейных упорядочиваний $P_{\text{QLO}}(n)$ и квадратичной задачи о назначениях $P_{\text{QA}}(n)$ оказываются эквивалентны семейству булевых квадратичных многогранников $P_{\text{BQP}}(n)$. Результаты этого раздела опубликованы в [3].

В разделе 4.5 рассматриваются семейства многогранников задач, тесно связанных с задачей коммивояжера. Показано, что многогранники задачи о выполнимости $P_{\text{sat}}(U,C)$ аффинно сводятся к многогранникам гамильтоновых контуров $P_{\text{ATSP}}(n)$ [1]. Одним из следствий этого утверждения является то, что любой d-мерный 0/1-многогранник на $2^d - k$ вершинах ($0 \leqslant k \leqslant 2^d - 1$) аффинно эквивалентен некоторой грани многогранника $P_{\text{ATSP}}(n)$ при $n = (2k+1)d$. Ранее Биллера и Сарангараджан [21] доказали это утверждение для $n = (4k+1)d$ иными средствами. Второй результат раздела, опубликованный в [8], устанавливает следующую связь между семействами P_{BQP} и P_{ATSP}: $P_{\text{BQP}}(m) \leqslant_A P_{\text{ATSP}}(n)$, где $n = 2m^2 - m$. В подразделе 4.5.2 рассматриваются семейства многогранников следующих задач: гамильтонов цикл, гамильтонов (ор)путь, s-t (ор)путь, гамильтонов s-t (ор)путь. Показано, что многогранники гамильтоновых контуров аффинно сводятся ко всем этим семействам. Из этого следует, в частности, что графы многогранников этих семейств обладают сверхполиномиальным кликовым числом и задача распознавания несмежности вершин для них NP-полна.

По аналогии с булевыми квадратичными многогранниками в разделе 4.6 вводятся в рассмотрение булевы многогранники $P_{\text{BPP}}(n,p)$ степени p. Для $p = 2$, $P_{\text{BPP}}(n,p)$ совпадает с $P_{\text{BQP}}(n)$, а для $p = 1$, $P_{\text{BPP}}(n,p)$ — n-мерный 0/1-куб. Показано, что $P_{\text{BPP}}(n,p)$ s-смежностен при $s \leqslant p + \lfloor p/2 \rfloor$. Для $m \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2m$ доказано, что $P_{\text{BPP}}(k,2m) \leqslant_A P_{\text{BQP}}(n)$ при $n > 2\binom{k}{m}$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant 2^{2\cdot\lceil k/3 \rceil}$, $P_{\text{BQP}}(n)$ имеет k-смежностную грань со сверхполиномиальным числом $2^{\Theta\left(n^{1/\lceil k/3 \rceil}\right)}$ вершин. Из этого и из перечисленных ранее аффинных сведéний следует, что во всех упоминаемых выше семействах многогранников NP-трудных задач имеются многогранники, содержащие k-смежностные грани со сверхполиномиальным (относительно размерности многогранника) числом вершин. Результаты раздела опубликованы в [10].

В последнем разделе главы 4 рассматриваются задача о назначениях и задача о кратчайшем орпути с ограничением неотрицательности длин контуров. Показано, что конусное разбиение множества исходных данных последней аффинно сводится к конусному разбиению пространства исходных данных первой [17]. Как следствие, граф полиэдра кратчайших орпутей $P_{\text{shortpath}}(n+1)$ является подграфом графа многогранника Биркгофа $P_{\text{Birk}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

В первом разделе **главы 5** вводится понятие расширенной аффинной сводимости, отличающееся от аффинной сводимости отсутствием ограничения биективности аффинного отображения. Семейство многогранников $\mathcal{P}$ *расширенно аффинно сводится* к семейству многогранников $\mathcal{Q}$, если найдутся полиномиально вычислимые (относительно размера многогранника $P \in \mathcal{P}$):

1. Преобразование τ кода I каждого многогранника $P = P(I) \in \mathcal{P}$ в код I' многогранника $Q = Q(I') \in \mathcal{Q}$.

2. Система линейных уравнений $D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, задающая грань $F = \{\boldsymbol{y} \in Q \mid D\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}\}$ многогранника Q.

3. Аффинное отображение $\beta\colon \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R}^d$, $d = d(I)$, $d' = d'(\tau(I))$, такое, что $P = \beta(F)$.

Обозначение: $\mathcal{P} \propto_E \mathcal{Q}$. Во многих случаях доказательство соотношений вида $\mathcal{P} \propto_E \mathcal{Q}$ принципиально проще, чем соотношений $\mathcal{P} \propto_A \mathcal{Q}$. Минусом такого ослабления ограничений является потеря некоторых полезных свойств. В частности, такие свойства, как NP-полнота проверки несмежности вершин, сверхполиномиальность числа гиперграней и сверхполиномиальность кликового числа графа, вообще говоря, не наследуются при расширенном аффинном сведéнии. Далее в этом же разделе приводятся некоторые свойства общего характера для этого типа сводимости. Например, показано, что если многогранник $P \subseteq \mathbb{R}^d$

является образом многогранника $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ при аффинном отображении $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ и, кроме того, $\pi(\operatorname{ext} Q) = \operatorname{ext} P$, то граф многогранника P является подграфом графа многогранника Q.

В разделе 5.2 приводится несколько примеров расширенной аффинной сводимости. В целом, благодаря ослаблению условий, доказательства соответствующих утверждений оказываются значительно более простыми, чем для (обычной) аффинной сводимости.

В разделе 5.3 показано, что любое семейство многогранников, предикат допустимости g которого принадлежит классу NP, расширенно аффинно сводится к булевым квадратичным многогранникам [6]. Тем самым, все упоминаемые выше в настоящей работе семейства многогранников оказываются эквивалентны друг другу относительно расширенной аффинной сводимости.

В **главе 6** рассматриваются циклические многогранники. Как известно [48], они обладают максимальным числом граней (любой размерности) среди всех выпуклых многогранников той же размерности и с таким же числом вершин. Благодаря этому обстоятельству циклические многогранники являются хорошей экспериментальной базой для проверки разного рода теоретических утверждений. В первом разделе главы вводится определение циклического многогранника $\mathcal{C}_d(T) = \bigl\{(t, t^2, \ldots, t^d) \in \mathbb{R}^d \bigm| t \in T\bigr\}$, где $T \subset \mathbb{R}$ конечно, и формулируется условие четности Гейла [35], идентифицирующее подмножества вершин, образующих гиперграни этого многогранника. В разделе 6.2 для многогранника $\mathcal{C}_d([n])$ приводится описание расширенной формулировки размера $2\bigl(2\lfloor\log_2(n-1)\rfloor + 2\bigr)^{\lfloor d/2\rfloor}$ при $2 \leqslant d < n$ (результат опубликован в совместной работе [11]). В разделе 6.3 вычисляется точное значение для диаметра $\Delta_c(d, n)$ ридж-графа d-мерного циклического многогранника на n вершинах: $\Delta_c(d,n) = n - d - \left\lceil \frac{n-2d}{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$ при $n > 2d$ [5]. Равенство $\Delta_c(d,n) = n - d$ при $d < n \leqslant 2d$ было доказано Кли в 1964 году [44].

Глава 7 посвящена теории алгоритмов прямого типа. В первом разделе приводится ее описание, заимствованное из [61]. Ключевой особенностью алгоритма прямого типа является то, что его сложность ограничена снизу кликовым числом графа многогранника (конусного разбиения) решаемой задачи.

В разделе 7.2 приводится доказательство критерия смежности для графов решений трех полиномиально разрешимых вариантов задачи о кратчайшем пути. На основе этого критерия и доказательства теоремы 2 из [60] делается вывод о том, что кликовое число для всех трех вариантов равно $\lfloor n^2/4 \rfloor$, где n — число вершин графа, в котором ищется кратчайший путь. С учетом результата раздела 4.7, это дает нижнюю оценку $\lfloor (n+1)^2/4 \rfloor$ для кликового числа графа многогранника задачи о назначениях $P_{\text{Birk}}(n)$. Результаты этого раздела опубликованы в [17] и [4].

В разделе 7.3 перечисляется ряд фактов, демонстрирующих ограниченность применимости этого подхода к оценке сложности задач. Приводится доказательство того, что алгоритм Куна–Манкреса для задачи о назначениях не является алгоритмом прямого типа. Кроме того, описывается достаточно универсальный способ модификации алгоритмов, существенно не меняющий их трудоемкости, но гарантированно выводящий их из класса алгоритмов прямого типа. Результаты раздела опубликованы в [2].

В **главе 8** изучается следующий вопрос. Можно ли, зная только комбинаторные свойства многогранника, отделить NP-трудные задачи от полиномиально разрешимых? В разное время в качестве таких характеристик сложности рассматривались: число вершин многогранника, число его гиперграней, диаметр и кликовое число графа, число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней.

В разделе 8.1 приводятся примеры семейств многогранников, для которых значения упомянутых выше характеристик (за исключением числа прямоугольного покрытия) существенно отличаются от реальной вычислительной сложности соответствующих оптимизационных задач.

В разделе 8.2 приводится описание NP-трудной задачи оптимизации, многогранники $P_{\text{CBQP}}(n)$ которой получены в результате небольшого шевеления (пертурбации) вершин булева квадратичного многогранника $P_{\text{BQP}}(n)$. Доказано, что многогранник $P_{\text{CBQP}}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, симплициален. Следовательно, согласно [27], число прямоугольного покрытия его матрицы инциденций вершин-гиперграней полиномиально: $\text{rc}(P_{\text{CBQP}}(n)) = O(n^5)$. Это означает, что ни одно из семейств многогранников NP-трудных задач, рассмотренных ранее в главах 3–5 не может быть расширенно аффинно сведено к семейству P_{CBQP}. С другой стороны, в [19, Theorem 4] установлено, что любой многогранник, аппроксимирующий $P_{\text{BQP}}(n)$ с точностью $O(1/n)$, имеет сложность расширения порядка $2^{\Omega(n)}$. Следовательно, сложность расширения для $P_{\text{CBQP}}(n)$ экспоненциальна: $\operatorname{xc}(P_{\text{CBQP}}(n)) = 2^{\Omega(n)}$.

В разделе 8.3 приводятся примеры двух линейных задач комбинаторной оптимизации, многогранники которых комбинаторно эквивалентны и длины двоичной записи координат вершин этих многогранников одинаковы. При этом первая задача разрешима за полиномиальное время, а вторая — NP-трудна. Этот результат говорит о том, что в рамках наиболее распространенной вычислительной модели (машина Тьюринга) ни одна чисто комбинаторная характеристика многогранника (однозначно определяемая его решеткой граней) не дает возможности отделить полиномиально разрешимые задачи от NP-трудных.

Результаты последней главы опубликованы в [13].

Заключение

Бо́льшая часть результатов диссертации связана с понятием аффинной сводимости линейных задач комбинаторной оптимизации. С помощью этого понятия удалось дать универсальное объяснение для известных ранее многочисленных разрозненных результатов, оценивающих различные сложностные характеристики многогранников задач (сложность проверки смежности вершин, кликовое число графа, сложность расширения и число прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней), а также получить ряд новых оценок. Кроме этого, показано, что семейство булевых квадратичных многогранников занимает особое положение среди семейств многогранников других NP-трудных задач. Можно сказать, что свойства, определяющие труднорешаемость, представлены в этом семействе в концентрированном виде и эти свойства наследуются всеми остальными известными семействами многогранников NP-трудных задач. Одной из перспектив развития полученных результатов (выходящей за рамки настоящей диссертационной работы) является то, что установленные между семействами многогранников связи позволяют описывать новые классы линейных неравенств для сводимого семейства через известные линейные неравенства того семейства, к которому выполняется сведéние. Новые классы линейных неравенств, в свою очередь, могут использоваться для повышения эффективности алгоритмов решения соответствующей задачи целочисленного линейного программирования.

В работе также рассматривается расширенная аффинная сводимость, отличающаяся от аффинной сводимости отсутствием требования биективности соответствующего аффинного отображения. С одной стороны, такое ослабление ограничений лишает аффинную сводимость некоторых полезных свойств. Например, расширенное аффинное сведéние, вообще говоря, не дает возможности сравнивать числа гиперграней и кликовые числа графов сравниваемых семейств многогранников. С другой стороны, ослабление ограничений существенно упрощает доказательства фактов расширенной аффинной сводимости и, вместе с тем, позволяет сравнивать сложность расширений и чи́сла прямоугольных покрытий матриц инциденций вершин-гиперграней. В работе показано, что все семейства многогранников с предикатом допустимости из класса NP расширенно аффинно сводятся к булевым квадратичным многогранникам. То есть все ранее известные семейства многогранников NP-трудных задач оказываются (в указанном смысле) в одном классе эквивалентности. Вместе с тем в работе описано новое семейство многогранников NP-трудной задачи (с полиномиальным числом прямоугольного покрытия) к которому не может быть расширенно аффинно сведено ни одно из ранее известных семейств.

Полученные в работе результаты и описанные примеры семейств многогранников говорят о том, что любая чисто комбинаторная характеристика (однозначно определяемая по матрице инциденций вершин-гиперграней) многогранника не позволяет надежно отделить полиномиально разрешимые задачи от труднорешаемых. С другой стороны, все известные ранее и установленные в настоящей работе факты позволяют сделать предположение о том, что сложность линейной задачи комбинаторной оптимизации оценивается снизу числом прямоугольного покрытия матрицы инциденций вершин-гиперграней соответствующего многогранника (то есть чисто комбинаторной характеристикой), а сверху — сложностью расширения многогранника (то есть комбинаторно-геометрической характеристикой). В связи с этим особенно интересным представляется следующий вопрос. Верно ли, что сложность задачи (в некотором, достаточно широком классе алгоритмов) оценивается снизу числом прямоугольного покрытия?

Список публикаций соискателя по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК

1. Максименко А. Н. Многогранники задачи о выполнимости являются гранями многогранника задачи коммивояжёра // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 76–83.
2. Максименко А. Н. Характеристики сложности: кликовое число графа многогранника и число прямоугольного покрытия // Моделирование и анализ информационных систем. — 2014. — Т. 21, № 5. — С. 116–130.
3. Maksimenko A. N. A special role of Boolean quadratic polytopes among other combinatorial polytopes // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, № 1. — С. 23–40.

В изданиях, индексируемых Scopus и/или Web of Science

4. Максименко А. Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1693–1696.
5. Максименко А. Н. Диаметр ридж-графа циклического многогранника // Дискретная математика. — 2009. — Т. 21, № 2. — С. 146–152.
6. Максименко А. Н. Аналог теоремы Кука для многогранников // Известия вузов. Математика. — 2012. — Т. 56, № 8. — С. 34–42.
7. Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 443, № 6. — С. 661–663.
8. Максименко А. Н. Многогранники коммивояжера и разрезов. аффинная сводимость // Дискретная математика. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 31–38.
9. Maksimenko A. The common face of some 0/1-polytopes with NP-

complete nonadjacency relation // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 203, no. 6. — P. 823–832.
10. Maksimenko A. k-Neighborly faces of the Boolean quadric polytopes // Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 203, no. 6. — P. 816–822.
11. Small extended formulations for cyclic polytopes / Yu. Bogomolov, S. Fiorini, A. Maksimenko, K. Pashkovich // Discrete & Computational Geometry. — 2015. — Vol. 53, no. 4. — P. 809–816.
12. Максименко А. Н. Наиболее простые семейства многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 3. — С. 272–274.
13. Максименко А. Н. Сложность задач комбинаторной оптимизации в терминах решёток граней ассоциированных многогранников // Дискретный анализ и исследование операций. — 2016. — Т. 23, № 3. — С. 61–80.
14. Максименко А. Н. Булев квадратичный многогранник является гранью многогранника линейных порядков // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 640–646.
15. Максименко А. Н. Об одном семействе 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 2. — С. 29–39.

Прочие работы

16. Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — URSS М., 2008.
17. Максименко А. Н. Графы многогранников и сводимость задач комбинаторной оптимизации : дис. ... канд. ф.-м. наук / А Н Максименко ; Ярославский гос. ун-т им. П.Г. Демидова. — 2004.

Цитированная литература

18. Applications of combinatorial optimization / Ed. by V. Th. Paschos. — Wiley-ISTE, 2014.
19. Approximation limits of linear programs (beyond hierarchies) / G. Braun, S. Fiorini, S. Pokutta, D. Steurer // Math. of Operations Research. — 2015. — Vol. 40, no. 3. — P. 756–772.
20. Barahona F., Mahjoub A. R. On the cut polytope // Math. Program. — 1986. — Vol. 36, no. 2. — P. 157–173.
21. Billera L. J., Sarangarajan A. All 0-1 polytopes are traveling salesman polytopes // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16, no. 2. — P. 175–188.
22. Bondarenko V., Nikolaev A. On graphs of the cone decompositions for the min-cut and max-cut problems // Internat. J. of Math. and Math. Sciences. — 2016. — Vol. 2016.
23. Bondarenko V. A., Nikolaev A. V. On the skeleton of the polytope of pyramidal tours // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2018. — Vol. 12, no. 1. — P. 9–18.
24. Burer S. On the copositive representation of binary and continuous nonconvex quadratic programs // Math. Program. — 2009. — Vol. 120, no. 2. — P. 479–495.
25. Chvátal V. On certain polytopes associated with graphs // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1975. — Vol. 18, no. 2. — P. 138–154.
26. Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proc. 1964 Internat. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science. — 1964. — P. 24–30.
27. Combinatorial bounds on nonnegative rank and extended formulations / S. Fiorini, V. Kaibel, K. Pashkovich, D. O. Theis // Discrete Math. — 2013. — Vol. 313, no. 1. — P. 67–83.
28. Conforti M., Cornuéjols G., Zambelli G. Extended formulations in combinatorial optimization // 4OR: A Quarterly Journal of Operations Research. — 2010. — Vol. 8, no. 1. — P. 1–48.
29. Cook S. A. The complexity of theorem proving procedures // Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing. — 1971. — P. 151–158.
30. Dantzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large-scale traveling-

salesman problem // Journal of the Operations Research Society of America. — 1954. — Vol. 2, no. 4. — P. 393–410.
31. Edmonds J. Minimum partition of a matroid into independent subsets // J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. — 1965. — Vol. 69. — P. 67–72.
32. Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. — 1965. — Vol. 17, no. 3. — P. 449–467.
33. Fiorini S. A combinatorial study of partial order polytopes // European Journal of Combinatorics. — 2003. — Vol. 24, no. 2. — P. 149–159.
34. Fiorini S., Rothvoß T., Tiwary H. R. Extended formulations for polygons // Discrete & computational geometry. — 2012. — Vol. 48, no. 3. — P. 658–668.
35. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes // Proc. Sympos. Pure Math. — Vol. 7. — 1963. — P. 225–232.
36. Generalized probabilistic theories and conic extensions of polytopes / Samuel Fiorini, Serge Massar, Manas K Patra, Hans Raj Tiwary // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2014. — Vol. 48, no. 2. — P. 025302.
37. Grötschel M., Lovász L. Combinatorial optimization // Handbook of Combinatorics (Vol. 2) / Ed. by R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. — Cambridge, MA, USA : MIT Press, 1995. — P. 1541–1597.
38. Ikura Y., Nemhauser G. L. Simplex pivots on the set packing polytope // Math. Program. — 1985. — Vol. 33, no. 2. — P. 123–138.
39. Implementing the Dantzig–Fulkerson–Johnson algorithm for large traveling salesman problems / David Applegate, Robert Bixby, Vašek Chvátal, William Cook // Mathematical programming. — 2003. — Vol. 97, no. 1–2. — P. 91–153.
40. Kaibel V. Extended formulations in combinatorial optimization // Optima 85. — 2011. — P. 2–7.
41. Kaibel V., Pashkovich K., Theis D. O. Symmetry matters for sizes of extended formulations // SIAM J. Discrete Math. — 2012. — Vol. 26, no. 3. — P. 1361–1382.
42. Kaibel V., Weltge S. A short proof that the extension complexity of the correlation polytope grows exponentially // Discrete & Computational Geometry. — 2015. — Vol. 53, no. 2. — P. 397–401.

43. Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — Plenum Press, 1972. — P. 85–103.
44. Klee V. Diameters of polyhedral graphs // Canad. J. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 602–614.
45. Klee V., Walkup D. W. The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$ // Acta Mathematica. — 1967. — Vol. 117, no. 1. — P. 53–78.
46. Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds / S. Fiorini, S. Massar, S. Pokutta et al. // Proc. of the 44th annual ACM symposium on Theory of computing / ACM. — 2012. — P. 95–106.
47. Matsui T. NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes // Lecture Notes in Operations Research. — 1995. — Vol. 1. — P. 249–258.
48. McMullen P. The maximum numbers of faces of a convex polytope // Mathematika. — 1970. — Vol. 17, no. 2. — P. 179–184.
49. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Math. Program. — 1989. — Vol. 45, no. 1-3. — P. 139–172.
50. Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Math. Program. — 1978. — Vol. 14, no. 1. — P. 312–324.
51. Rothvoß T. Some 0/1 polytopes need exponential size extended formulations // Math. Program. — 2013. — Vol. 142, no. 1-2. — P. 255–268.
52. Rothvoß T. The matching polytope has exponential extension complexity // Proceedings of the 46th annual ACM symposium on theory of computing / ACM. — 2014. — P. 263–272.
53. Santos F. A counterexample to the Hirsch conjecture // Annals of Math. — 2012. — Vol. 176, no. 1. — P. 383–412.
54. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. — Springer, 2003.
55. Schrijver A. On the history of combinatorial optimization (till 1960) // Discrete Optimization / Ed. by K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel. — Elsevier, 2005. — P. 1–68.
56. Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // Proceedings of the twentieth annual ACM symposium

on Theory of computing / ACM. — 1988. — P. 223–228.

57. Ziegler G. M. Who solved the Hirsch conjecture? // Documenta Mathematica Extra Volume: Optimization Stories. — 2012. — P. 75–85.
58. Белошевский М. И. Многогранник задачи о максимальном разрезе // Модели и алгоритмы мат. обеспечения ЭВМ. — Ярославль: ЯрГУ, 1986. — С. 12–20.
59. Бондаренко В. А. Об одном комбинаторном многограннике // Моделирование и анализ выч. систем. — 1987. — Т. 1987. — С. 133–134.
60. Бондаренко В. А. О плотности полиэдральных графов задач комбинаторной оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 6. — С. 60–66.
61. Бондаренко В. А. Полиэдральные графы и сложность в комбинаторной оптимизации. — Ярославль, 1995.
62. Бондаренко В. А., Николаев А. В., Шовгенов Д. А. Полиэдральные характеристики задач о сбалансированном и несбалансированном двудольных подграфах // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 141–154.
63. Грешнев С. Н. Многогранник задачи о m-вершинном подграфе полного графа // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1984. — Т. 24, № 5. — С. 790–793.
64. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.
65. Левин Л. А. Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 115–116.
66. Хачиян Л. Г. Полиномиальный алгоритм в линейном программировании // Доклады АН СССР. — 1979. — Т. 244, № 5. — С. 1093–1096.
67. Шевченко В. Н., Золотых Н. Ю. Линейное и целочисленное линейное программирование. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. — С. 154.