

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Факультет математики

На правах рукописи

Щечкин Антон Игоревич

Уравнения Пенлеве и теория представлений

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
доцент Михаил Берштейн

Москва — 2020

1 Резюме диссертации

Данное исследование посвящено изучению решений уравнений Пенлеве и их q -деформаций, с помощью методов теории представлений и геометрии пространств модулей инстантонов.

1.1 Исторический очерк

Уравнения Пенлеве возникли более 100 лет тому назад, изначально как дифференциальные уравнения второго порядка без подвижных особенностей (не считая полюсов), в работах П. Пенлеве и Б. Гамбье [P1900], [P1900], [G1910].

Несколько позднее, в работах Р. Фукса [F1905], [F1907], было обнаружено, что уравнения Пенлеве естественным образом возникают как простейшие нетривиальные случаи изомонодромных деформаций линейных систем на $\mathbb{CP}^1$. Теория изомонодромных деформаций была впоследствии развита в работах Шлезингера [S1912] и Гарнье [G1912], [G1917]. Также было обнаружено, что уравнения Пенлеве допускают неавтономную гамильтонову реализацию [M1922]. В те же годы в работах Бирхгофа [B1911], [B1913] начала изучаться задача Римана-Гильберта для разностных и q -разностных линейных уравнений.

С начала семидесятых годов, уравнения Пенлеве и их решения (другое их название — трансценденты Пенлеве) начинают играть всё более возрастающую роль в математической физике, в особенности в приложениях к классическим и квантовым интегрируемым системам и к теории случайных матриц. К примеру, это включает следующие задачи

- Спин-спиновая корреляционная функция в двухмерной модели Изинга [WMTB76]
- Матрица плотности непроницаемого Бозе-газа [JMMS80]
- KPZ-скейлинг одномерной ASEP-модели на целочисленной решетке [TW09]
- Скейлинговые функции в двухмерных полимерах [FS92], [Z94] (см. также [L11] про обобщение)
- Детерминанты Фредгольма от интегрируемых ядер [TW92], [TW93], см. ссылки в [GIL13]
- Модель синус-Гордона в свободно-фермионной точке [BL94], [SMJ78]
- Матричные модели (см. книгу [F10Book] и ссылки в ней)

Тогда же появились и многие понятия, фундаментальные для теории уравнений Пенлеве. В частности, в работе [JMU81] было введено понятие изомонодромной тау-функции. Эти тау-функции появляются в различных приложениях уравнений Пенлеве, при этом наибольшую важность, по-видимому, представляет их близкая взаимосвязь с квантовой теорией поля, обнаруженная в первых двух статьях серии работ [SMJ78].

Другим фундаментальным понятием, важным для данной диссертации является пространство начальных данных уравнений Пенлеве, введенное К. Окамото в работе [O79]. Это пространство является некоторой компактификацией $\mathbb{C}^2$, такой что через каждую его точку проходит ровно одно решение соответствующего уравнения, симметрии этого пространства совпадают с симметриями исходного уравнения.

Отметим, что этот очерк не претендует на полный обзор развития и приложений теории уравнений Пенлеве, для этого стоит обратиться к обзорам и книгам [CDL], [C99], [FIKN06], а также к иным обзорам, цитируемым ниже.

В то же время стартовало изучение дискретных интегрируемых систем, и эти исследования, в частности, привлекли внимание и к дискретизации уравнений Пенлеве. Систематический подход к дискретным уравнениям Пенлеве начался с работы [GRP91], где было предложен критерий конфайнмента сингулярностей, играющий роль дискретного аналога свойства Пенлеве, потом этот критерий был применен (в работе [RGH91]) для деавтоматизации QRT отображений (см. [QRT88], [QRT89]). По поводу этих результатов и их дальнейшего развития см. обзоры [GR04], [TTGR04]. В те же годы уравнение q -Пенлеве VI было получено в работе [JS96] из q -изомонодромной задачи.

Иной подход к дискретным уравнениям Пенлеве был разработан Х. Сакаи в его известной работе [S01], где был обобщен подход Окамото. В этой работе он классифицировал некоторые рациональные поверхности и сопоставил каждой поверхности определенное дифференциальное, разностное или q -разностное уравнение Пенлеве и, таким образом, построил классификацию дискретных уравнений Пенлеве. В этом подходе появляется и понятие тау-функции для дискретного уравнения Пенлеве [T06]. Вообще этот подход оказался очень мощным, см. недавний обзор [KNY15].

В известной работе Гамаюна, Иоргова и Лисового [GIL12] была найдена связь между уравнениями Пенлеве (и, более общо, изомонодромными задачами на $\mathbb{CP}^1$) и конформной теорией поля. Именно, они предложили формулу для общего (двухпараметрического) решения уравнения Пенлеве VI: тау-функция этого уравнения равна ряду Фурье от четырехточечных конформных блоков конформной теории поля с симметрией, описываемой алгеброй Вирасоро с центральным зарядом $c = 1$.

Этот результат придал новый импульс изучению уравнений Пенлеве и, в особенности, их решений. В итоге был получен целый ряд новых результатов (включая результаты диссертации)

- Предложенная изначально формула была доказана с использованием ряда разнообразных подходов [ILT14], [BS14] (см. также [BS16b]), [GL16], [NTalk].
- Исходная гипотеза была расширена (и доказана) на случаи уравнений Пенлеве V и III_{1,2,3} [GIL13], системы Гарнье [ILT14], изомонодромные задачи высшего ранга [G15], общие фуксовы системы [GIL18], [GIL18FST], изомонодромные задачи на торе [BMGT19], [BMGT19W].
- Было изучено разложение тау-функции в окрестностях иррегулярных особенностей [ItsLTy14], [N15], [BLMST16], [N18].
- Были получены и изучены различные представления тау-функции в виде детерминанта Фредгольма [GL16], [GL17], [CGL17], [GIL18FST].
- Была изучена связь между разложениями тау-функции в разных точках для разных уравнений Пенлеве [ILTy13], [ItsLTy14], [ItsLP16], полученные результаты были применены для построения кроссинг-инвариантной корреляционной функции в $c = 1$ конформной теории поля [GS18].
- Была предложена и доказана q -деформация исходной формулы [BS16q], [JNS17], [BGM18], [MN18], [BS18].

- Было построено соответствие между деавтономизированными интегрируемыми системами Гончарова-Кеньона и классификацией Сакаи q -деформированных уравнений Пенлеве, используя кластерную природу этих интегрируемых систем [BGM17]. Также в этой статье в рамках кластерного подхода было построена квантовая версия изомонодромной тау-функции.
- Исходная формула и её q -деформированная версия в случае резонансного значения параметров была проинтерпретирована в терминах матричных моделей [MM17], [MM17q], [MMZ19]
- Был введен и изучен $c = -2$ аналог тау-функции Пенлеве [BS18]
- Тау-функции уравнений Пенлеве оказались связанными с двойственностью между топологическими струнами и спектральной теорией [BGT16], [BGT17]. В этих статьях, в частности, рассматриваемая формула для тау-функции использовалась для доказательства некоторой предельной версии этой дуальности.
- Развивая идеи работ [BE11], [EM08], в работе [I19] была построена двухпараметрическая тау-функция уравнения Пенлеве I в виде ряда Фурье от статсуммы топологической рекурсии для семейства эллиптических кривых. Это можно рассматривать как некоторый аналог обсуждаемой здесь формулы.

1.2 Уравнения Пенлеве и их решения

1.2.1 Иерархия уравнений Пенлеве

Старшее в иерархии уравнений Пенлеве, уравнение Пенлеве VI имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dz^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w-1} + \frac{1}{w-z} \right) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{w-z} \right) \frac{dw}{dz} + \\ & + \frac{2w(w-1)(w-z)}{z^2(z-1)^2} \left(\left(\theta_\infty - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\theta_0^2 z}{w^2} + \frac{\theta_1^2 (z-1)}{(w-1)^2} - \frac{(\theta_z^2 - \frac{1}{4}) z(z-1)}{(w-z)^2} \right), \end{aligned}$$

где $\theta_0, \theta_z, \theta_1, \theta_\infty$ — параметры уравнения. Все остальные уравнения Пенлеве могут быть получены из Пенлеве VI с помощью последовательности слияний, изображенной на Рис. 1, где стрелки соответствуют определенным пределам, при этом каждый предельный пе-

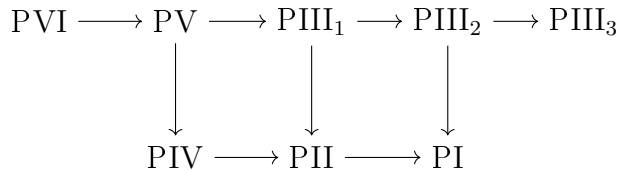


Рис. 1: Диаграмма слияний для уравнений Пенлеве

реход понижает число параметров на 1. Нашей целью является изучение общих решений этих уравнений. В диссертации изучается уравнение Пенлеве VI, как старшее уравнение иерархии, из решений которого вырождением можно получить решения уравнений вдоль

первой строки диаграммы. В диссертации также изучается уравнение Пенлеве III_3 — конечная точка для таких вырождений, поскольку оно более удобно для иллюстрации наших подходов.

Уравнение Пенлеве III'_3 имеет вид

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{1}{w} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dw}{dz} + \frac{2w^2}{z^2} - \frac{2}{z}, \quad (1.1)$$

где штрих в обозначениях значит некоторую простую замену переменных. Уравнение Пенлеве III'_3 получается из уравнения Пенлеве VI пределом $R \rightarrow 0$, при этом необходимо сделать дополнительное перемасштабирование

$$w \mapsto R^2 w, \quad z \mapsto R^4 z, \quad \theta_{z,1} \mapsto \frac{1}{2} R^{-2}, \quad \theta_{0,\infty} \mapsto -\frac{1}{2} R^{-2}. \quad (1.2)$$

Это уравнение может быть записано как система двух билинейных уравнений типа Тоды на две тау-функции [BS16b]

$$\tau(z) \frac{d^2}{d \log z^2} \tau(z) - \left(\frac{d}{d \log z} \tau(z) \right)^2 = -z^{1/2} \tau_1(z) \tau(z), \quad (1.3)$$

$$\tau_1(z) \frac{d^2}{d \log z^2} \tau_1(z) - \left(\frac{d}{d \log z} \tau_1(z) \right)^2 = -z^{1/2} \tau(z) \tau_1(z), \quad (1.4)$$

которая имеет очевидную симметрию (преобразование Бэклунда) $\pi : \tau \leftrightarrow \tau_1$. Функция $w(z)$ получается как $z^{\frac{1}{2}} \frac{\tau(z)^2}{\tau_1(z)^2}$, преобразование Бэклунда действует на w как $w \mapsto z/w$. Неподвижная точка этого преобразования $\pm \sqrt{z}$ является единственным алгебраическим решением уравнения Пенлеве III'_3 [OKSO06], [Gr84], соответствующие тау-функции равны $z^{1/16} e^{\mp 4\sqrt{z}}$.

Как было упомянуто ранее, существует естественная геометрическая конструкция, которая связывает уравнения Пенлеве и пространства начальных данных [O79]. Это пространство является некоторым раздутием $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ в 8 точках (или, эквивалентно $\mathbb{P}^2$ в 9 точках), которое может быть охарактеризовано аффинной системой корней R . Более точно, каждое уравнение Пенлеве соответствует двум ортогональным аффинным корневым подрешеткам в аффинной корневой решетке $E_8^{(1)}$. Одна из них, R соответствует пространству начальных данных, а вторая — $R^\perp$ — характеризует симметрии этого пространства, так же как и симметрии соответствующего уравнения Пенлеве. Эти симметрия дается расширенной аффинной группой Вейля $\widetilde{W}(R^\perp)$. К примеру, уравнение Пенлеве VI соответствует подрешеткам $R^\perp/R = D_4^{(1)}/D_4^{(1)}$, а уравнение Пенлеве III'_3 — $A_0^{(1)}/D_8^{(1)}$.

В работе Сакаи [S01] этот подход был существенно обобщен и покрыл также случаи дискретных уравнений Пенлеве: разностных и q -разностных. Более точно, он классифицировал все поверхности $\mathbb{P}^2$, раздутые в 9 точках с точностью до автоморфизмов. Из этих поверхностей можно составить схему вырождения Сакаи (см. Рис. 2, где указаны только метки типа поверхности). Пространства начальных данных непрерывных уравнений Пенлеве вложены в эту классификацию как поверхности типов D и E (ср. Рис. 1). В подходе Сакаи поверхности типа A в строке, начинающейся от $A_0^{(1)*}$ до $A_8^{(1)}$, так же как и $A_7^{(1)'}$ соответствуют q -разностным уравнениям Пенлеве следующим образом. Соответствующая расширенная аффинная группа Вейля $W(R^\perp)$ содержит подгруппу свободных трансляций. Некоторый дискретный поток в этой подгруппе соответствует некоторому уравнению

q -Пенлеве. Отметим, что здесь имеются две разных поверхности, соответствующие одной и той же аффинной системе корней $A_7^{(1)}$, они различаются при помощи штриха. Отметим ещё, что вертикальные стрелки из поверхностей, соответствующих q -деформированным уравнениям в поверхности, соответствующие непрерывным, соответствуют непрерывному пределу.

Кроме непрерывных и q -разностных уравнений, классификация Сакаи также содержит эллиптические и разностные уравнения, одной и той же поверхности может соответствовать несколько уравнений (поскольку в подгруппе свободных трансляций может быть несколько несопряженных потоков). Больше деталей можно найти в оригинальной работе [S01] и в последующей работе [KNY15].

С этого момента мы будем обозначать уравнения Пенлеве, используя тип соответствующей поверхности, например, Пенлеве III'_3 — это $D_8^{(1)}$.

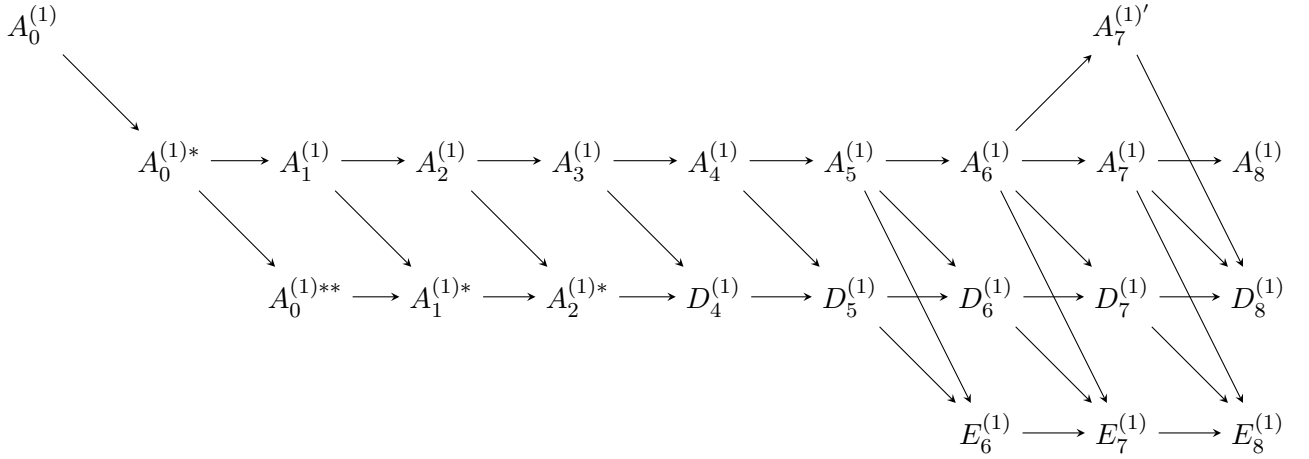


Рис. 2: Классификация Сакаи дискретных уравнений Пенлеве: поверхностный тип.

В диссертации мы сосредотачиваемся на двух q -деформациях дифференциального уравнения Пенлеве $D_8^{(1)}$, а именно на уравнении Пенлеве $A_7^{(1)'}$ и уравнении Пенлеве $A_7^{(1)}$. Уравнение Пенлеве $A_7^{(1)'}$ имеет вид

$$G(qz)G(q^{-1}z) = \frac{(G(z) - z)^2}{(G(z) - 1)^2}, \quad (1.5)$$

а уравнение Пенлеве $A_7^{(1)}$

$$G(qz)G(q^{-1}z) = \frac{1 - G(z)}{z^2 G(z)^2}, \quad (1.6)$$

где G — это прямой аналог w .

Они также могут быть записаны в виде билинейных уравнений типа Тоды. В этой форме Пенлеве $A_7^{(1)'}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tau(qz)\tau(q^{-1}z) &= \tau^2 - z^{1/2}\tau_1^2 \\ \tau_1(qz)\tau_1(q^{-1}z) &= \tau_1^2 - z^{1/2}\tau^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

а Пенлеве $A_7^{(1)}$ может быть записано одним уравнением

$$\tau(q^2z)\tau(q^{-2}z) = \tau^2 - z^{1/2}\tau(qz)\tau(q^{-1}z). \quad (1.8)$$

Также изучаются некоторые вопросы, связанные с уравнением Пенлеве $A_3^{(1)}$, которое является q -деформацией дифференциального уравнения Пенлеве VI $D_4^{(1)}$, см. Раздел 6.2 основного текста.

1.2.2 Тау-функция Пенлеве как ряд Фурье

В известной работе [GIL12] Гамаюн, Иоргов и Лисовой предложили формулу (также неформально известную как "Киевская формула") для общего решения уравнения Пенлеве VI в терминах четырехточечных конформных блоков $c = 1$ алгебры Вирасоро. Последние являются специальными функциями, возникающими в контексте конформной теории поля и имеющими явное теоретико-представленное определение (см. Разд. 2 основного текста). Их гипотеза звучит следующим образом

Теорема 1.1. *Тау-функция общего положения уравнения Пенлеве VI равна ряду Фурье от четырехточечных конформных блоков $c = 1$ алгебры Вирасоро $\mathcal{F}(\{\theta_\kappa^2\}; \sigma^2|z)$, $\{\theta_\kappa\} = \{\theta_0, \theta_z, \theta_1, \theta_\infty\}$*

$$\tau(\{\theta_\kappa\}; \sigma, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n \mathcal{C}_{VI}(\{\theta_\kappa\}; \sigma + n) \mathcal{F}(\{\theta_\kappa^2\}; (\sigma + n)^2|z), \quad (1.9)$$

где параметры $\sigma, s \neq 0$ играют роль констант интегрирования уравнения Пенлеве VI, а $\mathcal{C}_{VI}(\{\theta_\kappa\}; \sigma)$ — некоторая простая функция (см. (3.2)).

Эта теорема была доказана в работах [ILT14], [BS14] (см. также [BS16b]), [GL16], используя различные подходы. В этой диссертации доказательство из [BS14], [BS16b] представлено в Разделе 3. Слова "общего положения" означают, что комплексная размерность отброшенных решений равна 1.

Формула (1.9) обобщает асимптотическое поведение тау-функции уравнения Пенлеве VI, которое было найдено в работе [J82]. Аналогичная формула, соответствующая специальному случаю $\sigma = 1/4$, была написана в [NO03], но, к сожалению, связь с уравнениями Пенлеве оказалась упущенной.

Способ строить тау-функции уравнений Пенлеве (или, более общо, изомонодромных задач) в виде ряда Фурье от некоторой "статсуммы" $\mathcal{Z}$ (включая различные конформные блоки)

$$\tau(\sigma, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^n \mathcal{Z}(\sigma + n|z) \quad (1.10)$$

оказался очень эффективным. Следом за работой [GIL12] появилось множество вырождений и обобщений для различных дифференциальных и q -разностных изомонодромных задач. Иногда эту связь между изомонодромными задачами и конформной теорией поля еще называют соответствием между уравнениями Пенлеве и калибровочными теориями. Такое название появилось в связи с тем, что конформные блоки равны инстантонным статсуммам суперсимметричных калибровочных теорий по АГТ соответствию ([AGT09], [AY09] и дальнейшее их развитие). С этой точки зрения, такая тау-функция называется двойственной статсуммой, в такой форме она появляется в [NO03].

Эти разработки уже были перечислены в Историческом очерке, теперь мы опишем детальнее ту их часть, которая представлена в диссертации

- В работе [GIL13] решение (1.9) было вырождено вдоль первой строчки диаграммы слияний Рис. 1. Тау-функции для этих уравнений Пенлеве даются рядами Фурье

некоторых пределов от четырехточечного конформного блока $c = 1$ алгебры Вирасоро. Например, для уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), тау-функция дается рядом Фурье (1.10) от конформных блоков, которые получаются так называемым иррегулярным (или Уиттекеровским) пределом: $\mathcal{Z}(\sigma|z) = C_{III_3}(\sigma)\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ (см. Теорему 1.4 ниже). Эти блоки кроме z зависят только от старшего веса σ^2 промежуточного модуля Верма. Эта формула сама по себе была доказана в [BS14] и [BS16b]. Детали см. в Разд. 3.

- В работе [BS16q] была построена q -деформация формулы для тау-функции уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), была выдвинута гипотеза, что эта q -деформация дает общее решение уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$. Схожая формула для решения уравнения Пенлеве $A_7^{(1)}$ была предложена в [BGM18]. Тау-функции для этих q -Пенлеве даются рядами Фурье (1.10) иррегулярных пределов конформных блоков алгебры q -Вирасоро с $c = 1$. В случае $A_7^{(1)'}$ эти конформные блоки равны пятимерным суперсимметричным $SU(2)$ статсуммам без полей материи по АГТ соответствию [AY09]. Случай $A_7^{(1)}$ отличается от $A_7^{(1)'}$ дополнительным членом Черн-Саймонса в статсумме. Эти формулы были доказаны в [BS18], [MN18], используя различные подходы. Детали см. в Разд. 5, 6.

Формула для решения уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$ (но не для тау-функции), которое является q -деформацией Пенлеве VI ($D_4^{(1)}$) была предложена и доказана в работе [JNS17], используя q -деформацию подхода [ILT14].

- Соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля говорит, что изомонодромная тау-функция дается рядом Фурье от конформных блоков $c = 1$ алгебры Вирасоро [ILT14]. Отказ от этого условия на центральные заряды ведет к квантовой тау-функции и соответствующему квантованию пространства монодромийных параметров (они перестают коммутировать) [BGM17]. Тем не менее, есть основания считать, что существуют обобщения соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля для случаев центрального заряда алгебры Вирасоро, равного $c = 1 - 6\frac{(n-1)^2}{n}$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. (это центральный заряд для "минимальных моделей" $M(1, n)$). Например, следуя подходу [ILT14], для таких центральных зарядов мы получаем коммутативность операторнозначных монодромий, поэтому возможно построить решение некоторой изомонодромной задачи, используя конформные блоки с такими центральными зарядами. Другие основания см. в Разд. 6.

В работе [BS18] изучались тау-функции, равные ряду Фурье (1.10) от иррегулярных конформных блоков $c = -2$ алгебры Вирасоро, это самый первый случай для такого обобщения. Они естественны с различных точек зрения. Именно, $c = 1$ тау-функция разлагается в произведение двух таких тау-функций. Аналогичное разложение получается с точки зрения ABJM теории ([BGT17]). Эти $c = -2$ тау-функции оказываются равными $c = 1$ тау-функциям для специального случая уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$. Детали см. в Разд. 6.

1.2.3 Основные результаты

Главные результаты моих диссертационных исследований следующие:

1. Была доказана формула Гамаюна-Иоргова-Лисового для тау-функций уравнений Пенлеве VI, V и $\text{III}'_{1,2,3}$ ([1]=[BS14], [3]=[BS16b], см. Разд. 3).
2. Построена q -деформация соответствия между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля. А именно, в работе [2]=[BS16q] было предложено, а в работе [4]=[BS18] (см. Разд. 5,6) были доказаны формулы для тау-функций уравнений Пенлеве $A_7^{(1)'}$ и $A_7^{(1)}$, эти тау-функции оказались равными рядам Фурье от пятимерной калибровочной суперсимметричной $SU(2)$ статсуммы без полей материи.
3. Соответствие между изомонодромными деформациями и конформной теорией поля было расширено на случай центрального заряда $c = -2$. Был построен аналог формулы Гамаюна-Иоргова-Лисового в случае $c = -2$ и установлена её связь с теорией уравнений Пенлеве ([4]=[BS18], Разд. 6).

Диссертация основана на 4 статьях

1. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT*, [arXiv:1406.3008], Communications in Mathematical Physics 339 (3), (2015), 1021-1061.
2. M. Bershtein, A. Shchechkin, *q -deformed Painlevé tau function and q -deformed conformal blocks*, [arXiv:1608.02566], Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (8), (2017), 085202.
3. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, [arXiv:1608.02568], Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (11), (2017), 115205.
4. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, [arXiv:1811.04050], Letters in Mathematical Physics 109 (11), (2019), 2359-2402

См. также препринт A. Shchechkin, *Blowup relations on $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, [arXiv:2006.08582]

и обзор N. Iorgov, O. Lisovyy, A. Shchechkin, Yu. Tykhyy, *Painlevé functions and conformal blocks*, Constructive Approximation 39 (1), (2014), 255-272.

1.2.4 Методы

Оказывается, что уравнения Пенлеве (это касается и других изомонодромных задач) могут быть записаны в виде некоторых билинейных уравнений на тау-функции. Тогда поиск решения в виде ряда Фурье (1.10) от некоторой "статсуммы" эквивалентен поиску подходящего билинейного соотношения на эти статсуммы

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} D(\mathcal{Z}((\sigma + n)^2|z), \mathcal{Z}((\sigma - n)^2|z)) = 0, \quad (1.11)$$

где D — некоторый билинейный дифференциальный (или q -разностный) оператор.

В этой диссертации используются два источника билинейных соотношений

- Билинейные соотношения на конформные блоки алгебры Вирасоро из теории представлений алгебры Супер Вирасоро. Эти соотношения происходят из вложения двух алгебр Вирасоро в алгебру Супер Вирасоро, расширенную Майорановским фермионом [CPSS90]. Этот подход кратко изложен ниже в обзоре диссертации, см. также Разд. 2, 3. Он оказывается более удобным в дифференциальном случае.
- Другой подход к получению билинейных соотношений приходит из соотношений раздутия на статсуммы Некрасова суперсимметричной калибровочной теории. Этот подход оказывается более удобным в q -деформированном случае, однако, он также подходит и для непрерывного случая. Как было уже упомянуто выше, четырехмерные и пятимерные статсуммы равны по АГТ-соответствию [AGT09], [AY09] конформным блокам алгебры Вирасоро или q -Вирасоро. Соотношения раздутия основаны на соотношении между статсуммой на исходном многообразии и на этом же многообразии, раздутом в одной точке. Такие соотношения были найдены Накаджимой и Ёшиокой в [NY03] для статсумм на $\mathbb{C}^2$, они называются "соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки". В отличие от теоретико-представленческих вопросов, вопросы соответствующей геометрии не изучаются в диссертации, используются лишь только известные результаты и изучаются простые следствия из них. Эти вопросы кратко изложены ниже в обзоре диссертации, больше деталей можно найти в Разделах 4,6.

1.3 Обзор диссертации

Этот Раздел посвящен обзору текста диссертации, а именно, описанию её структуры, а также формулировке основных утверждений. Также мы немного подробнее останавливаемся на ключевых моментах, вникая в некоторые детали.

Разд. 1 — это обзор базовых понятий и фактов про уравнения Пенлеве, необходимых в диссертации, Некоторые важные детали уже рассмотрены в Разделе 1.2.1 выше.

Раздел начинается с разбора того, как уравнение Пенлеве VI появляется в задаче изомонодромной деформации линейной системы с 4 особенностями на $\mathbb{CP}^1$ (Раздел 1.1).

Далее уравнения Пенлеве VI и Пенлеве III($D_8^{(1)}$) описываются как неавтономные гамильтоновы системы, введены тау-формы этих уравнений (Раздел 1.2.1). Также тут кратко обсуждается преобразование Бэклунда и алгебраическое решение для уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$). В Разд. 1.2.2 решения уравнений Пенлеве VI и III($D_8^{(1)}$) параметризованы с помощью их асимптотик, а именно — двумя параметрами σ, s . Используя асимптотическое поведение, выясняется, как преобразование Бэклунда действует на параметры σ, s решения Пенлеве III($D_8^{(1)}$)

Предложение 1.1. (Предл. 1.3 в основном тексте) Преобразование Бэклунда π уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$) дается действием на параметры σ, s по формуле $\pi(\sigma, s) = (1/2 - \sigma, s^{-1})$.

В Разд. 1.2.3 дополнительно построены тау-форма типа Тоды (1.4) для уравнения Пе-

нлеве $\text{III}(D_8^{(1)})$, так же как и тау-форма типа Окамото

$$\begin{aligned} D_{[\log z]}^2(\tau, \tau_1) - \frac{1}{2} \left(z \frac{d}{dz} - \frac{1}{8} \right) (\tau \tau_1) &= 0, \\ D_{[\log z]}^3(\tau, \tau_1) - \frac{1}{2} \left(z \frac{d}{dz} - \frac{1}{8} \right) D_{[\log z]}^1(\tau, \tau_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Более точно, было доказано, что эти тау-формы эквивалентны уравнению Пенлеве $\text{III}(D_8^{(1)})$ (Предл. 1.4, Предл. 1.5).

Раздел 1.3 начинается детальным описанием подхода Сакаи к уравнениям Пенлеве для случая уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (Разд. 1.3.1). Далее, в Разд. 1.3.2 вводятся тау-функции для данного случая (Предл. 1.6), это было сделано в [BS16q] аналогично тому, как это делается для старших уравнений Пенлеве. Тут мы также обсуждаем непрерывный предел к уравнению Пенлеве $\text{III}(D_8^{(1)})$, а также преобразование Бэклунда и алгебраическое решение для Пенлеве $A_7^{(1)'}$. В Разделе 1.3.3 мы очень кратко обсуждаем уравнение Пенлеве $A_7^{(1)}$.

После этого Раздела мы начинаем описывать два наших главных подхода к решению уравнений Пенлеве, которое мы уже упомянули в Разделе 1.2.4. Ниже мы их кратко обсуждаем.

1.3.1 Конформные блоки алгебры Супер Вирасоро

Раздел 2 дает обзор и доказательства различных фактов про модули Верма, вертексные операторы и конформные блоки алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро.

Алгебры Вирасоро и Супер Вирасоро. Обзор начинается с Раздела 2.1, где определяются алгебры Вирасоро и Супер Вирасоро и их модули Верма, а также свободно-полевое представление для алгебры Супер Вирасоро.

Алгебра Вирасоро определяется разложением операторного произведения вида

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{reg} \quad (1.13)$$

для тока алгебры Вирасоро $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$.

Алгебра Супер Вирасоро или, иначе, Навье-Шварца-Рамона (NSR) — это $\mathcal{N} = 1$ супер-расширение алгебры Вирасоро нечетным током $G(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+1/2} G_r z^{-r-3/2}$ с операторным разложением

$$G(z)G(w) = \frac{c_{\text{NSR}}}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w} + \text{reg} \quad (1.14)$$

$$L(z)G(w) = \frac{3/2 G(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial G(w)}{z-w} + \text{reg}, \quad (1.15)$$

где $c_{\text{NSR}} = 3/2c$. Здесь полуцелость индексов в G_r означает, что в последних формулах мы рассматриваем так называемый NS-сектор этой алгебры. Далее мы расширяем эту алгебру майорановским фермионом F (из того же сектора) до прямой суммы $F \oplus \text{NSR}$.

Раздел 2.2 начинается вложением $\text{Vir} \oplus \text{Vir} \subset \overline{U}(F \oplus \text{NSR})$ [CPSS90], которое в случае $c_{\text{NSR}} = 1, c^{(1)} = c^{(2)} = 1$ имеет вид

$$T^{(\eta)}(z) = \frac{1}{2}T(z) + \frac{1}{2}T_f(z) + \frac{(-1)^\eta}{2i}f(z)G(z), \quad \eta = 1, 2, \quad (1.16)$$

где $T_f(z) = \frac{1}{2} : f'(z)f(z) :$ — это стандартный фермионный тензор энергии-импульса.

Ниже в этом обзоре все результаты для простоты будут сформулированы только для случая $c_{\text{NSR}} = 1$, $c^{(1)} = c^{(2)} = 1$. Это как раз случай, где данное вложение дает билинейные соотношения на конформные блоки алгебры Вирасоро с $c = 1$, нужные для исследования решений уравнений Пенлеве. Тем не менее, все теоретико-представленческие результаты существуют для произвольного значения c_{NSR} , их можно найти в основном тексте.

Разложение модуля Верма и вектора Уиттекера. Раздел 2.2 продолжается обсуждением разложения модуля Верма в секторе Навье-Шварца и Рамона.

В NS-секторе это разложение имеет вид ([BBFLT11], Предл. 2.1 в основном тексте)

$$\pi_F \otimes \pi_{\text{NSR}}^{2\sigma^2} \cong \bigoplus_{2n \in \mathbb{Z}} \pi_{\text{Vir}}^{(\sigma+n)^2} \otimes \pi_{\text{Vir}}^{(\sigma-n)^2}. \quad (1.17)$$

Здесь имеем в левой части тензорное произведение фермионного модуля Верма π^F , свободно порожденного (имеется в виду относительно универсальной обертывающей алгебры) отрицательными фермионными модами, и модуля Верма алгебры Супер Вирасоро $\pi_{\text{NSR}}^{2\sigma^2}$ со старшим весом $2\sigma^2$ (относительно L_0), свободно порожденного отрицательными модами $T(z)$ and $G(z)$. Это тензорное произведение разлагается в прямую сумму тензорных произведений двух модулей Верма алгебры Вирасоро $\pi_{\text{Vir}}^{(\sigma \pm n)^2}$ со старшими весами $(\sigma \pm n)^2$ (относительно $L_0^{(1,2)}$), свободно порожденных отрицательными модами $T^{(1,2)}(z)$. Разложение модуля Верма для Рамоновского сектора было доказано в [BS16b, Thm. 4.2.]. В этом случае модуль Верма π_F свободно порожден неотрицательными фермионными модами, поэтому в нем имеется два вектора старшего веса, отличающихся действием f_0 . Аналогично, модуль Верма $\pi_{\text{NSR}}^{2\sigma^2 + \frac{1}{16}}$ свободно порожден отрицательными модами алгебры NSR, а также G_0 , поэтому в нем имеется два вектора старшего веса $2\sigma^2 + \frac{1}{16}$, отличающихся действием G_0 . Модуль $\pi_F \otimes \pi_{\text{NSR}}^{2\sigma^2 + \frac{1}{16}}$ может быть разложен в четную и нечетную часть, используя оператор четности. Разложение в случае $c_{\text{NSR}} = 1$ имеет вид

Теорема 1.2. (для случая произвольного c_{NSR} см. Теорему 2.2 из основного текста) Модуль Верма для Рамоновского сектора $c_{\text{NSR}} = 1$ алгебры $F \oplus \text{NSR}$ со старшим весом $2\sigma^2 + \frac{1}{16}$ разлагается в сумму двух изоморфных собственных подпространств, отличающихся четностью (обозначены верхним индексом 0, 1)

$$\pi_{F \oplus \text{NSR}}^{2\sigma^2 + \frac{1}{16}} \cong \pi_{F \oplus \text{NSR}}^{2\sigma^2 + \frac{1}{16}, 0} \oplus \pi_{F \oplus \text{NSR}}^{2\sigma^2 + \frac{1}{16}, 1} \quad (1.18)$$

каждый из них разлагается в сумму

$$\bigoplus_{2n+1/2 \in \mathbb{Z}} \pi_{\text{Vir}}^{(\sigma+n)^2} \otimes \pi_{\text{Vir}}^{(\sigma-n)^2}. \quad (1.19)$$

Далее, в Разделе 2.3 рассматриваются понятия вертексных операторов для алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро, Уиттекеровских векторов и цепочек в модулях Верма этих алгебр, а также соответствующие конформные блоки.

Вектор Уиттекера для алгебры Вирасоро $|W(z)\rangle$ from π_{Vir}^Δ определен как

$$L_0|W(z)\rangle = z \frac{d}{dz}|W(z)\rangle, \quad L_1|W(z)\rangle = z|W(z)\rangle, \quad L_2|W(z)\rangle = 0, \quad (1.20)$$

а вектор Уиттекера для алгебры Супер Вирасоро $|W_{NS}(z)\rangle$ из $\pi_{NSR}^{\Delta NS}$ как

$$L_0|W_{NS}(z)\rangle = z\frac{d}{dz}|W_{NS}(z)\rangle, \quad G_{1/2}|W_{NS}(z)\rangle = z^{1/2}|W_{NS}(z)\rangle, \quad G_{3/2}|W_{NS}(z)\rangle = 0. \quad (1.21)$$

Иррегулярный предел конформных блоков алгебр Вирасоро и Супер Вирасоро равен скалярному произведению соответствующих векторов Уиттекера

$$\mathcal{F}^{NS}(\Delta^{NS}|z) = \langle W_{NS}(1)|W_{NS}(z)\rangle, \quad \mathcal{F}(\Delta|z) = \langle W(1)|W(z)\rangle. \quad (1.22)$$

В Разделе 2.4 описано разложение векторов Уиттекера и цепочек для алгебры Супер Вирасоро в сумму $Vir \oplus Vir$ векторов Уиттекера и цепочек соответственно, которое следует из разложения $\pi_F \otimes \pi_{NSR}^{\Delta NS}$.

Предложение 1.2. *(для случая произвольного c_{NSR} см. Предл. 2.1 в основном тексте) Вектор Уиттекера алгебры Супер Вирасоро разлагается в сумму $Vir \oplus Vir$ векторов Уиттекера*

$$|1 \otimes W_{NS}(z)\rangle = \sum_{2n \in \mathbb{Z}} \left(l_n \left(|W_n^{(1)}(z)\rangle \otimes |W_n^{(2)}(z)\rangle \right) \right), \quad (1.23)$$

с некоторыми, не зависящими от z , коэффициентами разложения l_n

Также здесь рассматривается более общий результат о разложении вертексного оператора алгебры Супер Вирасоро в произведение двух вертексных операторов алгебры Вирасоро (Теорема 2.3 в основном тексте).

В конце, в Разделе 2.5 мы вычисляем коэффициенты l_n . Ответ следующий

Теорема 1.3. *(см. более общую Теорему 2.4 в основном тексте) Коэффициенты l_n равны*

$$l_n^2(\sigma) = (-1)^{2n} \frac{2^{4\sigma^2}}{\prod_{k=1}^{2|n|-1} (k^2 - 4\sigma^2)^{2(2|n|-k)} (4\sigma^2)^{2|n|}} \quad (1.24)$$

Теорема 2.4 дает гораздо более общий ответ для коэффициентов разложения вышеупомянутого разложения вертексных операторов, это важный технический результат.

Доказательство билинейных соотношений. В Разделе 3 представлен теоретико-представленческий подход к решению уравнения Пенлеве $III(D_8^{(1)})$ и более общего уравнения Пенлеве $VI(D_4^{(1)})$. Используя этот подход, мы доказываем Теорему 1.1, и одновременно формулы для тау-функций Пенлеве V и $III'_{1,2,3}$, которые могут быть получены предельной процедурой, упоминаемой раньше. Несмотря на это, мы начинаем с доказательства формулы для тау-функции Пенлеве $III(D_8^{(1)})$, являющегося более иллюстративным. Аналог Теоремы 1.1 в этом случае имеет вид

Теорема 1.4. *(Теорема 3.1. в основном тексте) Тау-функция Пенлеве $III(D_8^{(1)})$ общего положения равна ряду Фурье от иррегулярных $s = 1$ конформных блоков алгебры Вирасоро $\mathcal{F}(\sigma^2|z) = \mathcal{F}_{c=1}(\sigma^2|z)$, определенных формулой (1.22)*

$$\tau(\sigma, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{III'_3}(\sigma + n) s^n \mathcal{F}((\sigma + n)^2|z), \quad \text{Re } \sigma \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}\mathbb{Z} \right\}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (1.25)$$

где коэффициенты $\mathcal{C}(\sigma)$ выражаются через $\mathbf{G}$ -функцию Барнса

$$\mathcal{C}_{III_3}(\sigma) = \frac{1}{\mathbf{G}(1-2\sigma)\mathbf{G}(1+2\sigma)}, \quad (1.26)$$

Параметры s и σ играют роль констант интегрирования уравнения Пенлеве $III(D_8^{(1)})$.

Сначала идет Раздел 3.1, в котором даны соответствующие формулировки.

В Разделе 3.2 доказана формула (1.25). Мы начинаем с простого случая алгебраической тау-функции $z^{1/16}e^{\mp 4\sqrt{z}}$, соответствующей случаю $\sigma = 1/4$, $s = \pm 1$ (согласно Предл. 1.1), используя разложения фоковского модуля нечетного бозона. Далее мы доказываем, что предполагаемая тау-функция (1.25) удовлетворяет уравнению типа Тоды (1.4) так же как и билинейной тау-форме порядка 4, используя $\mathbf{F} \oplus \mathbf{NSR}$ -сектор алгебры $\mathbf{F} \oplus \mathbf{NSR}$, т.е. мы доказали Теорему 0.4. Наконец, из Рамоновского сектора алгебры $\mathbf{F} \oplus \mathbf{NSR}$ мы показываем, что предполагаемая тау-функция удовлетворяет уравнениям типа Окамото — другой тау-форме Пенлеве $III(D_8^{(1)})$.

Основная идея состоит в вычислении матричного элемента

$$\langle 1 \otimes W_{\mathbf{NS}}(1) | \left(\sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} f_{-r} G_r \right)^k | 1 \otimes W_{\mathbf{NS}}(z) \rangle = i^k \langle W_n^{(1)}(1) \rangle \otimes | W_n^{(2)}(1) | (L_0^{(1)} - L_0^{(2)})^k | W_n^{(1)}(z) \rangle \otimes | W_n^{(2)}(z) \rangle \quad (1.27)$$

с двух точек зрения: в терминах $\mathbf{Vir} \oplus \mathbf{Vir}$ или $\mathbf{F} \oplus \mathbf{NSR}$.

Со стороны $\mathbf{Vir} \oplus \mathbf{Vir}$ вычисление дает

$$\langle W_n^{(1)}(1) \rangle \otimes | W_n^{(2)}(1) | (L_0^{(1)} - L_0^{(2)})^k | W_n^{(1)}(z) \rangle \otimes | W_n^{(2)}(z) \rangle = \sum_{2n \in \mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D_{[\log z]}^k (\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)), \quad (1.28)$$

где производная Хироты $D_{[\log z]}^k$ дается формулой

$$f(e^\alpha z)g(e^{-\alpha} z) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{[\log z]}^k (f(z), g(z)) \frac{\alpha^k}{k!}. \quad (1.29)$$

С другой стороны, вычисление в терминах $\mathbf{F} \oplus \mathbf{NSR}$ дает ($k = 0$)

$$\mathcal{F}_{\mathbf{NS}} = \sum_{2n \in \mathbb{Z}} l_n^2 \cdot \mathcal{F}((\sigma+n)^2|z) \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z) \quad (1.30)$$

и для $k = 2$ получаются следующие нетривиальные соотношения

$$-z^{1/2} \mathcal{F}_{\mathbf{NS}} = \sum_{2n \in \mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D_{[\log z]}^2 (\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)). \quad (1.31)$$

Исключая $\mathcal{F}_{\mathbf{NS}}$ из этих двух соотношений, получаем билинейные соотношения

$$\sum_{2n \in \mathbb{Z}} l_n^2 \cdot D_{[\log z]}^k (\mathcal{F}((\sigma+n)^2|z), \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z)) = -z^{1/2} \sum_{2n \in \mathbb{Z}} l_n^2 \cdot \mathcal{F}((\sigma+n)^2|z) \mathcal{F}((\sigma-n)^2|z). \quad (1.32)$$

И это билинейное соотношение как раз достаточно для доказательства Теоремы 1.4 (после сравнения коэффициентов l_n с теми, которые приходят из функции $\mathcal{C}_{III_3}$) т.е. доказательства, что тау-функция (1.25) удовлетворяет тау-форме типа Тоды (1.4) уравнения Пенлеве $III(D_8^{(1)})$.

В Разделе 3.3 аналогично доказана формула для тау-функции уравнения Пенлеве $VI(D_4^{(1)})$ (Теорема 1.1).

1.3.2 Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки и $c = -2$ тау-функции

В Разделе 4 мы делаем обзор и доказываем различные факты про статсуммы Некрасова и уравнения раздутия.

Статсуммы Некрасова. В Разделе 4.1 дается обзор формул и свойств для инстантонной, классической и однопетлевой части пятимерной суперсимметричной $SU(2)$ статсуммы без материй, доказана сходимости инстантонной части статсуммы в случае $-\epsilon_1/\epsilon_2 \in \mathbb{Q} > 0$. Далее изучается четырехмерный предел этой статсуммы.

Хорошо известно, что суперсимметричная $U(r)$ калибровочная теория Янга-Миллса на $\mathbb{C}^2$ (мы будем рассматривать случай без полей материи) допускает специальные решения, называемые инстантонами, их тип характеризуется так называемым инстантонным числом $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, которое пробегает от 0 (нет инстантона) до $+\infty$. Обозначим $M(r, n)$ компактификацию (Гизекера) пространства модулей инстантонов с инстантонным числом n . Инстантонная статсумма Некрасова для данной теории определена как эквивариантный объем пространств $M(r, n)$

$$\mathcal{Z}_{inst}(\epsilon_1, \epsilon_2, \{a_i\}; z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_{M(r, n)} 1, \quad (1.33)$$

где $a_i, i = 1, r$ — это координаты на алгебре Ли тора $(\mathbb{C}^*)^r \subset U(r)$, а ϵ_1, ϵ_2 — это координаты на алгебре Ли тора $(\mathbb{C}^*)^2$. Пространство $M(r, n)$ имеет ADHM-описание [ADHM78], в котором эти два тора действуют просто матричными умножениями. С точки зрения физики, a_i — это вакуумные средние, а ϵ_1, ϵ_2 — так называемые параметры Ω -деформации.

Этот интеграл локализуется на точки $M(r, n)$, неподвижные относительно действия вышеупомянутого $r + 2$ -мерного тора. Эти неподвижные точки помечаются наборами из r диаграмм Юнга $(\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)})$, $n = \sum_{i=1}^r |\lambda^{(i)}|$. Для случая $SU(2)$ такое вычисление дает (в этом случае $a_1 + a_2 = 0$, мы обозначаем $a = a_1 - a_2$)

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{inst}(a_1, a_2; \epsilon_1, \epsilon_2 | z) &= \sum_{\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}} \frac{z^{|\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}|}}{\prod_{i,j=1}^2 \mathbf{N}_{\lambda^{(i)}, \lambda^{(j)}}(a_i - a_j; \epsilon_1, \epsilon_2)}, \\ \mathbf{N}_{\lambda, \mu}(a; \epsilon_1, \epsilon_2) &= \\ &= \prod_{s \in \lambda} (a - \epsilon_2(a_\mu(s) + 1) + \epsilon_1 l_\lambda(s)) \prod_{s \in \mu} (a + \epsilon_2 a_\lambda(s) - \epsilon_1(l_\mu(s) + 1)), \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $a_\lambda(s), l_\lambda(s)$ — длины рук и ног для клетки s в диаграмме Юнга λ . Как уже упоминалось ранее, согласно АГТ-соответствию [AGT09], эта статсумма Некрасова равна иррегулярному пределу четырехточечного конформного блока алгебры Вирасоро $\mathcal{F}(\Delta | z)$ (нормированного на $1 + O(z)$) с центральным зарядом и старшим весом равными

$$c = 1 + 6 \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}{\epsilon_1 \epsilon_2}, \quad \Delta = \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 - a^2}{4\epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (1.35)$$

Случай $c = 1$ соответствует $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$, в этом случае мы используем параметризацию $\Delta = \sigma^2$. Вместо инстантонной статсуммы $\mathcal{Z}_{inst}$ можно рассмотреть полную статсумму $\mathcal{Z}$ суперсимметричной $U(r)$ -калибровочной теории Янга-Миллса без полей материи, которая дополнительно содержит множители, называемые классической и однопетлевой частью.

Они даются некоторыми простыми функциями — аналогами префактора z^{σ^2} конформного блока $\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ и функции $\mathcal{C}$ из (1.25) соответственно. Таким образом, эта полная статсумма $\mathcal{Z}$ равна функции $\mathcal{C}(\sigma)\mathcal{F}(\sigma^2|z)$ на стороне конформной теории поля. И (1.25) — это ряд Фурье (1.10) от этих полных статсумм $\mathcal{Z}$.

Для построения тау-функций уравнений q -Пенлеве, нужны q -аналоги этих статсумм $\mathcal{Z}(u; q_1, q_2|z)$, и это статсумма на $\mathbb{C}^2$, расширенном пятым компактным измерением радиуса $R = -\log q$, более точно, на некотором факторе $(\mathbb{C}^2 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$. Тут $q_i = e^{R\epsilon_i}$, $u_i = e^{R\epsilon_i}$, $u = u_1/u_2$, $u_1 u_2 = 1$. Формулы для инстантонных статсумм в пятимерном случае отличаются от четырехмерного, грубо говоря, q -деформацией всех множителей $(\dots) \mapsto 1 - q^{\dots}$.

Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки и их двойственная формулировка. Раздел 4.2 дает обзор соотношений на введенные выше статсуммы, известных как соотношения раздутия, начиная с наиболее обычного, изначально полученного Х. Накаджимой и К. Ёшиокой.

Это соотношения на четырехмерную и пятимерную статсумму [NY03], [NY05] (дальнейшее развитие в [GNY06] и [NY09]). Они выражают инстантонную статсумму на $\widehat{\mathbb{C}^2} = (\mathbb{C}^2 \text{ раздута в точке})$ в виде билинейного выражения на инстантонные статсуммы на $\mathbb{C}^2$

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathbb{C}^2}}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a + 2\epsilon_1 n; \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|z) \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a + 2\epsilon_2 n; \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2|z). \quad (1.36)$$

С другой стороны, статсумма на $\widehat{\mathbb{C}^2}$ равна

$$\mathcal{Z}_{\widehat{\mathbb{C}^2}}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z). \quad (1.37)$$

Исключая статсумму на $\widehat{\mathbb{C}^2}$, получаем соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки

$$\mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a; \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a + 2\epsilon_1 n; \epsilon_1, \epsilon_2 - \epsilon_1|z) \mathcal{Z}_{\mathbb{C}^2}(a + 2\epsilon_2 n; \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2|z). \quad (1.38)$$

Существуют также дифференциальные (для четырехмерного случая) и q -разностные (для пятимерного) соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки.

Однако, билинейные соотношения на $c = 1$ конформные блоки, которые мы изучали ранее, соответствуют другим уравнениям раздутия, а именно уравнениям раздутия на пространстве $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (такие соотношения в четырехмерном случае изучались в работах $\mathbb{C}^2$ [BMT11I], [BPSS13], [O18])

$$\tilde{\beta}_j^D \mathcal{Z}_{X_2}(a, \epsilon_1, \epsilon_2|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} D\left(\mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_1; 2\epsilon_1, -\epsilon_1 + \epsilon_2|z), \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_2; \epsilon_1 - \epsilon_2, 2\epsilon_2|z)\right), \quad j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad (1.39)$$

где X_2 — это минимальное разрешение $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, D — некоторый дифференциальный оператор, $\tilde{\beta}_j^D$ — некоторый простой коэффициент. Исключая $\mathcal{Z}_{X_2}$ из двух соотношений такого типа, получаем билинейные соотношения на $\mathcal{Z}$, которые в случае $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ становятся билинейными соотношениями на $c = 1$ конформные блоки, которые изучались ранее. Ища тау-функцию (1.10), удовлетворяющую (1.7), мы можем использовать пятимерные аналоги этих соотношений.

В Разделах 4.2.2, 4.2.3 мы получаем соотношения раздутья на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ из соотношений раздутья Накаджимы-Ёшиоки (см. также [S20]). Наиболее важное доказанное соотношение (формула (4.60) в основном тексте)

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1}|q_1^2z) \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2^2|q_2^2z) \\ &= (1 - (q_1q_2)^{1/2}z^{1/2}) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1^2, q_2q_1^{-1}|z) \mathcal{Z}(uq_1^{2n}; q_1q_2^{-1}, q_2^2|z) \end{aligned} \quad (1.40)$$

В Разделе 4.2.4 мы доказываем соотношения между статсуммами $\mathcal{Z}^{[2]}$ и $\mathcal{Z}^{[0]}$ которые различаются уровнем дополнительной теории Черн-Саймонса, используя соотношения раздутья Накаджимы-Ёшиоки на такие статсуммы.

Предложение 1.3. (Предл. 4.4 в основном тексте) Статсумма Некрасова $\mathcal{Z}^{[2]}$ равна $\mathcal{Z}^{[0]}$ с точностью до двойного символа q -Похгаммера

$$\mathcal{Z}^{[2]}(u; q_1, q_2|z) = (z; q_1, q_2)_\infty \mathcal{Z}_{inst}^{[0]}(u; q_1, q_2|z). \quad (1.41)$$

Таким же образом мы доказываем инвариантность $\mathcal{Z}^{[1]}(u; q_1, q_2|z)$ при $q_1, q_2 \mapsto q_1^{-1}, q_2^{-1}$ (Предл. 4.5 в основном тексте).

От соотношений раздутья Накаджимы-Ёшиоки к уравнению Пенлеве $A_7^{(1)'}$. В коротком Разделе 5 мы доказываем формулу для тау-функции Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (предложенную в [BS16q]) и Пенлеве $A_7^{(1)}$, используя ранее полученные соотношения раздутья для $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ (Раздел 5.1). Например, для Пенлеве $A_7^{(1)'}$ доказанная Теорема формулируется следующим образом.

Теорема 1.5. (Теорема 5.1. в основном тексте) Пусть функции $\tau_j(u, s; q|z)$, $j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ заданы формулой

$$\tau_j(u, s; q|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + j/2} s^n \mathcal{Z}(uq^{2n}; q^{-1}, q|z), \quad (1.42)$$

где $\mathcal{Z}$ — пятимерная суперсимметричная $SU(2)$ статсумма калибровочной теории без материи. Тогда эти функции — это тау-функции уравнения Пенлеве $III(A_7^{(1)'})$ т.е. они удовлетворяют (1.7).

К примеру, доказательство для случая $A_7^{(1)'}$ основано на формуле (1.40). Другое доказательство этой Теоремы, использующее $s = -2$ тау-функции, представлено ниже.

Далее изучена сходимостъ и непрерывный предел этих тау-функций (Раздел 5.2), а также тау-функция алгебраического решения $G(z) = \pm\sqrt{z}$ уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (1.5) (Раздел 5.3). Последняя равна

$$\tau = \tau_1 = z^{1/16}(\pm q^{1/2}z^{1/2}; q^{1/2}, q^{1/2})_\infty. \quad (1.43)$$

Раздел 6 начинается с определения $s = -2$ тау-функции уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ (Раздел 6.1.1).

Возьмем частный случай $\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ соотношений раздутья Накаджимы-Ёшиоки (4-х или пятимерных)

$$\mathcal{Z}(a; \epsilon_1, -\epsilon_1|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_1; \epsilon_1, -2\epsilon_1|z) \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_1; 2\epsilon_1, -\epsilon_1|z). \quad (1.44)$$

Согласно (1.35) статсумма в левой части соответствует центральному заряду $c = 1$, а обе статсуммы в правой соответствуют центральному заряду $c = -2$. Статсуммы в правой части отличаются на некоторую простую функцию, мы различаем соответствующие тау-функции верхним индексом $\pm$.

Тогда естественно составить ряд Фурье слева и справа

$$\tau(\sigma, s|z) = \tau^-(\sigma, s|z)\tau^+(\sigma, s|z) \quad (1.45)$$

где в левой части стандартная $c = 1$ тау-функция (1.10), а в правой — так называемые $c = -2$ тау-функции, определенные по формулам

$$\tau^\pm(a, s|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} s^{n/2} \mathcal{Z}(a + 2n\epsilon_1; \pm\epsilon_1, \mp 2\epsilon_1|z), \quad (1.46)$$

которые являются рядами Фурье (1.10) на $c = -2$ конформные блоки, в отличие от стандартного случая $c = 1$. Соотношение (1.45) можно рассматривать как соотношение раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.38) в двойственной форме.

Раздел 6.1.2 устанавливает связь $c = -2$ тау-функций и уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$ and $A_7^{(1)}$, тут дается иное доказательство формулы для обычной тау-функции этих уравнений (в частности, Теоремы 1.5 для случая $A_7^{(1)'}$).

Кроме соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.38) (или (1.45) в двойственной формулировке), существуют еще q -разностные (в пятимерном случае) соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки, в двойственной формулировке они имеют вид

$$\begin{aligned} \overline{\tau^+ \tau^-} - \tau^+ \overline{\tau^-} &= -2z^{1/4} \tau_1, \\ \overline{\tau^+ \tau^-} + \tau^+ \overline{\tau^-} &= 2\tau, \end{aligned} \quad (1.47)$$

где введены обозначения $\bar{\tau} = \tau(qz)$, $\underline{\tau} = \tau(q^{-1}z)$.

Предложение 1.4. (Предл. 6.1 в основном тексте) Возьмем (1.47) и (1.45). Тогда τ и τ_1 удовлетворяют уравнениям типа Тоды

$$\bar{\tau} \underline{\tau} = \tau^2 - z^{1/2} \tau_1^2. \quad (1.48)$$

Доказательство. Доказательство совершенно элементарно. Мы подставляем τ_1 и τ разными способами

$$\overline{\tau^+ \tau^-} \tau^+ \tau^- = \frac{1}{4} (\overline{\tau^+ \tau^-} + \tau^+ \overline{\tau^-})^2 - \frac{1}{4} (\overline{\tau^+ \tau^-} - \tau^+ \overline{\tau^-})^2 \quad (1.49)$$

□

Соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки являются доказанными, поэтому мы получаем доказательство формулы (1.10) для тау-функции уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$.

В Разделе 6.1.3 находятся $c = -2$ тау-функции, соответствующие алгебраическому решению уравнения Пенлеве $A_7^{(1)'}$.

Свойства $c = -2$ тау-функции. Как уже упоминалось, эти $c = -2$ тау-функции имеют естественный смысл сами по себе. Диссертация продолжается изучением свойств $c = -2$ тау-функций.

В Разделе 6.1.4 разложение $c = 1$ тау-функции в произведение $c = -2$ тау-функций (1.45) связывается с разложением спектрального детерминанта оператора, обратного к гамильтониану релятивистской Тоды. А именно, такая факторизация $c = 1$ тау-функции известна в контексте ABJ-теории [BGT17], где изначально рассматривалась $c = 1$ тау-функция Пенлеве $A_7^{(1)'}$ с точки зрения двойственности между топологическими струнами и спектральной теорией.

Более точно, они нашли, что эта тау-функция в случае $|q| = 1$, $s = 1$ с точностью до некоторого простого множителя равна статсумме Ξ большого канонического ансамбля для ABJ теории. Статсумма Ξ , которая равна детерминанту Фредгольма вышеупомянутого оператора, естественно факторизуется в соответствии с четностью собственных значений этого оператора, как $\Xi = \Xi^+ \Xi^-$.

К тому же, эти множители удовлетворяют так называемым "квантовым Вронскианым" соотношениям, обнаруженным в [GHM14']. Они оказываются эквивалентными (с точностью до некоторых простых множителей) соотношениям раздутия Накаджимы-Ёшиоки (1.47) на функции Ξ^+ and Ξ^- .

Далее (в Разделе 6.1.5) мы рассматриваем непрерывный предел $c = -2$ тау-функций и изучаем уравнения Книжника-Замолодчикова на $c = -2$ тау-функции. В этом четырехмерном случае $c = -2$ тау-функции удовлетворяют

$$z \frac{d}{dz} \tau^\pm = \frac{1}{2} (\zeta \mp i\sqrt{\zeta'}) \tau^\pm, \quad (1.50)$$

где ζ — это гамильтониан уравнения Пенлеве III($D_8^{(1)}$), связанный с $c = 1$ тау-функцией по формуле $z \frac{d}{dz} \tau = \zeta \tau$. "Собственные значения" в (1.50) по-видимому, оказываются гамильтонианами уравнения Пенлеве III($D_6^{(1)}$).

Другое интересное явление, связанное с $c = -2$ тау-функциями, мы вынесли в отдельный Раздел 6.2.

Как уже упоминалось ранее, $c = -2$ тау-функции, соответствующие уравнению Пенлеве $A_7^{(1)'}$, оказываются $c = 1$ тау-функциями для специального случая уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$.

Уравнение q -Пенлеве VI (или $A_3^{(1)}$) — это система из 8 q -разностных уравнений билинейных первого порядка на 8 тау-функций $\tau_1 \dots \tau_8$, зависящая от 4 (кроме q) параметров $\theta_0, \theta_z, \theta_1, \theta_\infty$. В специальном случае, когда $q^{\theta_\kappa} = i$ для всех κ , эта динамика эквивалентна (при подстановке $z \mapsto z^{1/2}$) динамике 4 $c = -2$ тау-функций данной 4-мя q -разностными уравнениями второго порядка ($j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\overline{\tau_j^+} = \frac{\tau_j^+ \tau_j^- - z^{1/4} \tau_{j+1}^+ \tau_{j-1}^-}{\tau_j^-}, \quad \overline{\tau_j^-} = \frac{\tau_j^+ \tau_j^- + z^{1/4} \tau_{j+1}^+ \tau_{j-1}^-}{\tau_j^+}, \quad (1.51)$$

где $\tau_0^\pm(u; q|z) = \tau^\pm(u; q|z)$, $\tau_1^\pm(u; q|z) = s^{1/2} \tau^\pm(uq; q|z)$, $\tau(u; q|z)$ — это пятимерный аналог (1.46). Эти уравнения следуют из (1.47) и из тех же самых соотношений при $u \mapsto uq$, откуда мы исключаем $c = 1$ тау-функции, пользуясь (1.45).

Мы имеем

Предложение 1.5. (Предл. 6.4. из основного текста) Рассмотрим набор $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7, \tau_8) = (\tau_0^+, \tau_0^-, \tau_1^+, \tau_1^-, \tau_0^-, \tau_0^+, \tau_1^-, \tau_1^+)$, где функции $\tau_0^\pm, \tau_1^\pm$ удовлетворяют динамике выше. Этот набор является решением тау-формы уравнения Пенлеве $A_3^{(1)}$ в случае $q^{\theta_0} = q^{\theta_t} = q^{\theta_1} = q^{\theta_\infty} = i$ при подстановке $z \mapsto z^{1/2}$.

В соответствии с формулой для тау-функции уравнения q -Пенлеве VI, которая имеет вид (1.10) где $\mathcal{Z}$ — это q -деформированные четырехточечные конформные блоки [JNS17], мы получаем что соотношение выше должно влечь соотношения на инстантонные стат-суммы Некрасова

$$(-qz^{1/2}; q, q)_\infty^2 \mathcal{Z}_{inst}(i, i, i, iq^{\pm 1/2}, u|z^{1/2}) = \mathcal{Z}_{inst}(u; q^{-1}, q^2|z) \quad (1.52)$$

В Разделе 6.2.2 мы вычисляем непрерывный предел полученного соотношения (1.52), результат, по-видимому, связан с известным фолдингом уравнения Пенлеве $D_6^{(1)}$ в $D_8^{(1)}$ [TOS05].

В Аппендиксе А собраны нужные факты о некоторых q -спецфункциях (Апп. А.1), о кратных гамма-функциях (Апп. А.2), в Апп. А.3 они связываются непрерывным пределом.

Результаты диссертации опубликованы в четырёх статьях:

1. M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Bilinear equations on Painlevé τ functions from CFT*, Communications in Mathematical Physics 339 (3), (2015), 1021-1061.
2. M. Bershtein, A. Shchepochkin, *q -deformed Painlevé tau function and q -deformed conformal blocks*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (8), (2017), 085202.
3. M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) tau function*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 50 (11), (2017), 115205.
4. M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, Letters in Mathematical Physics 109 (11), (2019), 2359-2402

Список литературы

- [AGT09] L. F. Alday, D. Gaiotto, and Y. Tachikawa, *Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories*, Lett. Math. Phys. **91** (2010) 167–197; [arXiv:0906.3219]
- [ADHM78] M. F. Atiyah, V. G. Drinfeld, N. J. Hitchin, and Y. I. Manin, *Construction Of Instantons*, Phys. Lett. **65A** (1978) 185
- [AY09] H. Awata, Y. Yamada, *Five-dimensional AGT Conjecture and the Deformed Virasoro Algebra*, JHEP **1001** (2010), 125; [arXiv:0910.4431].
- [BBFLT11] A. Belavin, M. Bershtein, B. Feigin, A. Litvinov, G. Tarnopolsky, *Instanton moduli spaces and bases in coset conformal field theory*, Comm. Math. Phys. **319** **1**, 269-301 (2013); [arXiv:1111.2803]
- [BL94] D. Bernard, A. LeClair, *Differential equations for sine-Gordon correlation functions at the free fermion point*, Nucl. Phys. **B426**, (1994), 534–558; [arXiv:hep-th/9402144].

- [BGM17] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q -Painlevé equations and their quantization*, JHEP **1802**, (2018), 077; [arXiv:1711.02063].
- [BGM18] M. Bershtein, P. Gavrylenko, A. Marshakov, *Cluster Toda chains and Nekrasov functions*; TMF, **198:2** (2019), 179–214; Theoret. and Math. Phys., **198:2** (2019), 157–188 [arXiv:1804.10145].
- [BS14] M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Bilinear equations on Painlevé tau functions from CFT*, Comm. Math. Phys. **339 (3)**, (2015), 1021–1061; [arXiv:1406.3008].
- [BS16q] M. Bershtein, A. Shchepochkin, *q -deformed Painlevé tau function and q -deformed conformal blocks*, J. Phys. A. **50 (8)** (2017) 085202; [arXiv:1608.02566].
- [BS16b] M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ function*, J. Phys. A. **50 (11)** (2017) 115205; [arXiv:1608.02568].
- [BS18] M. Bershtein, A. Shchepochkin, *Painlevé equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, Lett. Math. Phys. **109 (11)**, (2019), 2359–2402; [arXiv:1811.04050].
- [B1911] G.D.Birkhoff, *General Theory of Linear Difference equations*, Trans. of Am. Math. Soc. 12, no. 2 (Apr. 1911), 243–284.
- [B1913] G.D.Birkhoff, *The generalized Riemann problem for linear differential equations and allied problems for linear difference and q -difference equations*, Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences 49, no.9 (Oct. 1913), 521–568.
- [BGT16] G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, *Seiberg-Witten theory as a Fermi gas*, Lett. Math. Phys. **107**, (2017), 1–30; [arXiv:1603.01174].
- [BGT17] G. Bonelli, A. Grassi, A. Tanzini, *Quantum curves and q -deformed Painlevé equations*, Lett. Math. Phys. (2019); [arXiv:1710.11603].
- [BLMST16] Giulio Bonelli, Oleg Lisovyy, Kazunobu Maruyoshi, Antonio Sciarappa, Alessandro Tanzini, *On Painlevé/gauge theory correspondence*, Letters in Mathematical Physics **107 (12)**, (2017), 2359–2413; [arXiv:1612.06235].
- [BMGT19] G. Bonelli, F. Del Monte, P. Gavrylenko, A. Tanzini, *$\mathcal{N} = 2^*$ gauge theory, free fermions on the torus and Painlevé VI*, [arXiv:1901.10497].
- [BMGT19W] G. Bonelli, F. Del Monte, P. Gavrylenko, A. Tanzini, *Circular quiver gauge theories, isomonodromic deformations and W_N fermions on the torus*, [arXiv:1909.07990].
- [BMT11I] G. Bonelli, K. Maruyoshi, and A. Tanzini, *Instantons on ALE spaces and Super Liouville Conformal Field Theories*, JHEP **1108** (2011) 056; [arXiv:1106.2505].
- [BE11] G. Borot and B. Eynard, *Geometry of Spectral Curves and All Order Dispersive Integrable System*, SIGMA, **8** (2012), 53 pages; [arXiv:1110.4936].
- [BPSS13] U. Bruzzo, M. Pedrini, F. Sala and R. Szabo, *Framed sheaves on root stacks and supersymmetric gauge theories on ALE spaces*, Adv. Math. **288** (2016), 1175–1308; [arXiv:1312.5554].

- [CGL17] M. Cafasso, P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Tau functions as Widom constants*, Comm. Math. Phys. **365**, (2019), 741–772; [[arXiv:1712.08546](#)].
- [CDL] P. A. Clarkson, *Painlevé transcendents*, Digital Library of Special Functions, Chapter 32, [<http://dlmf.nist.gov/32>].
- [C99] *The Painlevé Property: One Century Later*. ed. by R. Conte (New York: Springer, 1999).
- [CPSS90] C. Crnkovic, R. Paunov, G. Sotkov, and M. Stanishkov, *Fusions of conformal models*, Nucl.Phys. **B336** (1990) 637.
- [EM08] B. Eynard and M. Mariño, *A holomorphic and background independent partition function for matrix models and topological strings*, J. Geom. Phys. **61** (2011), 1181–1202; [[arXiv:0810.4273](#)].
- [FS92] P. Fendley, H. Saleur, *$\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry, Painlevé III and Exact Scaling Functions in 2D Polymers*, Nucl.Phys. **B388**, (1992), 609–626; [[arXiv:hep-th/9204094](#)].
- [FIKN06] A. Fokas, A. Its, A. Kapaev, V. Novokshenov, *Painlevé transcendents: the Riemann-Hilbert approach*, Mathematical Surveys and Monographs **128**, AMS, Providence, RI, (2006).
- [F10Book] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Math. Soc. Monographs, Princeton Univ. Press, (2010).
- [F1905] R. Fuchs, *Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre*, C. R. Acad. Sci. (Paris) **141** (1905) 555–558.
- [F1907] R. Fuchs, *Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegene wesentlich singuläre Stellen*, Math. Ann. **63** (1907) 301–321.
- [GIL12] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Conformal field theory of Painlevé VI*, JHEP **1210**, (2012), 38; [[arXiv:1207.0787](#)].
- [GIL13] O. Gamayun, N. Iorgov, O. Lisovyy, *How instanton combinatorics solves Painlevé VI, V and III's*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2013) 335203; [[arXiv:1302.1832](#)].
- [G1910] B. Gambier, *Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critique fixés*, Acta. Math. **33** (1910) 1–55.
- [G1912] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixés*, Ann. Sci. de l'ENS **29** (1912) 1–126.
- [G1917] R. Garnier, *Etudes de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendentes*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **34** (1917) 239–353.
- [G15] P. Gavrylenko, *Isomonodromic τ -functions and W_N conformal blocks*, JHEP **0915**, (2015), 167; [[arXiv:1509.00259](#)].

- [GL16] P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Fredholm determinant and Nekrasov sum representations of isomonodromic tau functions*, Comm. Math. Phys. **363** **1**, (2018), 1–58; [arXiv:1608.00958].
- [GL17] P. Gavrylenko, O. Lisovyy, *Pure $SU(2)$ gauge theory partition function and generalized Bessel kernel*, [arXiv:1705.01869].
- [GIL18] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *Higher rank isomonodromic deformations and W -algebras*; [arXiv:1801.09608].
- [GIL18FST] P. Gavrylenko, N. Iorgov, O. Lisovyy, *On solutions of the Fuji-Suzuki-Tsuda system*; [arXiv:1806.08650].
- [GS18] P. Gavrylenko, R. Santachiara, *Crossing invariant correlation functions at $c = 1$ from isomonodromic τ functions*, Journal of High Energy Physics 2019 (**11**), 119; [arXiv:1812.10362].
- [GNY06] L. Göttsche, H. Nakajima, K. Yoshioka, *K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting*, Pure Appl. Math. Quart. **5** (2009) 1029–1111; [arXiv:math/0611945].
- [GRP91] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, *Do integrable mappings have the Painlevé property?*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825–1828.
- [GR04] B. Grammaticos and A. Ramani, *Discrete Painlevé Equations: A Review, Discrete Integrable Systems*, eds. by B. Grammaticos et al., Lecture Notes in Physics Volume 644 (Berlin:Springer, 2004) 245–321.
- [GR16] B. Grammaticos, A. Ramani, *Parameterless discrete Painlevé equations and their Miura relations*, J. Nonlin. Math. Phys. **23** (2016) 141.
- [GTRCT02] B. Grammaticos, T. Tamizhmani, A. Ramani, A. S. Carstea, K.M. Tamizhmani, *A bilinear approach to the discrete Painlevé I equations*, J. Phys. Soc. Japan **71** (2002) 443.
- [GHM14'] A. Grassi, Y. Hatsuda and M. Marino, *Quantization conditions and functional equations in $ABJ(M)$ theories*, J. Phys. **A49** (2016) 115401; [arXiv:1410.7658].
- [Gr84] V. Gromak, *Reducibility of the Painlevé equations*, Diff. Uravn **20** **10** (1984), 1674–1683.
- [ILST14] N. Iorgov, O. Lisovyy, A. Shchekhin, Yu. Tykhyy, *Painlevé functions and conformal blocks*, Constr Approx **39** (**1**), (2014), 255–272.
- [ILT14] N. Iorgov, O. Lisovyy, J. Teschner, *Isomonodromic τ functions from Liouville conformal blocks*, Commun. Math. Phys. **336**(**2**), (2015), 671–694; [arXiv:1401.6104].
- [ILTy13] N. Iorgov, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, *Painlevé VI connection problem and monodromy of $c = 1$ conformal blocks*, JHEP **1312** (2013), 029; [arXiv:1308.4092].
- [ItsLTy14] A. Its, O. Lisovyy, Yu. Tykhyy, *Connection problem for the sine-Gordon/Painlevé III tau function and irregular conformal blocks*, IMRN (2014); [arXiv:1403.1235].
- [ItsLP16] A.R. Its, O. Lisovyy, A. Prokhorov, *Monodromy dependence and connection formulae for isomonodromic tau functions*, Duke Mathematical Journal, **167** (**7**), (2018), 1347–1432; [arXiv:1604.03082].

- [I19] K. Iwaki, *2-parameter τ -function for the first Painlevé equation -Topological recursion and direct monodromy problem via exact WKB analysis-*, [arXiv:1902.06439].
- [J82] M. Jimbo, *Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 18, (1982), 1137–1161.
- [JMMS80] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Môri, M. Sato, *Density matrix of an impenetrable Bose gas and the fifth Painlevé transcendent*, Physica **1D**, (1980), 80–158.
- [JMU81] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno, *Monodromy preserving deformations of linear ordinary differential equations with rational coefficients I*, Physica **2D**, (1981), 306–352.
- [JMU81(2)] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: II*, Physica **2D**(1981) 407–448.
- [JMU81(3)] M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: III*, Physica **4D** (1981) 26–46.
- [JNS17] M. Jimbo, H. Nagoya and H. Sakai, *CFT approach to the q -Painlevé VI equation*, J. Int. Syst. **2** (2017) 1; [arXiv:1706.01940].
- [JS96] M. Jimbo and H. Sakai, *A q -analog of the sixth Painlevé equation*, Lett. Math. Phys. **38** (1996) 145–154.
- [KNY15] K. Kajiwara, M. Noumi, Y. Yamada, *Geometric Aspects of Painlevé Equations*, J. Phys. A: Math. Theor. 50(7) (2017) 073001; [arXiv:1509.08186].
- [LLNZ13] A. Litvinov, S. Lukyanov, N. Nekrasov, A. Zamolodchikov *Classical Conformal Blocks and Painlevé VI*, JHEP **1407** (2014) 144; [arXiv:1309.4700].
- [L11] S. L. Lukyanov, *Critical values of the Yang-Yang functional in the quantum sine-Gordon model*, Nucl. Phys. **B853**, (2011), 475–507; [arXiv:1105.2836].
- [M1922] J. Malmquist, *Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Arkiv Mat. Astron. Fys. 18, (1922), 1–89.
- [MN18] Y. Matsuhira, H. Nagoya, *Combinatorial expressions for the tau functions of q -Painlevé V and III equations*; [arXiv:arXiv:1811.03285].
- [MTW77] B. McCoy, C. Tracy, T. Wu, *Painlevé functions of the third kind*, J. Math. Phys. **5**, **18** (1977), 1058–1092.
- [MM17] A. Mironov, A. Morozov, *On determinant representation and integrability of Nekrasov functions*, Phys. Lett. B **773** (2017) 34–46; [arXiv:1707.02443].
- [MM17q] A. Mironov, A. Morozov, *q -Painlevé equation from Virasoro constraints*, Phys. Lett. B **785** (2018) 207–210; [arXiv:1708.07479].
- [MMZ19] A. Mironov, A. Morozov, Z. Zakirova, *Discrete Painlevé equation, Miwa variables and string equation in 5d matrix models*, J. High Energ. Phys. **2019**, 227, (2019); [arXiv:1908.01278].

- [N15] H. Nagoya, *Irregular conformal blocks, with an application to the fifth and fourth Painlevé equations*, J. Math. Phys. **56**, 123505 (2015); [[arXiv:1505.02398](#)].
- [N18] H. Nagoya, *Remarks on irregular conformal blocks and Painlevé III and II tau functions*, [[arXiv:1804.04782](#)].
- [NY03] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory*, Inventiones mathematicae **162** **2** (2005), 313–355; [[arXiv:math/0306198](#)].
- [NY05] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Instanton counting on blowup. II. K-theoretic partition function*, Transform. Groups **10** **3–4**, (2005), 489–519; [[arXiv:math/0505553](#)].
- [NY09] H. Nakajima and K. Yoshioka, *Perverse coherent sheaves on blow-up. III. Blow-up formula from wall-crossing*, Kyoto J. Math. **51** **2** (2011), 263; [[arXiv:0911.1773](#)].
- [NTalk] N. Nekrasov, Talk at IHES *Some applications of defects in supersymmetric gauge theory* [<https://www.youtube.com/watch?v=QD-0rgaYQCw>].
- [NO03] N. Nekrasov, A. Okounkov, *Seiberg-Witten theory and random partitions*, Prog.Math. **244** (2006) 525-596; [[hep-th/0306238](#)].
- [O18] R. Ohkawa, *Functional equations of Nekrasov functions proposed by Ito-Maruyoshi-Okuda*; [[arXiv:1804.00771](#)].
- [OKSO06] Y. Ohya, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, *Studies on the Painlevé Equations, V, Third Painlevé Equations of Special Type $P_{III}(D_7)$ and $P_{III}(D_8)$* , J. Math. Sci. Univ. Tokyo **13** (2006) 145-204.
- [O79] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé*, Japan. J. Math. (N.S.) **5** (1979) 1–79.
- [P1900] P. Painlevé, *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. Phys. France **28** (1900) 201–261.
- [P1900] P. Painlevé, *Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme*, Acta Math. **21** (1902) 1–85.
- [QRT88] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations*, Phys. Lett. **A126** (1988) 419–421.
- [QRT89] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Integrable mappings and soliton equations II*, Physica **D34** (1989) 183–192.
- [RGH91] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta, *Discrete versions of the Painlevé equations*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829–1832.
- [RGT00] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, *Quadratic relations in continuous and discrete Painleve equations*, J. Phys. A **33** (2000) 3033.
- [S01] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations* Comm. Math.Phys. **220**(2) (2001) 165–229.

- [SMJ78] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, Publ. RIMS Kyoto Univ. **14**, (1978), 223–267; **15**, (1979), 201–278; **15**, (1979), 577–629; **15**, (1979), 871–972; **16**, (1980), 531–584.
- [S1912] L. Schlesinger, *Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischer Punkten*, J. für Math. **141** (1912) 96–145.
- [S20] A. Shchepochkin, *Blowup relations on $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ from Nakajima-Yoshioka blowup relations*; [arXiv:2006.08582]
- [TTGR04] K.M. Tamizhmani, T. Tamizhmani, B. Grammaticos and A. Ramani, *Special solutions for discrete Painlevé equations*, in: *Discrete Integrable Systems*, eds. by B. Grammaticos et al., Lecture Notes in Physics Volume 644 (Berlin: Springer, 2004), 323–382
- [TW92] C. A. Tracy, H. Widom, *Level-spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159**, (1994), 151–174; arXiv:hep-th/9211141].
- [TW93] C. A. Tracy, H. Widom, *Fredholm determinants, differential equations and matrix models*, Comm. Math. Phys. **163**, (1994), 33–72; arXiv:hep-th/9306042].
- [TW09] C. A. Tracy, H. Widom, *Painlevé Functions in Statistical Physics*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **47**, (2011), 361–374; arXiv:0912.2362].
- [T06] T. Tsuda, *Tau Functions of q -Painlevé III and IV Equations* Lett. Math. Phys. **75** (2006) 39–47
- [TOS05] T. Tsuda, K. Okamoto, H. Sakai, *Folding transformations of the Painlevé equations*, Math. Ann. **331** 4 (2005) 713–738.
- [WMTB76] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy, E. Barouch, *Spin-spin correlation functions for the two-dimensional Ising model: exact theory in the scaling region*, Phys. Rev. **B13**, (1976), 316–374.
- [Z94] A. B. Zamolodchikov, *Painlevé III and 2D Polymers*, Nucl.Phys. **B432**, (1994), 427–456; [arXiv:hep-th/9409108].