Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Панов Владимир Александрович

Неклассические методы вероятностного и статистического анализа моделей смеси распределений

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва - 2022

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Смесью вероятностных распределений называется распределение случайной величины ξ, такой, что

$$\mathsf{P}\{\xi \in B\} = \int_A \mathsf{P}_{\vec{a}}(B) dG(\vec{a}), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

где $\mathsf{P}_{\vec{a}}$ - параметрическое семейство вероятностных мер на пространстве $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$, отображение $\vec{a} \mapsto \mathsf{P}_{\vec{a}}(B)$ является измеримым для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $A \subset \mathbb{R}^k$ - множество возможных значений параметра и G - распределение этого параметра. Если множество A состоит из конечного числа элементов, то есть $A = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m\}$, то вероятностная смесь называется конечной. В этом случае, модель (1) может быть записана в виде

$$\mathsf{P}\{\xi \in B\} = \sum_{i=1}^{m} \pi_i \mathsf{P}_{\vec{a}_i}(B) \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \tag{2}$$

где $\pi_i \geq 0 \; \forall i = 1..m, \sum_{i=1}^m \pi_i = 1$.

Для конечных моделей (2), стандартной задачей математической статистики является оценивание элементов носителя $\vec{a}_i, i = 1..m$, и смешивающего распределения $(\pi_1, ..., \pi_m)$ по наблюдениям величины ξ. Метод моментов был применён к этой задаче ещё в 1894 году в работе Пирсона[1] для случая, когда $\mathsf{P}_{\vec{a}}$ является семейством одномерных гауссовских распределений и $m = 2$. Классические статистические методы для конечных смесей (метод моментов, метод максимального правдоподобия, байесовские подходы), а также вопросы идентифицируемости модели, были достаточно хорошо изучены в 60х-70х годах прошлого века.[2] В настоящее время наиболее популярным подходом к оцениванию параметров конечной смеси является EM алгоритм, который, по сути, является методом решения оптимизационной задачи, возникающей при применении метода максимального правдоподобия.[3]

[1] Pearson, K. Contributions to the mathematical theory of evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.* Series A, 185: 71–110, 1894.
[2] Gupta, S. and Huang, W.-T. On mixtures of distributions: a survey and some new results on ranking and selection. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, Series B, 245–290, 1981.
[3] McLachlan, G. and Krishnan, T. *The EM Algorithm and Extensions.* John Wiley & Sons, 2007.

Изучение вероятностных и статистических свойств модели смеси является популярным направлением стохастического анализа - отметим, что за последние 15 лет было защищено 6 кандидатских диссертаций в этой области.[4] О востребованности и актуальности данной тематики говорит и большое количество публикаций, посвящённое применению смесей распределений для анализа данных. В литературе описаны применения моделей смеси в финансах и астрономии, использование этих моделей при распознавании изображений и при исследовании генома, и во многих других областях.[5] По сути, модель смеси может быть применена при анализе любых данных, для которых ставятся статистические задачи кластеризации и классификации.[6]

Вместе с этим, существующие методы статистического анализа оказываются неприменимы для решения новых задач, возникших в литературе в последнее время. Перечислим основные задачи, рассмотренные в данной диссертации.

1. Семипараметрические методы оценивания в модели смеси. В рамках этого направления рассмотрена задача оценивания неизвестных параметров семейства $\mathsf{P}_{\vec{a}}$ и неизвестного абсолютно непрерывного распределения G по наблюдениям из модели (1). Данная задача достаточно хорошо изучена для случая, когда класс распределения G задан параметрически - например, для случая обобщённых гиперболических распределений.[7] Модель представляет большой интерес для приложений - в частности, описано применение данной модели для моделирования размеров частиц песка[8] и размеров алмазов на месторождениях

[4] Кокшаров, С.Н. *Асимптотические свойства смесей вероятностных распределений,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007 (научный руководитель - Королёв В.Ю.).
Назаров, А.Л. *Приближенные методы разделения смесей вероятностных распределений,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013 (научный руководитель - Королёв В.Ю.).
Савинов Е.А. *Асимптотические свойства условных распределений непрерывных смесей,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2009 (научный руководитель - Шатских С.Я.).
Крылов В.А. *О некоторых свойствах смесей обобщенных гамма-распределений и их применениях,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011 (научный руководитель - Матвеев В.Ф.).
Горшенин А.К. *Асимптотические свойства статистических процедур анализа смесей вероятностных распределений,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011 (научный руководитель - Королёв В.Ю.).
Корчагин А.Ю. *Прогнозирование стохастических процессов с помощью сеточного метода разделения дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов,* МГУ им. М.В. Ломоносова, 2015 (научный руководитель - Королёв В.Ю.).

[5] Frühwirth-Schnatter, S., Celeux, G., and Robert, C.*Handbook of Mixture Analysis.* CRC press, 2019.

[6] McNicholas, P. *Mixture Model-based Classification.* Chapman and Hall/CRC, 2016.

[7] Jørgensen B. *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution.* New York: Springer-Verlag, 1982.

[8] Barndorff-Nielsen O., Christensen C. Erosion, deposition, and size distributions of sand. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences.* 417(1853): 335–352, 1988.

юго-западной Африки.[9] Отказ от параметрических условий был сделан в работе Корсхолма,[10] однако предложенный им метод опирается на решение сложной оптимизационной задачи. В рамках данной диссертации, разработан принципиально новый подход, основанный на свойствах суперпозиции преобразований Меллина и Лапласа. При этом на распределение G не накладываются какие-либо параметрические ограничения - метод применим в случае любого абсолютно непрерывного распределения.

2. Модели со случайной заменой времени. Классической задачей финансовой математики является построение моделей, способных реалистично описать скачкообразную динамику финансовых временных рядов (например, динамику доходностей акций и других активов). Большинство используемых подходов опирается на процессы Леви, которые возникли при обобщении классической модели Блэка–Шоулза на случай, когда траектории имеют разрывы в случайные моменты времени. Процессы Леви часто используются для построения более сложных моделей, обладающих т.н. стилизированными свойствами финансовых данных.[11] Наиболее популярными конструкциями являются стохастические модели волатильности и случайные замены времени в процессах Леви.[12] Поскольку в большинстве таких моделей участвуют несколько случайных процессов, возникает естественный вопрос о возможности оценивания важных характеристик этих процессов по наблюдениям из данной модели. Одной из таких характеристик является индекс Блюменталя–Гетура, показывающий активность скачков процессов и используемый для решения финансовых задач.[13]

В одномерном случае идея случайной замены времени состоит в том, что для некоторого случайного процесса L_t, детерминированное время $t \geq 0$ заменяется на неубывающий неотрицательный процесс $\mathcal{T}(s)$, $s \geq 0$, который играет роль случайного времени. Отметим, что распределение процесса, полученного случайной заменой времени, является смесью вероятностных распределений, а мера Леви, характеризующая поведение скачков - смесью

[9] Barndorff-Nielsen O. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society. Series A.* 353(1674): 401–419, 1977.

[10] Korsholm L. The semiparametric normal variance-mean mixture model. *Scandinavian Journal of Statistics.* 27(2): 227–261, 2000

[11] Cont, R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance.* 1: 223-236, 2001.

[12] Barndorff-Nielsen, O. and Shiryaev, A. *Change of Time and Change of Measure.* World Scientific Publishing Company, 2015.

[13] Rosenbaum, M. and Tankov, P. Asymptotically optimal discretization of hedging strategies with jumps. *The Annals of Applied Probability.* 24.3: 1002-1048, 2014.

(невероятностных) мер. Существенная трудность при разработке статистических методов для данной модели состоит в типе используемых данных - результаты для высокочастных данных (то есть для случая, когда временной шаг между двумя последовательными наблюдениями стремится к нулю) были получены в работах Аит-Сахалии и Жакода,[14] в то время как случай низкочастотных данных (случай фиксированного временного интервала, но бесконечного горизонта), на котором мы сфокусируемся в данном исследовании, не был рассмотрен ранее.[15]

3. Задача построения непараметрических доверительных множеств для функции плотности. Наибольший интерес и наибольшую трудность вызывает разработка методов построения $(1-\alpha)$-доверительных множеств, являющихся *честными* по отношению к некоторому классу плотностей (например, классу смесей абсолютно непрерывных распределений) в том смысле, что вероятность принадлежности истинной функции из этого класса к доверительному множеству превосходит число $(1-\alpha)$ равномерно по всему классу. Как правило, такие доверительные множества строятся на основе асимптотических результатов о поведении оценок плотности, известных как теоремы типа SBR (Smirnov - Bickel - Rosenblatt).[16] Несмотря на длительную историю изучения вопроса, теоремы такого типа известны только для ядерных оценок и проекционных оценок на некоторые виды базисов (базис Хаара и базис Баттл–Лемари). Подтверждение этого тезиса можно найти в ряде недавних статей по данной тематике, изданных в престижном журнале the Annals of Statistics.[17] В рамках данной диссертации, ставится задача построения честных доверительных интервалов для плотности по проекционным оценкам на базис полиномов Лежандра. Решение этой задачи опирается на специальные асимптотические свойства нестационарных гауссовских процессов, которые хорошо изучены для частного случая нестационарности -

[14] Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. Estimating the degree of activity of jumps in high frequency financial data. *The Annals of Statistics.* 37: 2202–2244, 2009.
Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. Identifying the succesive Blumenthal- Getoor indices of a discretely observed process. *The Annals of Statistics.* 40: 1430–1464, 2012.

[15] Belomestny, D., and Reiss, M. Estimation and calibration of Lévy models via Fourier methods. In: *Lévy Matters IV*. Springer, Cham, 1-76, 2015.

[16] Smirnov, N. V. On the construction of confidence regions for the density of distribution of random variables. *Doklady Akad. Nauk SSSR.* 74: 189–191, 1950.
Bickel, P, and Rosenblatt, M. On some global measures of the deviations of density function estimates. *The Annals of Statistics.* 1(6):1071–1095, 1973.

[17] Giné, E., Nickl, R. Confidence bands in density estimation. *The Annals of Statistics.* 38(2): 1122–1170, 2010.
Chernozhukov, V., Chetverikov, D., Kato, K. Anti-concentration and honest, adaptive confidence bands. *The Annals of Statistics.* 42(5): 1787–1818, 2014.

т.н. циклостационарности,[18] но в более общих случаях были ранее не известны. Результаты такого сорта представляют особый интерес для анализа смесей распределений, поскольку классические методы построения доверительных множеств (например, метод на основе ядерной оценки) приводят к неадекватным результатам.

4. Предельные законы и фазовые переходы в моделях смеси. Классические методы анализа предельных законов распределения сумм и максимумов независимых одинаково распределённых случайных величин описаны в широко известных книгах Петрова[19] и Эмбрехтса, Клюппельберг и Микоша.[20] Вместе с этим, анализ распределения в конкретной модели может быть достаточно сложным - отметим, например, что предельные законы для модели случайных энергетических уровней (REM - random energy model), предложенной в работах Деррида[21] в начале 80-х годов, были полностью описаны лишь 20 лет спустя.[22] Важно понимать, что вероятностный анализ модели REM тесно связан с параболической задачей Андерсона, поскольку сводится к изучению одной и той же случайной экспоненциальной суммы. Асимптотическое поведение этой суммы, а также тесно связанные понятия перемежаемости и локализации, были рассмотрены в работах С.А. Молчанова и его соавторов.[23] В рамках данной диссертации ставится задача описания предельных законов для ранее не изученной модели типа REM с распределением уровней, представляющих собой смесь нескольких распределений. Модели такого сорта также мотивированы параболической задачей Андерсона, причём потенциал в этой задаче имеет распределение смеси вероятностных распределений.

---

[18] Konstant, D., Piterbarg, V.:Extreme values of the cyclostationary Gaussian random process. *Journal of Applied Probability.* 82–97, 1993.

[19] Petrov, V. *Sums of Independent Random Variables*, Vol. 82. Springer Science & Business Media, 2012.

[20] Embrechts, P., Klüppelberg, C., and Mikosch, T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance.* Springer, 1997.

[21] Derrida, B. Random - energy model: Limit of a family of disordered models. *Physical Review B.* 45(2): 79 - 82, 1980.

Derrida, B. Random - energy model: An exactly solvable model of disordered systems, *Physical Review Models.* 24(5): 2613 - 2626, 1981

[22] Bovier, A., Kurkova, I. and Löwe, M. Fluctuations of the free energy in the REM and the p-spin SK models. *The Annals of Probability.* 30(2): 605–651, 2002.

Ben Arous, G., Bogachev L. and Molchanov, S. Limit theorems for sums of random exponentials. *Probability Theory and Related Fields.* 132(4): 579–612, 2005.

[23] Gärtner, J., König, W. and Molchanov, S. Geometric characterization of intermittency in the parabolic Anderson model. *The Annals of Probability.* 35(2): 439–499, 2007.

Ben Arous, G., Molchanov, S., and Ramirez, A. Transition from the annealed to the quenched asymptotics for a random walk on random obstacles. *The Annals of Probability.* 33(6): 2149–2187, 2005.

5. Анализ "чистоты" распределения. Согласно теореме Лебега, любая вероятностная мера P представима в виде смеси трёх мер $\mathsf{P}(\cdot) = a_1\mathsf{P}_d(\cdot) + a_2\mathsf{P}_{ac}(\cdot) + a_3\mathsf{P}_{sc}(\cdot)$, где $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $a_i \geq 0\ \forall i$, P_d является мерой дискретного распределения, P_{ac} - абсолютно-непрерывного, и P_{sc} - сингулярного. Для решения задач статистического оценивания важно знать, какие из параметров a_1, a_2, a_3 равны нулю - например, если $a_3 = 0$ (нет сингулярной компоненты), то методы оценивания существенно упрощаются. По теореме Йессена-Винтнера, сумма почти наверное сходящегося ряда независимых дискретных случайных величин имеет чистый тип, то есть два из трёх чисел a_1, a_2, a_3 равны 0.[24] Однако для конкретных моделей определение типа может быть достаточно сложной задачей. Классический пример - задача Эрдёша о типе распределения свёртки Бернулли, определяемой через ряд $\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \pm\rho^n$, в котором знаки выбираются случайным образом с вероятностями $1/2$, и $\rho \in (0,1)$.[25] Термин "свёртка Бернулли" мотивирован тем фактом, что $\mathcal{Z}$ является свёрткой бесконечного числа мер вида $(\delta_{-\rho^n} + \delta_{\rho^n})/2$. Наиболее известным результатом является тот факт, что $\mathcal{Z}$ имеет абсолютно непрерывное распределение для почти всех $\rho \in (1/2, 1)$.[26]. В рамках данного исследования, ставится вопрос о типе дискретного распределения Дикмана-Гончарова. Вопрос представляет большой интерес в связи с большим количеством приложений распределения Дикмана–Гончарова в различных областях математики (случайные блуждания на разрешимых группах, теория случайных графов и т. д.), биологии (модели роста и эволюции одноклеточных популяций), финансах (теория экстремальных явлений в финансах и страховом деле), физике (модель случайных энергетических уровней) и других областях.[27]

Цель и задачи исследования

Целью исследования является разработка новых методов статистического оценивания в модели смеси вероятностных распределений, а также решение вероятностных задач, возникающих при разработке этих методов.

[24] См. утверждение 27.18 в книге Sato, K.-I. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* Cambridge University Press, 1999.

[25] Erdös, P. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *American Journal of Mathematics.* 61(4):974–976, 1939.

[26] Solomyak, B. On the random series $\sum \pm\lambda_n$ (an Erdös problem). *The Annals of Mathematics.* 611-625, 1995.

[27] Молчанов, С.А. и Панов, В.А. Распределение Дикмана–Гончарова. Успехи математических наук, 75(6):107–152, 2020.

Перечислим конкретные задачи, решённые в рамках данного исследования.

(1) Разработать для дисперсионно-сдвиговых гауссовских смесей алгоритм семипараметрического оценивания неизвестных параметров и неизвестного смешивающего распределения. Изучить перспективы применения этих идей для родственных моделей скользящего среднего, построенных на основе процессов Леви. Для установления порядков сходимости предложенных оценок, доказать свойства экспоненциального перемешивания процессов из рассматриваемого класса.

(2) Разработать для модели процессов с заменённым временем алгоритм оценивания индексов Блюменталя–Гетура неизвестных процессов Леви, используемых для построения модели. Доказать оптимальность полученных оценок в минимаксном смысле для некоторого подкласса процессов Леви. Для многомерной модели устойчивых процессов с заменённым временем, разработать метод представления процессов из данного класса в виде бесконечных рядов. Показать эффективность применения полученных результатов для анализа стоимости акций компаний и для моделирования взаимосвязи между различными акциями.

(3) Разработать алгоритм построения доверительных интервалов для плотности распределения, являющихся честными по отношению к некоторому подклассу абсолютно непрерывных смесей распределений в том смысле, что для всех плотностей из некоторого класса они имеют одинаковый доверительный уровень. Применить разработанный метод для построения доверительных интервалов для плотности меры Леви.

(4) Доказать предельные законы и описать фазовые переходы в модели случайной энергии, в которой распределение энергетических уровней является смесью гауссовских распределений.

(5) Определить, какие компоненты в представлении функции распределения дискретного закона Дикмана–Гончарова в виде смеси трёх распределений разных типов равны нулю.

Структура диссертации. Основные результаты, выносимые на защиту

В данном разделе перечислены основные результаты исследования и указана новизна полученных результатов.

В первой главе разработан алгоритм семипараметрического оценивания неизвестных параметров и неизвестного смешивающего распределения для дисперсионно-сдвиговых гауссовских смесей. Показано, что порядки сходимости определяются свойствами преобразования Меллина плотности смешивающего распределения. Новизна представленного метода состоит в использовании свойств суперпозиции интегральных преобразований Меллина и Лапласа. Предлагаемый подход является значимым вкладом в данную тематику хотя бы уже потому, что в отличие от известных методов оценивания, не основан на решении трудных оптимизационных задач.[28]

Кроме того, в первой главе представленный метод был адаптирован для моделей скользящего среднего, построенных на основе процессов Леви. Был разработан алгоритм статистического оценивания меры Леви и других параметров процесса Леви по наблюдениям модели, представляющей собой интеграл по данному процессу. Алгоритм является новым, и может быть применён в широком классе моделей, известных в англоязычной литературе как ambit fields.[29] Были доказаны свойства экспоненциального перемешивания для процессов из рассматриваемого класса, и получены верхние границы для построенных оценок.

Во второй главе для моделей со случайной заменой времени был разработан метод оценивания индексов Блюменталя–Гетура процессов Леви, используемых для построения модели, по наблюдениям самой модели. Новизна метода состоит в использовании асимптотических свойств характеристической функции процесса для больших значений аргумента. Получены порядки сходимости предложенных оценок, и доказано, что данные порядки являются оптимальными в минимаксном смысле.

Кроме того, предложен новый подход к совместному описанию доходностей нескольких акций, основанный на многомерных процессах Леви с заменённым временем. Был разрабо-

[28] Korsholm L. The semiparametric normal variance-mean mixture model. *Scandinavian Journal of Statistics.* 27(2): 227–261, 2000.

[29] Podolskij, M. Ambit fields: survey and new challenges. In: *XI Symposium on Probability and Stochastic Processes. Birkhäuser, Cham, 2015.*

тан метод представления процессов из рассматриваемого класса в виде бесконечных рядов для случаев субординации броуновских движений и устойчивых процессов. Показано, что данный метод может быть эффективно использован для моделирования доходностей цен акций, и построенные двумерные модели хорошо воспроизводят корреляции между доходностями акций.

В третьей главе решена задача построения честных доверительных множеств для (неизвестной) плотности распределения на основе проекционных оценок. Показано, что данная задача эквивалентна анализу асимптотического поведения нестационарных гауссовских процессов определенного вида. В данном исследовании впервые решена задача описания второго члена асимптотики распределения максимума таких процессов и показано, что порядки сходимости являются полиномиальными. Эффективность полученных результатов проиллюстрирована на модели смеси распределений.

Кроме того, в третьей главе представлены схожие результаты для оценок плотностей меры Леви. Впервые получены последовательности сопровождающих законов, аппроксимирующие распределение максимального отклонения оценок плотности меры Леви с ошибками полиномиального порядка. Показано, что порядки сходимости, приведённые в предыдущих работах по этой теме,[30] являются логарифмическими.

В четвёртой главе объяснена связь параболической задачи Андерсона и модели случайных энергетических уровней. Для случая смеси гауссовских распределений, изучено асимптотическое поведение системы в зависимости от параметров. Описаны фазовые переходы в рассматриваемой модели. Результаты являются вкладом в теорию моделей энергетических уровней, поскольку ранее подобные результаты были известны только для гауссовского случая.[31]

В пятой главе приведены новые результаты о типе обобщённого распределения Дикмана–Гончарова. Для случая, когда в построении этой модели использованы случайные величины с геометрическим распределением, показана связь данной задачи с известной задачей Эрдёша о типе распределения свёртки Бернулли. Показано, что в этом случае обобщённое

[30] Figueroa-López, J.E. Sieve-based confidence intervals and bands for Lévy densities. *Bernoulli.* 17(2), 643–670, 2011.

[31] BenArous, G., Bogachev, L. and Molchanov, S. Limit theorems for sums of random exponentials. *Probability Theory and Related Fields.* 132(4): 579–612, 2005.

распределение Дикмана–Гончарова является абсолютно непрерывным для почти всех значений параметра из некоторого интервала.

Теоретическая и практическая значимость работы

Полученные теоретические результаты существенно расширяют аппарат теории статистического оценивания для модели смеси. Вместе с этим, процессы Леви и модели, построенные на основе них (в частности, модели со случайной заменой времени), широко используются для описания динамики доходностей акций, и поэтому разработанные методы могут быть использованы для решения финансовых задач, связанных с игрой на бирже. Так, например, метод оценивания индекса Блюменталя–Гетура позволяет определить степень надёжности финансового актива, в то время как методы моделирования многомерных процессов, хорошо воспроизводящих зависимость между финансовыми активами, применяются для тестирования алгоритмов торговли на бирже.

Новые результаты теории процессов Леви - в частности, методы оценивания индекса Блюменталя–Гетура и методы моделирования многомерных процессов (см. раздел 2.2) - были использованы автором при прочтении курса "Моделирование скачкообразных процессов в экономике" в НИУ ВШЭ.

Апробация полученных результатов

Результаты, выносимые на защиту, были представлены на следующих международных конференциях и семинарах.

1. *Бернулли-ИМС всемирный конгресс по вероятности и статистике* (онлайн-конференция, организованная Национальным Университетом Сеула, июль 2021), доклад "Распределение Дикмана–Гончарова".

2. *Конференция по анализу экстремальных значений* (Загреб, Хорватия, июль 2019), доклад "Экстремальное поведение Гауссовских нестационарных процессов и улучшенные доверительные множества для плотностей".

3. *Международный воркшоп по прикладной теории вероятностей* (Будапешт, Венгрия, июнь 2018), доклад "Многомерная субординация устойчивых процессов".

4. *Немецкие вероятностные и статистические дни* (Фрайбург, Германия, февраль 2018), доклад "Многомерная субординация устойчивых процессов".

5. *Конференция по эмбит полям (Орхус, Дания, август 2017),* доклад "Низкочастотное оценивание в моделях со скользящим средним, построенные на основе процессов Леви".

6. *Вероятностный семинар города Эссен* (Эссен, Германия, июнь 2017), доклад "Низкочастотное оценивание в моделях со скользящим средним, построенные на основе процессов Леви".

7. *Конференция по анализу экстремальных значений* (Делфт, Голландия, июнь 2017), доклад "Распределение максимального отклонения для оценок плотности мер Леви". maximal deviation for Lévy density estimators".

8. *Всемирный конгресс по вероятности и статистике* (Торонто, Канада, июль 2016), доклад "Низкочастотное оценивание в моделях со скользящим средним, построенные на основе процессов Леви".

9. *Немецкие вероятностные и статистические дни* (Бохум, Германия, март 2016), доклад "Статистическое оценивание для дробных процессов Леви". for fractional Lévy processes and related models".

10. *Конференция по случайным процессам и их применениям* (Оксфорд, Великобритания, июль 2015), доклад "Обобщённый процесс Орнштейна-Уленбека: преобразование Меллина инвариантного распределения и статистическое оценивание ".

11. *Европейская конференция по статистике* (Амстердам, Голландия, июль 2015), доклад "Статистическое оценивание в модели экспоненциальных функционалов от процессов Леви".

12. *Воркшоп по статистическому оцениванию для процессов Леви* (Лейден, Голландия, сентябрь 2014), доклад "Распределение максимального отклонения для оценок плотности мер Леви".

Кроме того, диссертантом было сделано 10 докладов на семинаре "Стохастический анализ и его применения в экономике" факультета математики НИУ ВШЭ (руководители семинара - В.Д. Конаков и А.В. Колесников) и 12 докладов на воркшопах, организованных международной лабораторией стохастического анализа и его приложении НИУ ВШЭ (https://lsa.hse.ru/).

Список статей по теме диссертации

Список содержит 12 статей, из которых 6 работ опубликованы в журналах с рейтингом Q1/Q2 в Web of Science ([2], [3], [4], [6], [9], [12]), 11 - в журналах с рейтингом Q1/Q2 по Scopus. Три статьи опубликованы без соавторов, две статьи опубликованы в соавторстве со студентами НИУ ВШЭ.

[1] Belomestny, D. and Panov, V. Semiparametric estimation in the normal variance-mean mixture model. *Statistics*, 52(3):571–589, 2018.

Беломестный, Д. и Панов. В. Семипараметрическое оценивание в гауссовских дисперсионно-сдвиговых моделях. *Статистика*, 52(3):571–589, 2018.

https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/02331888.2018.1425865?journalCode=gsta20

[2] Belomestny, D., Panov, V. and Woerner, J. Low-frequency estimation of continuous-time moving average Lévy processes. *Bernoulli*, 25(2):902–931, 2019.

Беломестный, Д., Панов, В. и Вёрнер, Ж. Низкочастотное оценивание в моделях скользящего среднего с непрерывным временем, построенных на основе процессов Леви. *Бернулли*, 25(2):902–931, 2019.

https://projecteuclid.org/journals/bernoulli/volume-25/issue-2/Low-frequency-estimation
-of-continuous-time-moving-average-L%C3%A9vy-processes/10.3150/17-BEJ1008.short

[3] Belomestny D., Panov V. Abelian theorems for stochastic volatility models with application to the estimation of jump activity. *Stochastic Processes and their Applications*. 123 (1): 15-44,

2013.

Беломестный, Д. и Панов, В. Абелевы теоремы для стохастических моделей волатильности и оценивание активности скачков. *Случайные процессы и их приложения.* 123 (1): 15-44, 2013.

https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304414912001925

[4] Belomestny, D. and Panov, V. Estimation of the activity of jumps in time-changed Lévy models. *Electronic Journal of Statistics,* 7:2970–3003, 2013.

Беломестный, Д. и Панов, В. Оценивание активности скачков процессов Леви с заменённым временем. *Электронный журнал по статистике,* 7:2970–3003, 2013.

https://projecteuclid.org/journals/electronic-journal-of-statistics/volume-7/issue-none...

[5] Panov, V. Series representations for multivariate time-changed Lévy models. *Methodology and Computing in Applied Probability,* 19(1):97–119, 2017

Панов, В. Представление многомерных процессов Леви со случайным временем в виде бесконечных рядов. *Методология и вычисления в прикладной теории вероятностей,* 19(1):97–119, 2017

https://link.springer.com/article/10.1007/s11009-015-9461-8

[6] Panov, V. and Samarin, E. Multivariate asset-pricing model based on subordinated stable processes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry,* 35(4):1060–1076, 2019.

Панов, В. и Самарин, Е. Многомерная модель цены акций, построенная на основе субординированных устойчивых процессов. *Прикладные статистические модели в бизнесе и индустрии,* 35(4):1060–1076, 2019.

https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/asmb.2446

[7] Panov, V. Some properties of the one-dimensional subordinated stable model. *Statistics and Probability Letters,* 146:80–84, 2019.

Панов, В. Некоторые свойства одномерного субординированного устойчивого процесса.

Статистические и вероятностные письма, 146:80–84, 2019.

https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715218303493

[8] Konakov, V., Panov, V. and Piterbarg, V. Extremes of a class of non-stationary Gaussian processes and maximal deviation of projection density estimates. *Extremes,* 24(3):617–651, 2021.

Конаков, В., Панов, В. и Питербарг, В. Экстремальные значения одного класса нестационарных гауссовских процессов и максимальное отклонение проекционных оценок плотности. *Экстремумы,* 24(3):617–651, 2021.

https://link.springer.com/article/10.1007/s10687-020-00402-2

[9] Konakov, V. and Panov, V. Sup-norm convergence rates for Lévy density estimation. *Extremes,* 19(3):371–403, 2016.

Конаков, В. и Панов, В. Порядки сходимости в sup-норме для оценок плотностей меры Леви. *Экстремумы,* 19(3):371–403, 2016.

https://link.springer.com/article/10.1007/s10687-020-00402-2

[10] Molchanov, S. and Panov, V. Limit theorems for the alloy-type random energy model. *Stochastics,* 91(5):754–772, 2019.

Молчанов, С. и Панов, В. Предельные теоремы для модели случайных энергетических уровней с распределением смеси. *Стохастика,* 91(5):754–772, 2019.

https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/17442508.2018.1545841

[11] Panov, V. Limit theorems for sums of random variables with mixture distribution. *Statistics and Probability Letters,* 129:379 – 386, 2017.

Панов, В. Предельные теоремы для суммы случайных величин с распределением смеси. *Статистические и вероятностные письма,* 129:379 – 386, 2017.

https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167715217302213

[12] Молчанов, С.А. и Панов, В.А. Распределение Дикмана–Гончарова. *Успехи математических наук,* 75(6):107–152, 2020.

http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=9976&option_lang=rus

2 Краткое содержание основных результатов

2.1 Семипараметрические методы оценивания

2.1.1 Дисперсионно-сдвиговые гауссовские смеси

Обзор результатов данной работы мы начнём с представления нового семипараметрического метода оценивания для модели смеси (1) в случае гауссовского семейства мер $\mathsf{P}_{\vec{a}}$ с неизвестным абсолютно непрерывным смешивающим распределением G. Более точно, в разделе 1.1 рассмотрена модель

$$p(x;\mu,G) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_{\mathcal{N}(\mu s,s)}(x)\,dG(s) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu s)^2}{2s}\right\} dG(s),$$

где $\varphi_{\mathcal{N}(\mu s,s)}(x)$ - плотность нормального распределения со средним μs и дисперсией s (дисперсионно-сдвиговая смесь).[32] В рамках данного исследования предполагается, что и параметр μ, и плотность g смешивающего распределения неизвестны, и ставится задача статистического оценивания этих объектов по выборке $X_1, ..., X_n$ из распределения с плотностью $p(\cdot,\mu,G)$.

Метод оценивания параметра μ опирается на представление этого параметра в виде

$$\mu = \frac{1}{2x}\log\left(\frac{p(x;\mu,G)}{p(-x;\mu,G)}\right).$$

Из этого представления следует, что μ является единственным нулём функции

$$W(\rho) := \mathsf{E}\left[e^{-\rho X} w(X)\right], \quad \rho \in \mathbb{R},$$

[32] Описание этого класса моделей приводится в диссертации Корчагина А.Ю. *Прогнозирование стохастических процессов с помощью сеточного метода разделения дисперсионно-сдвиговых смесей нормальных законов* МГУ им. Ломоносова, 2015.

где $w(x)$ - непрерывная липшицева функция на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам

$$w(x) \le 0 \ \text{ for } \ x \ge 0, \qquad w(-x) = -w(x), \qquad \operatorname{supp}(w) \subset [-A, A]$$

для некоторого $A > 0$. Более точно, оценка параметра μ определяется следующим образом

$$\widehat{\mu}_n := \inf\{\rho > 0 : \widehat{W}_n(\rho) = 0\} \wedge M,$$

где M - такая константа, что $\mu \in [0, M/2)$, и $\widehat{W}_n(\rho) := n^{-1}\sum_{i=1}^{n} e^{-\rho X_i} w(X_i)$ является непараметрической оценкой функции $W(\rho)$. Константа M является техническим параметром, используемым для доказательства теоретических свойств (см. теорему 2 ниже).

Для оценивания неизвестного распределения G используется преобразование Меллина, определяемое как $\mathcal{M}[f](z) := \int_{\mathbb{R}_+} x^{z-1} f(x)dx, z \in \mathbb{C}$. Ключевой факт, который лежит в основе метода статистического оценивания, описанного в разделе 1.1.4, состоит в том, что суперпозиция преобразований Меллина и Лапласа функции плотности g может быть представлена в виде

$$\mathcal{M}\left[\mathscr{L}[g]\right](z) = \int_{\mathbb{R}_+} \phi_X(u) \left[\psi_\mu(u)\right]^{z-1} \psi'_\mu(u)du, \tag{3}$$

где $\psi_\mu(u) = \mathrm{i}\mu u - u^2/2, u \in \mathbb{R}$ - характеристическая экспонента нормального закона распределения со средним μ и дисперсией 1. Кроме того, суперпозиция интегральных преобразований в левой части (3) связана с преобразованием Меллина этой плотности явным соотношением

$$\mathcal{M}\left[g\right](z) = \frac{\mathcal{M}\left[\mathscr{L}[g]\right](1-z)}{\Gamma(1-z)} \tag{4}$$

для любого z с $\mathrm{Re}(z) \in (0, 1)$. Из соотношений (3) и (4) вытекает идея последовательного оценивания функций $\psi_\mu(u)$, $\mathcal{M}\left[\mathscr{L}[g]\right](z)$, $\mathcal{M}\left[g\right](z)$ и самой функции g, причём последний шаг может быть сделан при помощи обратного преобразования Меллина. Итоговая оценка записывается в виде

$$\widehat{g}_{n,\gamma}(x) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{V_n}\left[\int_0^{U_n} e^{-\mathrm{i}uX_k}\left[\overline{\psi_{\hat{\mu}_n}(u)}\right]^{-\gamma-\mathrm{i}v}\overline{\psi'_{\hat{\mu}_n}(u)du}\right]\cdot\frac{x^{-\gamma-\mathrm{i}v}}{\Gamma(1-\gamma-\mathrm{i}v)}dv$$
$$+\frac{1}{2\pi n}\sum_{k=1}^{n}\int_{-V_n}^{0}\left[\int_0^{U_n} e^{\mathrm{i}uX_k}\left[\psi_{\hat{\mu}_n}(u)\right]^{-\gamma-\mathrm{i}v}\psi'_{\hat{\mu}_n}(u)du\right]\cdot\frac{x^{-\gamma-\mathrm{i}v}}{\Gamma(1-\gamma-\mathrm{i}v)}dv,$$

где U_n, V_n- неограниченно возрастающие последовательности положительных чисел и $\gamma \in (0,1)$. Для изучения теоретических свойств используется оценка $\widehat{g}^{\circ}_{n,\gamma}(x)$, полученная из оценки $\widehat{g}_{n,\gamma}(x)$ заменой $\hat{\mu}_n$ на истинное значение μ. Следующая теорема показывает, что порядки сходимости оценки $\widehat{g}^{\circ}_{n,\gamma}(x)$ к истинной функции $g(x)$ определяются свойствами преобразования Меллина функции g.

Для числа $r > 0$ и случайной величины η с $\mathsf{E}[|\eta|^r] < \infty$, обозначим $\|\eta\|_r := (\mathsf{E}[|\eta|^r])^{1/r}$.

Теорема 1 (теорема 1.2 в диссертации)**.** *Пусть* $U_n = n^{1/4}$ *и* $V_n = \varkappa \ln(n)$ *для некоторого* $\varkappa > 0$.

1. *Если истинная плотность* g *принадлежит классу функций*

$$\mathcal{E}(\alpha,\gamma_\circ,\gamma^\circ,L) \quad := \quad \left\{p : \sup_{\gamma\in(\gamma_\circ,\gamma^\circ)}\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha|v|}\left|\mathcal{M}[p](\gamma+\mathrm{i}v)\right| dv \le L\right\},$$

   где $\alpha \in \mathbb{R}_+, L > 0$*,* $0 < \gamma_\circ < \gamma^\circ < 1/2$*, то при* $\varkappa = \gamma^\circ/(\pi + 2\alpha)$*, для любого* $x \in \mathbb{R}_+$ *и достаточно большого* n *выполнено*

$$\sqrt{|x|^{2\gamma_\circ}\wedge 1}\cdot\|\widehat{g}^{\circ}_{n,\gamma}(x) - g(x)\|_2 \quad\le\quad C_1 n^{-\alpha\varkappa},$$

   где $\gamma \in (\gamma_\circ, \gamma^\circ)$*, и* C_1 *зависит только от параметров класса* $\mathcal{E}$*.*

2. *Если истинная плотность* g *принадлежит классу функций*

$$\mathcal{P}(\beta,\gamma_\circ,\gamma^\circ,L) \quad := \quad \left\{p : \sup_{\gamma\in(\gamma_\circ,\gamma^\circ)}\int_{\mathbb{R}} |v|^{\beta}\left|\mathcal{M}[p](\gamma+\mathrm{i}v)\right| dv \le L\right\}$$

   для некоторого $\beta \in \mathbb{R}_+, L > 0$*,* $0 < \gamma_\circ < \gamma^\circ < 1/2$*, то для любого* $\varkappa > 0$*, любого* $x \in \mathbb{R}_+$

и достаточно большого n выполнено

$$\sqrt{|x|^{2\gamma_\circ} \wedge 1} \cdot \|\widehat{g}^\circ_{n,\gamma}(x) - g(x)\|_2 \quad \leq \quad C_2 \log^{-\beta}(n),$$

где $\gamma \in (\gamma_\circ, \gamma^\circ)$, и C_2 зависит только от параметров класса $\mathcal{P}$.

Порядки сходимости оценок $\hat{\mu}_n$ и $\widehat{g}_{n,\gamma}$ представлены в следующем утверждении.

Теорема 2 (теорема 1.3 в диссертации)**.** *Пусть $r \geq 2$ и $M > 0$ подобраны таким образом, что*

$$\Lambda(M, r) := \left\| \left(1 + e^{-MX}\right) X w(X) \right\|_r < \infty.$$

Тогда

$$\mathsf{E} \|\widehat{\mu}_n - \mu\|_r \quad \leq \quad C_3 n^{-1/2},$$

и для достаточно больших n

$$\sqrt{|x|^{2\gamma_\circ} \wedge 1} \cdot \|\widehat{g}_{n,\gamma}(x) - \widehat{g}^\circ_{n,\gamma}(x)\|_2 \quad \leq \quad C_4 n^{-1/2},$$

где константы C_3, C_4 зависят от μ, M, r.

2.1.2 Модели скользящего среднего, построенные на основе процессов Леви

Идея суперпозиции нескольких интегральных преобразований может быть применена не только в случае гауссовских смесей, но и в более сложных родственных моделях. В этом разделе представлены результаты главы 1.2 для моделей скользящего среднего, построенных на основе процессов Леви. Эти процессы определяются как

$$Z_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(t-s)\, dL_s, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

где $\mathcal{K} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+$ измеримая функция и $(L_t)_{t\in\mathbb{R}}$ - двусторонний процесс Леви, задаваемый как

$$L_t = \begin{cases} L_t^{(1)}, & \text{если } t \geq 0 \\ L_{-t-}^{(2)}, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где $L^{(1)}, L^{(2)}$ - 2 независимые копии некоторого процесса Леви $\tilde{L}$ с тройкой Леви (γ, σ^2, ν).[33]

Условия $\mathcal{K} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ и $\int x^2 \nu(dx) < \infty$ гарантируют корректность определения[34] и стационарность процесса Z. Характеристическая функция процесса задаётся формулой

$$\Phi(u) := \mathsf{E}\left[e^{\mathrm{i}uZ_t}\right] = \exp\left(\Psi(u)\right), \qquad \text{где} \quad \Psi(u) := \int_{\mathbb{R}} \psi(u\,\mathcal{K}(s))\,ds$$

и $\psi(\cdot)$ - характеристическая экспонента процесса $\tilde{L}$.

В разделе 1.2 рассмотрена задача оценивания плотности $\nu(x)$ меры Леви процесса $\tilde{L}$ по наблюдениям процесса Z_t в моменты времени $t = \Delta, 2\Delta, ..., n\Delta$ при некотором $\Delta > 0$ (здесь и далее мы используем одинаковое обозначение для меры Леви и его плотности).

Для упрощения представления результатов, мы опишем случай известного параметра

[33] Процессы Леви определяются как процессы, имеющие независимые и стационарные приращения, равные нулю в начальный момент времени и обладающие свойством стохастической непрерывности. Для описания скачков процесса $d-$мерного процесса $\vec{X}_t, t \geq 0$, используется мера Леви, определяемая следующим образом: мера Леви множества $B \subset \mathbb{R}^d/\{\vec{0}\}$ равна

$$\nu(B) = \mathsf{E}\left[\sharp\left\{t \in [0,1] : \Delta\vec{X}_t \in B\right\}\right],$$

где $\Delta\vec{X}_t = \vec{X}_t - \vec{X}_{t-}$- размер скачка в момент времени t.
Характеристическая функция процесса $\vec{X}$ задаётся как

$$\phi_t(\vec{u}) = \mathsf{E}[e^{\mathrm{i}\langle\vec{u},\vec{X}_t\rangle}] = e^{t\psi(u)},$$

где функция $\psi(u)$, называемая характеристической экспонентой, представима по формуле Леви-Хинчина:

$$\psi(u) = \mathrm{i}\langle\vec{\gamma},\vec{u}\rangle - \frac{1}{2}\langle\vec{u},\Sigma\vec{u}\rangle + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\mathrm{i}\langle\vec{u},\vec{x}\rangle} - 1 - \mathrm{i}\langle\vec{u},\vec{x}\rangle\mathbb{I}\{|\vec{x}| < 1\}\right)\nu(d\vec{x}),$$

причём $\vec{\gamma} \in \mathbb{R}^d$ и $\Sigma-$ неотрицательно определённая матрица размера $d \times d$. Таким образом, распределение процесса $\vec{X}$ однозначно определяется тройкой $(\vec{\gamma}, \Sigma, \nu)$, называемой тройкой Леви.

[34] Доказательство корректности определения приведено в Приложении A в [2]. Общая теория интегралов вида (5) приведена в статье Rajput, B. and Rosiński, J. Spectral representations of infinitely divisible processes. *Probability Theory and Related Fields*, 82(3): 451–487, 1989.

σ. Обозначим

$$\Psi_\sigma(u) := \Psi(u) + \frac{\sigma^2 u^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}^2(x)\, dx.$$

Преобразование Меллина второй производной этой функции связано с суперпозицией преобразований Меллина и Фурье функции $\tilde{\nu}(x) := x^2 \nu(x)$ следующим образом:

$$\mathcal{M}\left[\Psi''_\sigma\right](z) = -\mathcal{M}[\mathcal{F}[\tilde{\nu}]](z) \cdot \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{K}(x))^{2-z}\, dx$$

для всех z таких, что $\int_{\mathbb{R}} (\mathcal{K}(x))^{2-\mathrm{Re}(z)}\, dx < \infty$ и $\int_{\mathbb{R}_+} |\mathcal{F}[\tilde{\nu}]\,(v)| \cdot v^{\mathrm{Re}(z)-1} dv < \infty$. Отметим, что суперпозиция интегральных представлений равна

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[\mathcal{F}[\tilde{\nu}]](z) &= \mathcal{M}\big[e^{\mathrm{i}\cdot}\big](z) \cdot \mathcal{M}\big[\tilde{\nu}_+\big](1-z) + \mathcal{M}\big[e^{-\mathrm{i}\cdot}\big](z) \cdot \mathcal{M}\big[\tilde{\nu}_-\big](1-z), \\
\mathcal{M}\Big[\overline{\mathcal{F}[\tilde{\nu}]}\Big](z) &= \mathcal{M}\big[e^{-\mathrm{i}\cdot}\big](z) \cdot \mathcal{M}\big[\tilde{\nu}_+\big](1-z) + \mathcal{M}\big[e^{\mathrm{i}\cdot}\big](z) \cdot \mathcal{M}\big[\tilde{\nu}_-\big](1-z).
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{\nu}_+(x) := \tilde{\nu}(x) \cdot 1\{x \geq 0\}, \qquad \tilde{\nu}_-(x) := \tilde{\nu}(-x) \cdot 1\{x \geq 0\}.$$

Из приведённых выше формул вытекает метод оценивания плотности меры Леви ν. Метод состоит из двух этапов.

1. Преобразования Меллина $\mathcal{M}\left[\Psi''_\sigma\right]$ и $\mathcal{M}\left[\overline{\Psi''_\sigma}\right]$ оцениваются следующим образом

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{M}}_n[\Psi''_\sigma](1-z) &:= \int_0^{U_n} \left[\frac{\widehat{\Phi}''_n(u)}{\widehat{\Phi}_n(u)} - \left(\frac{\widehat{\Phi}'{}_n(u)}{\widehat{\Phi}_n(u)}\right)^2 + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}^2(x)\, dx\right] u^{-z}\, du, \\
\widehat{\mathcal{M}_n}[\overline{\Psi''_\sigma}](1-z) &:= \int_0^{U_n} \left[\overline{\frac{\widehat{\Phi}''_n(u)}{\widehat{\Phi}_n(u)} - \left(\frac{\widehat{\Phi}'_n(u)}{\widehat{\Phi}_n(u)}\right)^2} + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}^2(x)\, dx\right] u^{-z}\, du,
\end{aligned}$$

соответственно, где U_n неограниченная сверху возрастающая последовательность положительных чисел, и $\widehat{\Phi}_n(u) := n^{-1} \sum_{j=1}^n e^{\mathrm{i}u Z_{j\Delta}}$.

2. На втором этапе оцениваются функции $\tilde{\nu}_{n+}$ и $\tilde{\nu}_{n-}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\tilde{\nu}}_{n+}(x) &:= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}V_n}^{c+\mathrm{i}V_n} \left(\frac{\widehat{\mathcal{M}_n}\left[\Psi''_\sigma\right](z)}{Q_1(z)} - \frac{\widehat{\mathcal{M}_n}\left[\overline{\Psi''_\sigma}\right](z)}{Q_2(z)} \right) x^{-z} dz, \\
\hat{\tilde{\nu}}_{n-}(x) &:= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{c-\mathrm{i}V_n}^{c+\mathrm{i}V_n} \left(\frac{\widehat{\mathcal{M}_n}\left[\overline{\Psi''_\sigma}\right](z)}{Q_1(z)} - \frac{\widehat{\mathcal{M}_n}\left[\Psi''_\sigma\right](z)}{Q_2(z)} \right) x^{-z} dz,
\end{aligned}
$$

где V_n неограниченная сверху возрастающая последовательность положительных чисел, и

$$
\begin{aligned}
Q_1(z) &:= -\frac{e^{\mathrm{i}\pi z} - e^{-\mathrm{i}\pi z}}{e^{\mathrm{i}\pi z/2}} \Gamma(z) \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{K}(x)\right)^{2-z} dx, \\
Q_2(z) &:= -\frac{e^{\mathrm{i}\pi z} - e^{-\mathrm{i}\pi z}}{e^{-\mathrm{i}\pi z/2}} \Gamma(z) \int_{\mathbb{R}} \left(\mathcal{K}(x)\right)^{2-z} dx.
\end{aligned}
$$

Оценка функции $\tilde{\nu}(x) = x^2 \nu(x)$ определяется как

$$
\tilde{\nu}_n(x) := \tilde{\nu}_{n+}(x) + \tilde{\nu}_{n-}(-x). \tag{6}
$$

Для изучения теоретических свойств оценки $\tilde{\nu}_n$, вводится следующее предположение.

(A1) Плотность меры Леви ν удовлетворяет условию $\int_{-1}^{1} |x| \nu(x) dx < \infty$, и для некоторых $A > 0$, $\alpha \in (0,1), \beta_+ > 0, \beta_- > 0, c \in (0,1)$, выполнено

$$
\begin{cases}
\int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)^\alpha \left| \mathscr{F}[\tilde{\nu}](y) \right| dy & \leq A, \\
\int_{\mathbb{R}} e^{\beta_\pm |u|} \left| \mathcal{M}[\tilde{\nu}_\pm](c + \mathrm{i}u) \right| du & \leq A.
\end{cases}
$$

В работе показано, что это условие выполнено для всех мер Леви $\nu(x) = \nu_+(x) + \nu_-(-x)$ из класса

$$
\nu_\pm(x) = \sum_{j=1}^{J^{(\pm)}} a_j^{(\pm)} x^{-\eta_j^{(\pm)} - 1} e^{-\lambda_j^{(\pm)} x} \cdot \mathbb{I}\left\{x \geq 0\right\},
$$

с $J^{(+)}, J^{(-)} \in \mathbb{N} \cup 0$, $a_j^{(+)}, a_j^{(-)} > 0$, $\eta_j^{(+)}, \eta_j^{(-)} < 1, \lambda_j^{(+)}, \lambda_j^{(-)} > 0$ для всех j. Отметим, что данный класс включает в себя темперированные устойчивые распределения.

С технической точки зрения, наибольшая трудность состоит в том, что свойства альфа-перемешивания (см. стр. 27) не доказаны для процессов вида (5). Чтобы обойти эту трудность, верхняя оценка для супремума разности $\tilde{\nu}_n(x)$ и $\tilde{\nu}(x)$ доказывается на дополнении к некоторому специально подобранному множеству $\mathscr{A}_K$, вероятность которого стремится к нулю с полиномиальной скоростью.

Теорема 3 (Теорема 1.7 в диссертации)**.** *Зафиксируем $K > 0$ и обозначим множество*

$$\mathcal{A}_K := \left\{ \max_{j=0,1,2} \left\| \frac{\Phi_n^{(j)}(u) - \Phi^{(j)}(u)}{\Phi(u)} \right\|_{U_n} \geq K\varepsilon_n \right\},$$

где для любой функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\|f\|_{U_n} := \sup_{u\in[-U_n,U_n]} |f(u)|$, ε_n - последовательность положительных чисел такая, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$K\varepsilon_n \left(1 + \|\Psi'_\sigma\|_{U_n}\right) \leq 1/2.$$

Тогда на множестве $\mathcal{A}_K^{\mathcal{C}}$ (дополнение к множеству $\mathcal{A}_K$), оценка $\tilde{\nu}_n(x)$ удовлетворяет свойству

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \{|x|^c |\tilde{\nu}_n(x) - \tilde{\nu}(x)|\} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\{|v|\leq V_n\}} \frac{\Omega_n}{\min\left(|Q_1(1-c-\mathrm{i}v)|, |Q_2(1-c-\mathrm{i}v)|\right)} dv + \frac{A}{2\pi} e^{-\beta V_n}, \tag{7}$$

где

$$\Omega_n := \frac{2KC}{1-c}\varepsilon_n(1 + \|\Psi'_\sigma\|_{U_n})U_n^{1-c} + \left(A + \frac{2^\alpha A}{1-c}\right) \int_{\mathbb{R}} \left[\mathcal{K}(x)\right]^{c+1} \left[1 + U_n\mathcal{K}(x)\right]^{-\alpha} dx,$$

и $C > 0$ - константа для всех процессов с мерами Леви, удовлетворяющим условию (A1).

В разделе 1.2.5 рассмотрен достаточно общий случай, для которого правая часть (7) может быть выписана в более явном виде. Кроме того, в диссертации выписаны достаточные условия сходимости вероятности множества $\mathscr{A}_K$ к нулю с полиномиальной скоростью при определённом выборе последовательности ε_n и числа K.

2.2 Модели со случайной заменой времени

В одномерном случае ($d = 1$), концепция стохастической замены времени состоит в том, что для некоторого случайного процесса $L_t, t \geq 0$, вместо детерминированного времени t используется неубывающий неотрицательный случайный процесс $\mathcal{T}(s), s \geq 0$, играющий роль случайного времени. Таким образом,

$$X(s) = L_{\mathcal{T}(s)}, \quad s \geq 0, \tag{8}$$

причём, как правило, предполагается, что процессы L и $\mathcal{T}$ являются независимыми. Данная модель мотивирована теоремой Монро, согласно которой класс процессов, получаемых заменой времени в Броуновском движении, совпадает с классом семимартингалов (отметим, что в этой теореме процессы L и $\mathcal{T}$ могут быть зависимыми).[35]

Экономическая интерпретация такой подстановки состоит в том, что для конкретного финансового инструмента, доходность которого моделируется посредством X, "бизнес-время" $\mathcal{T}$ может идти быстрее, чем физическое время в некоторые периоды времени. Например, такие периоды времени могут быть ассоциированы с большой активностью на бирже, выраженной в количестве транзакций.[36] Если процесс замены времени $\mathcal{T}$ сам является процессом Леви (субординатором), то итоговый процесс $X(s)$ является тоже процессом Леви и для любого $s \geq 0$ распределение процесса X является смесью вероятностных распределений:

$$\mathsf{P}\{X(s) \in B\} = \int_{\mathbb{R}+} \mathsf{P}_{L_u}(B) d\mathsf{P}_{T(s)}(u), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

[35] Monroe, I. Processes that can be embedded in Brownian motion. *The Annals of Probability.* 6:42-56, 1978.

[36] Clark P. A subordinated stochastic process model with fixed variance for speculative prices. *Econometrica.* 41:135-156, 1973.
Ané, T. and Geman, H. Order flow, transaction clock, and normality of asset returns. *The Journal of Finance.* 55(5): 2259-2284, 2000

2.2.1 Оценивание индексов Блюменталя–Гетура

Индекс Блюменталя–Гетура процесса Леви с мерой Леви ν определяется следующим образом:

$$\mathtt{BG}(Z) = \inf\left\{ r > 0 : \int_{|x|\le 1} |x|^r \nu(dx) < \infty \right\}.$$

Известно, что этот индекс лежит в интервале $[0, 2]$ и характеризует активность маленьких скачков процесса. Эквивалентно, индекс Блюменталя–Гетура может быть определён как такое число α, что $\nu\left(\{x : |x| > \varepsilon\}\right) \asymp c\varepsilon^{-\alpha}$, $\varepsilon \to 0+$ для некоторой константы $c \in (0, \infty)$.[37]

Для модели (8) в разделе 2.1 предложен метод статистического оценивания индексов Блюменталя–Гетура процессов L и $\mathcal{T}$. Предполагается, что доступны наблюдения процесса $X(s) = L_{\mathcal{T}(s)}$ в моменты времени $s = \Delta, 2\Delta, ..., n\Delta$ с фиксированным $\Delta > 0$ (низкочастотные данные, low-frequency data), а процессы L и $\mathcal{T}$ по отдельности не наблюдаемы. Вводятся следующие ограничения на модель.

(A1) Процесс $L_t, t \ge 0$, определённый на пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}, \mathsf{P})$, является процессом Леви с тройкой Леви (μ, σ^2, ν), причём $\sigma \neq 0$ и

$$\nu\left(\{x : |x| > \varepsilon\}\right) = \varepsilon^{-\gamma}(\beta_0 + \beta_1 \varepsilon^{\chi_1}(1 + O(\varepsilon))), \quad \varepsilon \to +0$$

где $\beta_0 > 0, \beta_1 \in \mathbb{R}, \chi_1 \in (0, \gamma)$, и γ - индекс Блюметаля–Гетура процесса L.

(A2) Процесс $\mathcal{T}(s), s \ge 0$, является неубывающим процессом, почти все траектории которого начинаются из нуля ($\mathcal{T}(0) = 0$ п.н.), непрерывны справа и имеют пределы слева. Для любого фиксированного $s \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{T}(s)$ является моментом остановки относительно фильтрации $\mathscr{F}$. Процессы $\mathcal{T}$ и L являются независимыми. Преобразование Лапласа случайной величины $\mathcal{T}(\Delta)$ обладает свойством

$$\mathcal{L}_\Delta(u) := \mathsf{E}[e^{-u\mathcal{T}(\Delta)}] \asymp Ae^{-\lambda u^\alpha \Psi(u)}, \ u \to +\infty, \tag{9}$$

где $\lambda > 0$, $A > 0$, $\alpha \in (0, 1]$, и функция $\Psi(u)$ для достаточно больших u удовлетворяет

[37] Panov V. *Abelian Theorem for Stochastic Volatility Models and Semiparametric Estimation of the Signal Space.* PhD dissertation. Humboldt University (Berlin), 2012.

свойству

$$|1-\Psi(u)| \leq \beta_2 u^{-\chi_2}$$

с некоторыми $\chi_2, \beta_2 \geq 0$ (отметим, что если L является субординатором, то коэффициент α совпадает с его индексом Блюменталя–Гетура).

Предлагаемый в разделе 2.1.5 метод оценивания параметров α и γ мотивирован утверждением 2.2, согласно которому модуль характеристической функции процесса X_Δ представим в виде

$$\left|\phi^\Delta(u)\right| = \left|\mathsf{E}[e^{\mathrm{i}uX_\Delta}]\right| = A\exp\left\{-\tau_1|u|^{2\alpha}\left(1+\tau_2|u|^{\gamma-2}+r(u)\right)\right\},$$

где $\tau_1, \tau_2 > 0$ и $r(u) = o(|u|^{\gamma-2})$. Обозначим оценку этой функции

$$\hat{\phi}_n(u) := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}u(X_{\Delta k}-X_{\Delta(k-1)})},$$

и определим оценки параметров α и γ следующим образом

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n &:= \frac{1}{2}\int_0^\infty w^{U_n}(u)\log\left(-\log|\hat{\phi}_n(u)|\right)du, \\ \hat{\gamma}_n(\hat{\alpha}_n) &:= 2(1-\hat{\alpha}_n) + \int_0^\infty w^{V_n}(u)\log\left(-\log\frac{|\hat{\phi}_n(u)|^{\theta^{2\hat{\alpha}_n}}}{|\hat{\phi}_n(\theta u)|}\right)du, \end{aligned}$$

где весовые функции определяются как $w^{V_n}(u) = V_n^{-1}w^1(u/V_n)$, $w^{U_n}(u) = U_n^{-1}w^1(u/U_n)$, причём U_n, V_n - две неограниченно возрастающие последовательности положительных чисел, w^1 - почти всюду гладкая функция с носителем на $[\varepsilon, 1]$ (с $\varepsilon > 0$), удовлетворяющая свойствам

$$\int_\varepsilon^1 w^1(u)\,du = 0, \quad \int_\varepsilon^1 w^1(u)\log u\,du = 1. \tag{10}$$

Для изучения теоретических свойств оценок, вводится ещё одно ограничение на процесс замены времени $\mathcal{T}$.

(A3) Последовательность $T_k = \mathcal{T}(\Delta k) - \mathcal{T}(\Delta(k-1))$, $k \in \mathbb{N}$, является стационарной и обладает свойством α-перемешивания,[38] причём коэффициенты перемешивания $(\alpha_T(k))_{k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют свойству

$$\alpha_T(k) \le \bar{\alpha}_0 \exp(-\bar{\alpha}_1 k), \quad j \in \mathbb{N}$$

с $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1 > 0$.

В теореме 2.11 введён класс моделей $\mathscr{G}$, состоящий из моделей с заменённым временем, удовлетворяющих условием (A1)-(A3) и некоторым ограничениям на параметры. Для этого класса доказано следующее утверждение.

Теорема 4 (Комбинация теорем 2.11, 2.12, 2.17 в диссертации)**.**

1. *Оценка $\hat{\gamma}_n(\alpha)$ (то есть оценка параметра γ при условии, что параметр α известен) имеет логарифмический порядок сходимости к истинному значению γ, но этот порядок является оптимальным в минимаксном смысле. Более точно, существуют положительные константы $\varkappa, \delta, c, \Xi$ такие, что для любых $\Xi_1 > \Xi$ и $\Xi_2 < \Xi$ выполнено*

$$\begin{aligned} \sup_{\mathscr{G}} \mathsf{P}\left\{|\hat{\gamma}_n(\alpha) - \gamma| \ge \Xi_1 (\log n)^{-c}\right\} &< \varkappa\, n^{-1-\delta}, \\ \varliminf_{n\to\infty} \inf_{\hat{\gamma}_n^*} \sup_{\mathscr{G}} \mathsf{P}\left\{|\hat{\gamma}_n^* - \gamma| \ge \Xi_2 (\log n)^{-c}\right\} &> 0, \end{aligned}$$

   где $\hat{\gamma}_n^*$ - любая оценка параметра γ.

2. *В общем случае, когда параметр α не известен, можно подобрать последовательности U_n и V_n таким образом, что для некоторой константы $\Xi_3 > 0$*

$$\sup_{\mathscr{G}} \mathsf{P}\left\{|\hat{\gamma}_n(\hat{\alpha}_n) - \gamma| \ge \Xi_3 (\log n)^{-c}\right\} < \varkappa\, n^{-1-\delta},$$

[38] Коэффициент α-перемешивания между $\sigma-$алгебрами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ определяется как

$$\alpha(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \sup_{B\in\mathcal{B}, C\in\mathcal{C}} |\mathsf{P}\{B\cap C\} - \mathsf{P}\{B\}\mathsf{P}\{C\}|.$$

Говорят, что последовательность ξ_k обладает свойством альфа-перемешивания, если

$$\alpha_\xi(k) = \sup_{t\in\mathbb{Z}} \alpha\big(\sigma(\xi_s, s \le t), \sigma(\xi_s, s \ge t+k)\big) \to 0, \qquad \text{при} \quad k \to \infty.$$

то есть порядок сходимости совпадает с порядком сходимости в случае известного параметра α.

2.2.2 Моделирование многомерных процессов с заменённым временем

Раздел 2.2 посвящён обобщению модели (8) на многомерный случай. Рассмотрим d-мерный процесс Леви $\vec{L}_t = (L_1(t), ..., L_d(t))\,, t \in \mathbb{R}+$ *с независимыми компонентами* и d-мерный субординатор $\vec{\mathcal{T}}(s) = (\mathcal{T}_1(s), ..., \mathcal{T}_d(s))\,, s \in \mathbb{R}_+$ (т.е. процесс Леви такой, что каждая компонента является неотрицательным процессом Леви), *с зависимыми компонентами*, причём $\mathcal{T}_i$ и L_i независимы для любого $i = 1, .., d$. Определим многомерную замену времени как

$$\vec{X}(s) = \Big(X_1(s), ..., X_d(s)\Big) := \Big(L_1(\mathcal{T}_1(s)), ..., L_d(\mathcal{T}_d(s))\Big), \qquad s \in \mathbb{R}_+. \tag{11}$$

Для описания зависимости между компонентами процесса замены времени $\vec{\mathcal{T}}$ вводится понятие копулы Леви.[39]

Определение. d-мерная копула Леви $F : \bar{\mathbb{R}}^d \mapsto \bar{\mathbb{R}}$ - это функция, удовлетворяющая следующим свойствам

1. $F\left(\vec{u}\right) = 0$ если $u_i = 0$ для хотя бы одного $i = 1, .., d$ (grounded function);
2. F - d-возрастающая функция;
3. $F^{(1)}(v) = ... = F^{(d)}(v) = v$, где
$$F^{(j)}(v) = \lim_{u_1,...,u_{j-1},u_{j+1},u_d \to \infty} F\left(u_1, ..., u_{j-1}, v, u_{j+1}, ..., u_d\right),\ j = 1..d,$$
(uniform margins);
4. $F\left(u_1, ..., u_d\right) \neq \infty$ для $\left(u_1, ..., u_d\right) \neq (\infty, ..., \infty)$.

Копулы Леви тесно связаны с остаточными интегралами меры Леви, которые определяются как

$$U(x_1, ..., x_d) := (-1)^{h(x_1)+...+h(x_d)} \cdot \nu\Big(I(x_1) \times ... \times I(x_d)\Big),$$

[39] Cont, R. and Tankov, P. *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman & Hall. CRC Press, UK, 2004.

где

$$I(x) := \begin{cases} (x, +\infty), & \text{если } x > 0, \\ (-\infty, x), & \text{если } x < 0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad h(x) := \begin{cases} 2, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Согласно аналогу теоремы Склара, для процесса Леви с остаточным интегралом U и маргинальными остаточным интегралами $U_1, ..., U_d$, найдётся копула Леви F, такая что

$$U(x_1, ..., x_d) = F\left(U_1(x_1), ..., U_d(x_d)\right) \tag{12}$$

и наоборот, для любой копулы Леви F и одномерных процессов Леви с остаточными интегралами $U_1, ..., U_d$, найдётся d-мерный процесс Леви с остаточным интегралом U, задаваемым формулой (12), и маргинальными остаточными интегралами $U_1, ..., U_d$. По сути, копулы Леви отличаются от "обычных" копул (ordinary copulas) только областью определения и областью значения функции: "обычные" копулы определены на $[0, 1]^d$ и принимают значения на $[0, 1]$.

В разделе 2.2.6 доказан следующий теоретический результат для случая, когда $\vec{L}_t$ является многомерным устойчивым процессом.

Теорема 5 (Теорема 2.20 в диссертации)**.** *Рассмотрим модель (11), где $L_1, ...L_d$ независимые устойчивые процессы, и $\vec{\mathcal{T}} = (\mathcal{T}_1, ..., \mathcal{T}_d)$ - d-мерный субординатор (в общем случае с зависимыми компонентами) с преобразованием Лапласа*

$$\mathscr{L}_{\mathcal{T}(s)}(\vec{u}) := \mathsf{E}\left[e^{\langle \vec{\mathcal{T}}(s), \vec{u}\rangle}\right] = \exp\Big\{ s \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\langle \vec{u}, \vec{x}\rangle} - 1\right) \eta(d\vec{x}) \Big\}, \qquad \vec{u} \in \mathbb{R}^d, \quad s \geq 0,$$

причём мера Леви η удовлетворяет условию

$$\int_{|\vec{x}| \leq 1} |\vec{x}|^{1/2} \eta(d\vec{x}) < \infty.$$

Обозначим через $F(u_1, ..., u_d)$ копулу Леви между $\mathcal{T}_1, .., \mathcal{T}_d$. Предположим, что

(1) функция распределения $\widetilde{F}(u_1, ..., u_{d-1}|v) = \partial F(u_1, .., u_{d-1}, v)/\partial v$ соответствует абсо-

лютно непрерывному распределению для любого $v \geq 0$;

(2) *существуют функции* $h_1, ..., h_{d-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ *и случайные величины* $\xi_1, ..., \xi_{d-1}$ *такие, что*

$$\mathsf{P}\left\{h_1(\xi_1, v) \leq u_1, ..., h_{d-1}(\xi_{d-1}, v) \leq u_{d-1}\right\} = \widetilde{F}(u_1, ..., u_{d-1}|v).$$

Тогда

$$\vec{X}(s) \stackrel{d}{=} \vec{Z}(s), \qquad \forall s \in [0,1],$$

где d-мерный случайный процесс $\vec{Z}(s) = (Z_1(s), ..., Z_d(s))$ *определён следующим образом:*

$$\begin{aligned} Z_k(s) \quad := \quad & \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(G_i^{(k)} - \mu_i \right) \left(U_k^{(-1)} \left(h_k(Q_i^{(k)}, \Gamma_i) \right) \right)^{1/\alpha_k} \right. \\ & \left. + \mu_i U_k^{(-1)} \left(h_k(Q_i^{(k)}, \Gamma_i) \right) \right] \mathbb{I}\left\{R_i \leq s\right\} \end{aligned}$$

для $k = 1..(d-1)$ *и*

$$Z_d(s) \quad := \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left[\left(G_i^{(d)} - \mu_i \right) \left(U_d^{(-1)} \left(\Gamma_i \right) \right)^{1/\alpha_k} + \mu_i U_d^{(-1)} \left(\Gamma_i \right) \right] \mathbb{I}\left\{R_i \leq s\right\},$$

причём

- $U_1, ..., U_d$ *являются остаточными интегралами мер Леви субординаторов* $T_1, ..., T_d$ *соответственно, и* $U_1^{(-1)}, ..., U_d^{(-1)}$ *- это их обобщённые обратные функции, то есть*

$$U_i^{(-1)}(y) = \inf\left\{x > 0 : \quad U_i(x) < y\right\}, \quad i = 1..d, \quad y \in \mathbb{R}_+;$$

- Γ_i, $i = 1, 2, ..$ *- последовательность скачков стандартного процесса Пуассона;*
- R_i, $i = 1, 2, ..$ *- последовательность независимых одинаково распределённых величин с равномерным распределением на* $[0, 1]$*;*
- *для* $i = 1, 2, ..$, $G_i^{(1)}, ..., G_i^{(d)}$ *- последовательность н.о.р. устойчивых случайных величин,* $G_i^{(j)} \sim S_{\alpha_j}(\sigma_j, \beta_j, 0)$;

- *для* $i = 1, 2, .., \vec{Q}_i := \left(Q_i^{(1)}, .., Q_i^{(d-1)}\right)$ *- последовательность н.о.р., имеющих такое же распределение, что и* $(\xi_1, ..., \xi_{d-1})$,

и все последовательности $\Gamma_i, R_i, G_i^{(1)}, ..., G_i^{(d)}, \vec{Q}_i$ *независимы в совокупности.*

Отметим, что в моделях с заменённым временем использование устойчивых процессов имеет ряд преимуществ по сравнению с Броуновским движением. В разделе 2.2.7 представлены результаты эмпирического анализа, показывающие, что модель двумерного субординированного устойчивого процесса хорошо воспроизводит зависимость между компонентами как в случае сильнокоррелированных компонент (в статье рассмотрены доходности акций компаний Apple и Microsoft), так и в случае слабой корреляции (доходности акций Apple и General Electric).

2.3 Построение честных доверительных множеств

2.3.1 Честные доверительные множества для плотности распределения

В разделе 3.1 представлен новый подход для построения доверительных интервалов для плотности, и показано применение этого метода для плотности смеси распределений.

Пусть задана выборка $X_1, ..., X_n$ из (неизвестного) абсолютно непрерывного распределения и $\alpha \in (0, 1)$ - некоторое фиксированное число. Говорят, что $\mathcal{C}_n(x)$ - $(1-\alpha)$-доверительное множество для p, честное (honest) по отношению к заданному классу $\mathscr{F}$, если

$$\inf_{p \in \mathscr{F}} \mathsf{P}\Big\{p(x) \in \mathcal{C}_n(x), \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}\Big\} \geq 1 - \alpha + e_n, \tag{13}$$

где $e_n \to 0$ при $n \to \infty$. Стандартный подход к построению таких доверительных интервалов состоит в применении теоретических фактов, известных в литературе как теоремы типа Смирнова–Бикеля–Розенблатта, согласно которым распределение максимального отклонения оценки плотности $\hat{p}_n(x)$, т.е.

$$\mathcal{D}[\hat{p}_n] = \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{|\hat{p}_n(u) - p(u)|}{\sqrt{p(u)}}, \tag{14}$$

асимптотически близко к распределению Гумбеля,

$$\sup_{p\in\mathscr{F}}\left|\mathsf{P}\left\{\mathcal{D}[\hat{p}_n]\le\frac{x}{a_n}+b_n\right\}-e^{-e^{-x}}\right|\to 0,\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}\tag{15}$$

для некоторых детерминированных последовательностей a_n и b_n. Отметим, что утверждения вида (15) были ранее доказаны только для ядерных оценок и для проекционных оценок, построенных при помощи некоторых базисов вейвлетов (базис Хаара и базис Баттл–Лемари).[40]

В разделе 3.1 представлен метод построения честных доверительных интервалов, построенных по проекционным оценкам, причём порядок последовательности e_n для этих интервалов является полиномиальным. Более точно, для функций плотности из пространства $\mathscr{L}^2([A,B])$ ($[A,B]$ - фиксированный отрезок), определим проекционные оценки следующим образом. Выберем в пространстве $L^2([A,B])$ базис $\Psi:=\{\psi_0,\psi_1,\psi_2,...\}$, сам отрезок $[A,B]$ разделим на M интервалов длины $\delta=(B-A)/M$, и на каждом интервале $I_m=[a_m,b_m]:=[A+\delta(m-1),A+\delta m], m=1..M$, воспроизведём базис Ψ

$$\psi_j^{(m)}(x)=\sqrt{M}\cdot\psi_j\Big(M(x-a_m)+A\Big),\quad m=1..M,\;\; j=0,1,....$$

Поскольку $p\in\mathscr{L}^2([A,B])$, для любого $M\in\mathbb{N}$,

$$p(x)=\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\int\psi_j^{(m)}(u)p(u)du\right]\psi_j^{(m)}(x).$$

Проекционная оценка p определяется как

$$\hat{p}_n(x)\;\;=\;\;\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=0}^{J}\left[\int\psi_j^{(m)}(u)d\mathsf{P}_n(u)\right]\psi_j^{(m)}(x),$$

где $J\in\mathbb{N}$ и $\mathsf{P}_n=n^{-1}\sum_{i=1}^n\delta_{X_i}$ - эмпирическая мера.

Как показано в разделе 3.1.4, распределение максимального отклонения этой оценки (в

[40]Giné, E. and Nickl, R. *Mathematical Foundations of Infinite-dimensional Statistical Models.* Cambridge University Press, 2016.

терминах (14)) близко к распределению супремума модуля гауссовского процесса

$$\Upsilon(x) = \int_I \Big(\sum_{j=0}^{J} \psi_j(x)\psi_j(u) \Big) dW(u), \qquad x \in [A,B],$$

где W - Броуновское движение. Согласно утверждению 3.1,

$$\mathsf{P}\Big\{ \max_{t\in[A,B]} \big|\Upsilon(t)\big| \geq u \Big\} = G(u) + O\Big(e^{-u^2(1+\chi)/(2S)} \Big), \qquad u \to \infty,$$

для $S = \max_{t\in[A,B]}\{\mathsf{Var}\Upsilon_t\}$, некоторого $\chi > 0$ и некоторой монотонно убывающей функции $G : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, такой, что $\lim_{x\to\infty} G(x) = 0$. Этот результат (утверждение 3.1) является новым фактом в теории экстремальных значений для нестационарных гауссовских процессов.

Ниже приведена формулировка утверждения о последовательности сопровождающих законов.

Теорема 6 (Теорема 3.11 в диссертации)**.** *Предположим, что для некоторого $J \in \mathbb{N}$, функции $\psi_0, ..., \psi_J$ обладают следующими свойствами.*

(A1) Для любого $j = 0..J$, функция ψ_j равномерно непрерывна по Гёльдеру с некоторым показателем $\alpha \in (0,1]$, т.е. коэффициент Гёльдера

$$\big|\psi_j\big|_\alpha := \sup_{x\neq y,\, x,y\in[A,B]} \frac{|\psi_j(x) - \psi_j(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

является конечным.

(A2) Максимум суммы $\sum_{j=0}^{J} \psi_j^2(x)$ достигается в конечном числе точек.

Предположим, что истинная плотность p принадлежит классу

$$\mathcal{P}_{q,H,\beta} := \Big\{ p - \ p.d.f.\ , \quad p \in \mathscr{L}^2([A,B]), \quad \inf_{x\in[A,B]} p(x) \geq q, \quad \big|p\big|_\beta \leq H \Big\},$$

для некоторых $q > 0, H > 0, \beta \in (0,1]$. Обозначим последовательность функций распределения

$$A_M(x) := \begin{cases} \exp\Big\{ -MG(x) \Big\}, & \textit{если } x \geq c_M, \\ 0, & \textit{если } x < c_M, \end{cases}$$

где $c_M = (2S\log M)^{1/2} - S$. *Тогда при* $M = \lfloor n^\lambda \rfloor$, *где* $\lambda \in ((2\beta+1)^{-1}, 1)$, *для достаточно больших* n *выполнено*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left\{ \sqrt{\frac{n}{M}} \mathcal{D}[\hat{p}_n] \le x \right\} - A_M(x) \right| \quad \le \quad \bar{c} n^{-\gamma}$$

с некоторыми $\bar{c}, \gamma > 0$.

На этом утверждении основывается метод построения доверительных интервалов, честных по отношению к классу $\mathcal{P}_{q,H,\beta}$. Как показано в разделе 3.1.6, такие интервалы могут быть записаны в виде

$$\mathcal{C}_n(x) := \Bigg(\hat{p}_n(x) + (k_{\alpha,M}^2/2) - \left[\hat{p}_n(x) k_{\alpha,M}^2 + (k_{\alpha,M}^4/4)\right]^{1/2}, \\ \hat{p}_n(x) + (k_{\alpha,M}^2/2) + \left[\hat{p}_n(x) k_{\alpha,M}^2 + (k_{\alpha,M}^4/4)\right]^{1/2} \Bigg),$$

где $k_{\alpha,M} := \sqrt{M/n} \cdot q_{\alpha,M}$ и $q_{\alpha,M}$ - $(1-\alpha)$-квантиль функции распределения A_M. Численные эксперименты были проведены для плотности смеси нормальных распределений

$$p(x) = \frac{1}{2}\phi_{(0,1)}(x) + \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{4} \phi_{((j/2)-1,1/100)}(x),$$

известной в литературе как "плотность Барта Симпсона".[41]

2.3.2 Оценивание меры Леви

Описанная в предыдущем разделе методика может быть применена и в более сложных моделях. В главе 3.2 представлен метод построения доверительных интервалов для плотности меры Леви. Отметим, что в модели со случайной заменой времени (см. раздел 2.2 выше), мера Леви процесса $X(s) = L_{\mathcal{T}(s)}$, $s \ge 0$, является смесью вероятностных распределений, если процесс $\mathcal{T}$ является субординатором. Действительно, в этом случае мера Леви процесса X представима в виде

$$\nu(dx) = \int_{\mathbb{R}_+} \mu_t(dx) \nu_{\mathcal{T}}(dt),$$

[41] Wasserman, L. *All of Nonparametric Statistics.* Springer Science and Business Media. 2006.

где μ_t - вероятностная мера процесса L_t, $t \geq 0$, а $\nu_{\mathcal{T}}$ - мера Леви процесса $\mathcal{T}$.

В предположении, что доступны наблюдения процесса X_t в моменты времени $\Delta, 2\Delta, ...$, $n\Delta = T$ с $\Delta \to 0$ при $n \to \infty$, определим оценку плотности меры Леви

$$\hat{s}_n(x) := \frac{1}{n\Delta} \sum_{m=1}^{M} \sum_{j=0}^{J} \left[\sum_{k=1}^{n} \psi_j^{(m)} \left(X_\Delta^{(k)} \right) \right] \psi_j^{(m)}(x), \tag{16}$$

где $X_\Delta^{(k)} = X_{k\Delta} - X_{(k-1)\Delta}$, $k = 1..n$. Анализ максимального отклонения этой оценки существенно более сложный, чем в случае проекционных оценок для плотности распределения. Для простоты сформулируем результат для частного случая тригонометрического базиса.

Теорема 7 (Теорема 3.22 в диссертации). *Пусть $\hat{s}_n$ - оценка плотности меры Леви (16), построенная по тригонометрическому базису, который на отрезке $[A, A+\delta)$ задаётся следующим образом*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\delta}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\delta}} \cos\left(2j\pi(x-a)/\delta\right), \quad \sqrt{\frac{2}{\delta}} \sin\left(2j\pi(x-a)/\delta\right), \quad j = 1, 2, .. \right\}.$$

Определим последовательность функций распределения

$$A_M(x) := \begin{cases} \exp\left\{ -2\exp\left\{ -x - \frac{x^2}{4\log(h_1 M)} \right\} - 2M\left(1 - \Phi\left(u_M(x)\sqrt{2h_2}\right)\right) \right\}, & \\ & \text{если } x \geq -b_M^{3/2}, \\ 0, & \text{если } x < -b_M^{3/2}, \end{cases}$$

где

$$u_M(x) := \frac{x}{a_M} + b_M$$

с

$$a_M = 2h_2 b_M, \quad b_M = \sqrt{\frac{\log(h_1 M)}{h_2}}, \quad h_1 = \sqrt{\frac{2\sum_{j=1}^{J/2} j^2}{J+1}}, \quad h_2 = \frac{B-A}{2(J+1)}.$$

Тогда при $T = n^{\varkappa}, M = o(n^{\varkappa/2}/\log n)$ *с* $\varkappa \in (0,1)$ *для достаточно больших* n *выполнено*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left\{ \sqrt{\frac{T}{M}}\mathcal{D}[\hat{s}_n] \le u_M(x) \right\} - A_M(x) \right| \le \bar{c}\, n^{-\gamma}. \tag{17}$$

с некоторыми $\bar{c}, \gamma > 0$.

2.4 Предельные законы и фазовые переходы в модели смеси

2.4.1 Параболическая задача Андерсона с потенциалом, являющимся смесью вероятностных распределений

На целочисленной решётке $\mathbb{Z}^d$, рассмотрим куб $Q_n = [-n,n]^d$ и гамильтониан Андерсона

$$H_n = \Delta + \beta V_n(x,\omega),$$

где β - обратная температура, $V_n(x,\omega), x \in Q_n$, - случайный потенциал, и

$$\Delta\psi(x) = \sum_{x':|x'-x|=1} \psi(x')$$

- лапласиан на Q_n с граничным условием Дирихле $\psi(x) = 0,\ x \in \partial Q_n$. Мы преполагаем, что потенциал является сильным, и выбираем $V_n(x,\omega) = \sqrt{n}\xi(x,\omega)$, где $\xi-$ гауссовская случайная величина.

Теперь рассмотрим параболическую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= H_n u, \qquad t \ge 0,\ x \in Q_n, \\ u(t,x) &= 0, \qquad\qquad\quad x \in \partial Q_n, \\ u(0,x) &= \delta_y(x), \end{aligned}$$

где $y \in Q_n$ - параметр. Фундаментальное решение этой задачи есть

$$u_n(t,x) = u_n(t,x,y) = \sum_{i=1}^{|Q_n|} e^{\lambda_{n,i}t}\psi_{n,i}(x)\psi_{n,i}(y), \tag{18}$$

где $\lambda_{n,i}, \psi_{n,i}$ - собственные значения и (нормированные) собственные функции оператора H_n, то есть, $H_n\psi_{n,i} = \lambda_{n,i}\psi_{n,i}$. Обозначим случайную экспоненциальную сумму

$$\operatorname{Tr} e^{tH_n} = \sum_{x\in Q_n} u_n(t,x,x) = \sum_{i=1}^{|Q_n|} e^{\lambda_{n,i}t}, \tag{19}$$

которая при $t=\beta$ близка к $S_n(\beta) = \sum_{y\in Q_n} e^{\beta\sqrt{n}\xi(y,\omega)}$.

По аналогии, след гамильтониана параболической задачи Андерсона с потенциалом

$$V_n(x,\omega) = \sqrt{n}\xi(x,\omega), \qquad \text{где} \quad \xi(x,\omega) = \begin{cases} \eta(x,\omega) & \text{с вероятностью } 1/2, \\ \zeta(x,\omega) & \text{с вероятностью } 1/2, \end{cases}$$

с независимыми гауссовскими случайными величинами η, ζ, близок к статистической сумме модели случайной энергии (Random Energy Model) с распределением смеси. Предельные распределения и фазовые переходы для этой модели рассмотрены в разделе 4.1.

Более точно, в этом разделе рассмотрена случайная экспоненциальная сумма

$$\mathcal{S}_n(\beta) = \sum_{j=1}^{\lfloor e^n \rfloor} e^{\beta\sqrt{n}Z_j},$$

где $Z_1, Z_2, ...$- последовательность i.i.d. случайных величин с функцией распределения

$$F_{a,\sigma}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(x\right) + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-\sqrt{n}a}{\sigma}\right)$$

с $a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$.

Теорема 8 (Теоремы 4.3, 4.4, 4.5 в диссертации)**.**

1. *Закон больших чисел*

$$\frac{\mathcal{S}_n(\beta)}{\mathsf{E}[\mathcal{S}_n(\beta)]} \xrightarrow{p} 1, \qquad n\to\infty,$$

выполнен при $\beta < \beta^+$, *где*

$$\beta^+ = \begin{cases} \sqrt{2}/\sigma, & \text{если } a > \left(1-\sigma^2\right)/(\sqrt{2}\sigma), \\ \beta_\circ := \frac{2a}{1-\sigma^2}, & \text{если } \left(1-\sigma^2\right)/\sqrt{2} < a < \left(1-\sigma^2\right)/(\sqrt{2}\sigma), \\ \sqrt{2}, & \text{если } a < \left(1-\sigma^2\right)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

2. *Центральная предельная теорема*

$$\frac{\mathcal{S}_n(\beta) - \mathsf{E}[\mathcal{S}_n(\beta)]}{\sqrt{\mathsf{Var}(\mathcal{S}_n(\beta))}} \xrightarrow{d} \zeta_0, \qquad n \to \infty,$$

где $\zeta_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$, *выполнена при* $\beta < \beta^+/2$.

3. *Сходимость по распределению к устойчивым законам имеет место в следующих случаях.*

   (i) Если $a < \sqrt{2}(1-\sigma)$, *то существует детерминированная последовательность* $a_n^\sharp(\beta)$ *такая, что*

   $$\frac{\mathcal{S}_n(\beta) - a_n^\sharp(\beta)}{\gamma_n(\beta)} \xrightarrow{d} \zeta_\beta, \qquad n \to \infty,$$

   для любого $\beta > \beta^\sharp$, *где*

   $$\beta^\sharp \quad = \quad \begin{cases} \beta_\diamond/2, & \text{если } \sigma < 1 \text{ и } a > (1-\sigma^2)/\sqrt{2}, \\ \sqrt{2}/2, & \text{иначе,} \end{cases}$$

   с $\beta_\diamond = \left((\sqrt{2}-a) - \sqrt{\left(\sqrt{2}-a\right)^2 - 2\sigma^2}\right)/\sigma^2$, *и случайная величина* ζ_β *имеет* $\sqrt{2}/\beta$*-устойчивое распределение с тройкой Леви* $\left(0, 0, (2\pi)^{-1/2} x^{-\sqrt{2}/\beta} \mathbb{I}_{x>0} dx\right)$.

   (ii) Если $a > \sqrt{2}(1-\sigma)$, *то существует детерминированная последовательность* $\breve{a}_n(\beta)$ *такая, что*

   $$\frac{\mathcal{S}_n(\beta) - \breve{a}_n(\beta)}{e^{\beta a n}\gamma_n(\beta\sigma)} \xrightarrow{d} \zeta_{\beta\sigma}, \qquad n \to \infty,$$

для любого $\beta > \breve{\beta}$, где

$$\beta^{\sharp} = \begin{cases} \beta_*/2, & \text{если } \sigma > 1 \text{ и } a < (1-\sigma^2)/(\sqrt{2}\sigma), \\ \sqrt{2}/(2\sigma), & \text{иначе} \end{cases}$$

с $\beta_* = \big(\sigma\sqrt{2} + a\big) - \sqrt{\big(\sigma\sqrt{2} + a\big)^2 - 2}$.

2.5 Определение типа распределения

В главе 5 представлены новые результаты о типе обобщённого распределения Дикмана–Гончарова, определяемого как распределение случайной величины $\mathcal{B}$, удовлетворяющей равенству

$$\mathcal{B} \stackrel{d}{=} \mathcal{T} + \mathcal{B}\mathcal{X},$$

где $(\mathcal{T}, \mathcal{X})$ и $\mathcal{B}$ в правой части равенства независимы. В работе рассмотрен случай, когда $\mathcal{T} = \mathcal{X}$, и эти величины принимают значения ρ^m с вероятностями qp^m, $m = 0, 1, 2, ..,$ где $\rho \in (0,1)$, $p \in (0,1)$ и $q = 1-p$ (дискретное распределение Дикмана–Гончарова). Показано, что в этом случае

$$\mathcal{B} \stackrel{d}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Z_p^{(n)} \rho^n,$$

где $Z_p^{(1)}, Z_p^{(2)}, ...$ - н.о.р. случайные величины, принимающие значения $0, 1, 2, 3, ..$ с вероятностями $p, pq, pq^2, pq^3, ...$, и, кроме того, доказана следующая теорема.

Теорема 9 (Теорема 5.5 в диссертации)**.** *Распределение случайной величины $\mathcal{B}$ является абсолютно непрерывным для почти всех*

$$\rho \in \Big(\frac{q^2+1}{(q+1)^2}, 1\Big).$$

3 Заключение

В диссертации представлены новые подходы к решению различных вероятностных и статистических задач, связанных с моделью смеси вероятностных распределений. На защиту выносятся результаты, полученные при решении задач из 5 направлений данной научной области (см. стр. 9). Результаты исследования опубликованы в 12 статьях, из которых 11 статей опубликованы в журналах с квартилями Q1/Q2 (по Scopus). Ключевые факты приведены в данном резюме в виде 9 теорем.