Нацiональний технiчний унiверситет України «Київський полiтехнiчний iнститут iменi Iгоря Сiкорського» Мiнiстерство освiти i науки України Київський нацiональний унiверситет України iменi Тараса Шевченка Мiнiстерство освiти i науки України Квалiфiкацiйна наукова праця на правах рукопису Савич Iрина Миколаївна УДК 519.21 ДИСЕРТАЦIЯ Асимптотичнi властивостi оцiнок Коенкера-Бассетта параметра нелiнiйної регресiї з сильно залежним випадковим шумом 01.01.05 - теорiя ймовiрностей та математична статистика 11 - Математика та статистика Подається на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук Дисертацiя мiстить результати власних дослiджень. Використання iдей, результатiв i текстiв iнших авторiв мають посилання на вiдповiдне джерело I.М. Савич Науковий керiвник - доктор фiзико-математичних наук, професор Iванов Олександр Володимирович Київ - 2017

ЗМIСТ Вступ 13 Роздiл 1 ОГЛЯД ЛIТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦI¨I 32 Роздiл 2 МОДЕЛЬ ТА ДОПОМIЖНI РЕЗУЛЬТАТИ 38 2.1 Консистентнiсть квантильних оцiнок у моделях регресiї з сильно залежним випадковим шумом . . . . . . . 39 2.1.1 Позначення та умови . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39 2.1.2 Деякi властивостi функцiї втрат ρβ . . . . . . . . . . 42 2.1.3 Теорема про консистентнiсть оцiнок Коенкера-Бассетта 44 2.2 µ− припустимiсть спектральної щiльностi стацiонарного випадкового шуму з сингулярним спектром . . . 54 2.2.1 Умови та доведення результату про µ− припустимiсть 54 2.2.2 Приклади . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59 2.3 Висновки до роздiлу 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 63 Роздiл 3 АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНIСТЬ ОДНОГО IНТЕГРАЛА 64 3.1 Допомiжна модель нелiнiйної регресiї . . . . . . . . . 64 3.2 Елементи теорiї iзонормальних процесiв . . . . . . . . 66 3.3 Центральна гранична теорема для зважених нелiнiйних перетворень гауссiвських стацiонарних процесiв iз сингулярним спектром . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71 3.3.1 Умови та допомiжнi твердження . . . . . . . . . . . . 71 3.3.2 Центральна гранична теорема . . . . . . . . . . . . . 75 3.4 Висновки до родiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81 Роздiл 4 АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНIСТЬ ОЦIНКИ КОЕНКЕРА-БАССЕТТА 82 4.1 Теорема редукцiї . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82 4.1.1 Основнi припущення та позначення . . . . . . . . . . 82 12 4.1.2 Формулювання теореми редукцiї . . . . . . . . . . . . 85 4.1.3 Допомiжнi твердження . . . . . . . . . . . . . . . . . 89 4.1.4 Доведення теореми редукцiї . . . . . . . . . . . . . . . 114 4.2 Теорема про асимптотичну нормальнiсть оцiнок КоенкераБассетта . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 115 4.3 Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117 Роздiл 5 АСИМПТОТИЧНI ВЛАСТИВОСТI ОЦIНКИ НАЙМЕНШИХ МОДУЛIВ 118 5.1 Консистентнiсть та асимптотична нормальнiсть оцiнки найменших модулiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . 118 5.2 Асимптотичнi властивостi оцiнки найменших модулiв у моделi регресiї з гауссiвським стацiонарним шумом 121 5.3 Деякi приклади та зауваження . . . . . . . . . . . . . 125 5.4 Висновки до роздiлу 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 132 ЗАГАЛЬНI ВИСНОВКИ 133 СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 134 ДОДАТОК Список опублiкованих праць за темою дисертацiї 149 13 ВСТУП Актуальнiсть теми. Регресiйний аналiз — це важливий роздiл математичної та прикладної статистики: див. наприклад, енциклопедичнi посiбники С.Р. Рао (2001) [159], Н. Дрейпера та Г. Смiта (1986) [11], С.А. Айвазяна та В.С.Мхитаряна (1998) [1]. Нелiнiйний регресiйний аналiз, який використовує адекватнiшi нелiнiйнi вiдносно параметрiв моделi, — це принципове ускладнення класичного лiнiйного регресiйного аналiзу, розвиток якого стимулюється великою кiлькiстю прикладних задач у рiзних галузях природничих та соцiальних наук, таких як теорiя турбулентностi, метеорологiя, гiдрологiя, геофiзика, статистична радiофiзика, хiмiчна кiнетика, економетрика, фiнанси, соцiологiя тощо. Зробимо посилання тiльки на монографiї з математичних проблем нелiнiйного регресiйного аналiзу I. Барда (1974) [62], Д.А. Ратковського (1983) [160], А.Р. Галланта (1987) [85], Д.М. Бейтса та Д.Г. Уотса (1988) [63], О.В. Iванова (1997) [101]. Задача оцiнювання невiдомих параметрiв сигналу у моделях спостережень «сигнал плюс шум» є важливою проблемою статистики випадкових процесiв. Математичнi моделi такого типу в статистицi i називають регресiйними моделями. У диcертацiйнiй роботi розглядається нелiнiйна модель регресiї, яка є складною, в тому сенсi, що випадковий шум є локальним перетворенням сильно залежного стацiонарного гауссiвського процесу. Вивчення випадкових процесiв з кореляцiєю, яка спадає з гiперболiчною швидкiстю, тобто процесiв з неiнтегрованими коварiацiйними функцiями, призводить до складних ймовiрнiстних та статистичних задач. Протягом останнiх двох десятирiч спостерiгається серйозний прогрес у теоретичному осмисленнi явища сильної залежностi. З iншого боку, нещодавнi прикладнi дослiдження пiдтвердили, що данi наукових областей, згаданих вище, демонструють сильну залежнiсть: див. книги Дж.Берана (2013) [65], М.М.Леоненка (1999) [137], П.Доухана та iнш. (2003) [81], якi мiстять огляди та бiблiографiю з тематики сильної залежностi, розпочату ще М.Розен- 14 блаттом (1956) [92]. В сучаснiй теорiї статистичного оцiнювання чiльне мiсце займає оцiнка квантильної регресiї, або оцiнка Коенкера-Бассета (ОКБ) [64], що визначається за допомогою несиметричної функцiї втрат та є оцiнкою невiдомого параметра — квантиля спостережень. Теорiя цих оцiнок розвивалась в численних роботах: див., наприклад, монографiї Р. Коенкера (2005) [118], Lingxin Hao, Д. O. Неймана (2007) [145], К. Давiно, М. Фурно, Д. Вiстокко (2013) [74] та статтi Г. Л. Коула, К. Мукерджи (1994) [128], К. Мукерджи (2000) [135], Т. С. Кiма, Х. К. Кiма (2001) [117], О. Г. Кукуша, Дж. Берланта, Ю. Гоегебера (2005) [130]. В якостi об’єкта дослiджень в дисертацiї обрано модель квантильної регресiї рiвня β ∈ (0, 1), причому «похибки» спостережень мають нульове математичне сподiвання. В результатi ми будемо розглядати звичайнi моделi регресiї з несиметричними похибками спостережень i отримувати робастнi ОКБ параметрiв регресiї. Варто зауважити, що ОКБ узагальнює оцiнку найменших модулiв (ОНМ) у тому розумiннi, що ОНМ є оцiнкою невiдомого параметра медiани рiзнорозподiлених спостережень. Для введеної моделi в роботi дослiджено асимптотичну поведiнку ОКБ та ОНМ, зокрема, доведено консистентнiсть та асимптотичну нормальнiсть. Таким чином, напрямок дослiджень дисертацiйної роботи є актуальним як з теоретичної точки зору, так i з точки зору можливих застосувань. Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацiйна робота виконана на кафедрi математичного аналiзу та теорiї ймовiрностей Нацiонального технiчного унiверситету України «Київський полiтехнiчний iнститут iменi Iгоря Сiкорського» в рамках держбюджетної науково-дослiдної роботи № 2810Ф «Дослiдження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцiй та узагальнення процесiв вiдновлення» (номер державної реєстрацiї 0115U000371). Мета та задачi дослiдження. Метою роботи є подальший розвиток теорiї оцiнювання параметрiв функцiї регресiї в моделях iз випадковим шумом, що є локальним перетворенням гаусciвського стацiонарного процесу. Об’єктом дослiдження є модель регресiї з неперервним часом та описаним вище випадковим шумом. 15 Предметом дослiдження є асимптотичнi властивостi ОКБ та ОНМ параметрiв нелiнiйних моделей регресiї. У роботi розглянуто такi задачi: • дослiдження умов консистентностi та асимптотичної нормальностi ОКБ для регресiйної моделi з випадковим шумом, який є локальним функцiоналом вiд гауссiвського стацiонарного процесу; • вивчення граничного розподiлу iнтегралiв вiд локальних нелiнiйних перетворень гауссiвського стацiонарного процесу з сингулярним спектром, зважених градiєнтом функцiї регресiї; • дослiдження умов консистентностi та асимптотичної нормальностi ОНМ для регресiйної моделi з випадковим шумом, який є локальним функцiоналом вiд гауссiвського стацiонарного процесу. Методика дослiдження. У роботi використано розклади у ряди за полiномами Чебишова-Ермiта функцiоналiв вiд гауссiвського випадкового процесу, метод фрагментацiї параметричної множини, що належить Хьюберу, багатовимiрну центральну граничну теорему для кратних стохастичних iнтегралiв Вiнера-Iто, дiаграмну формулу. Застосовано також методи нелiнiйного регресiйного аналiзу, поняття спектральної мiри функцiї регресiї, iзонормального процесу, хаотичних розкладiв. Наукова новизна одержаних результатiв. Усi отриманi у дисертацiї результати є новими. Зокрема, • знайдено достатнi умови консистентностi ОКБ параметрiв нелiнiйної моделi регресiї; • одержано достатнi умови µ−припустимостi спектральної щiльностi (с.щ.) сильно залежного стацiонарного процесу, де µ — спектральна мiра функцiї регресiї; • доведено асимптотичну нормальнiсть iнтеграла вiд нелiнiйного локального перетворення гауссiвського стацiонарного процесу з сингулярним спектром, зваженого градiєнтом функцiї регресiї; • отримано достатнi умови асимптотичної нормальностi ОКБ параметрiв нелiнiйної моделi регресiї; 16 • отримано властивостi консистентностi та асимптотичної нормальностi ОНМ параметрiв нелiнiйної моделi регресiї з випадковим шумом, що є нелiнiйним локальним перетворенням сильно залежного гауссiвського стацiонарного процесу; • знайдено достатнi умови консистентностi та асимптотичної нормальностi ОНМ параметрiв нелiнiйної моделi регресiї з сильно залежним гауссiвським стацiонарним процесом. Практичне значення одержаних результатiв. Результати, отриманi в дисертацiї, мають теоретичний характер. Вони можуть бути застосованi в рiзних галузях природничих, економiчних, технiчних наук, де виникає проблема оцiнювання парамерiв нелiнiйних моделей регресiї. Особистий внесок здобувача. Усi результати дисертацiйної роботи отримано здобувачем самостiйно. За результатами дисертацiї автором опублiкувано п’ять робiт, з них три у спiвавторствi з науковим керiвником Iвановим О.В., у яких Iванову О.В. належить постановка задач та загальне керiвництво роботою. Також одну роботу опублiковано у спiвавторствi з Iвановим О.В., Леоненком М.М. та Руїз-Медiною М.Д. У дисертацiї з цiєї роботи наводяться лише результати автора дисертацiї. Апробацiя результатiв. Результати дисертацiйної роботи доповiдались та обговорювались на • I, II, IV, V-iй мiжунiверситетських конференцiях з математики та фiзики для студентiв та молодих вчених (м. Київ, 2009 р., 2011 р., 2015 р., 2016 р.); • XIII, XVI, XVII-iй мiжнародних наукових конференцiях iменi академiка М. Кравчука (м. Київ, 2010 р., 2015 р., 2016 р.); • Український математичний конгрес — 2009 (до 100-рiччя вiд дня народження Миколи М. Боголюбова) (м. Київ, 2009 р.); • Мiжнароднiй конференцiї «Modern Stochastic: Theory and Applications II» (м. Київ, 2010 р.); • Мiжнароднiй конференцiї «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (м. Київ, 2015 р.); 17 • Мiжнароднiй конференцiї «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (м. Київ, 2015 р.); • Мiжнароднiй конференцiї «International workshop on limit theorems in probability theory, number theory, and mathematical statistics in honour of Prof. V.V.Buldygin» (м. Київ, 2016 р.); • засiданнi наукового семiнару «Теорiя випадкових процесiв» при кафедрi математичного аналiзу i теорiї ймовiрностей НТУУ «КПI» (керiвник – д.ф.-м.н., проф. В.В. Булдигiн) (м.Київ, 2011 р.); • засiданнi наукового семiнару «Статистичнi проблеми для випадкових процесiв i полiв» при кафедрi математичного аналiзу i теорiї ймовiрностей НТУУ «КПI iм. Iгоря Сiкорського» (керiвники – д.ф.-м.н., проф. О.I. Клесов, д.ф.-м.н., проф. О.В. Iванов) (м.Київ, 2017 р.); • засiданнi наукового семiнару вiддiлу математичних методiв дослiдження операцiй Iнституту кiбернетики iм. В.М. Глушкова НАН України (керiвник – член-корр. НАН України, д.ф.-м.н., проф. П.С. Кнопов) (м. Київ, 2017 р.); • сумiсному засiданнi наукових семiнарiв «Теорiя ймовiрностей i математична статистика» кафедри теорiї ймовiрностей, статистики i актуарної математики КНУ iм. Тараса Шевченка (керiвники – д.ф.-м.н., проф. Ю.С. Мiшура, д.ф.-м.н., проф. Ю.В. Козаченко) та «Асимптотичнi методи в статистицi» кафедри математичного аналiзу КНУ iм. Тараса Шевченка (керiвники – д.ф.-м.н., проф. О.Г. Кукуш, д.ф.-м.н., проф. Р.Є. Майборода) (м. Київ, 2017 р.). Публiкацiї. За результатами дисертацiйної роботи опублiковано 17 наукових публiкацiй. З них 5 статей, опублiкованих у фахових виданнях, [24,27,38,107,108], та 12 тез доповiдей [25,26,39–44,113,166–168]. Двi статтi [107,108] опублiкованi у закордонних виданнях, що включенi до наукометричної бази Scopus. Статтi [27,38] опублiкованi у виданнях України, англомовнi переклади яких включено до наукометричної бази Scopus. Структура та обсяг дисертацiї. Дисертацiя складається зi вступу, огляду лiтератури, 5 роздiлiв, розбитих на пiдроздiли, висновкiв, списку використаних джерел, що мiстить 18 178 найменувань та додатку. Загальний обсяг дисертацiї становить 151 сторiнку, основний текст займає 121 сторiнку. Змiст роботи. У вступi обгрунтовано актуальнiсть теми дисертацiї, сформульовано мету та завдання дослiдження, коротко викладено змiст основної частини роботи та наукову новизну одержаних результатiв. У першому роздiлi дисертацiйної роботи наведено огляд лiтератури за її темою. Другий роздiл дисертацiї присвячено дослiдженню властивостi консистентностi ОКБ та µ−припустимостi с.щ. сильно залежного випадкового процесу. У пiдроздiлi 2.1 отримано достатнi умови консистентностi ОКБ. Припустимо, що спостереження мають вигляд X(t) = g(t, θ) + ε(t), t ≥ 0, (0.1) де g : [0, +∞) × Θγ → R – неперервна функцiя, Θγ = S kak<1 (Θ + γa), γ > 0 – деяке число, Θ ⊂ R q – вiдкрита опукла обмежена множина параметрiв, яка мiстить θ, Θc – замикання в R q множини Θ. Вiдносно ε(t) припустимо наступне. A1. ε(t), t ∈ R, — локальний функцiонал вiд гауссiвського стацiонарного процесу ξ(t), тобто ε(t) = G(ξ(t)), де G(x), x ∈ R, — борельова функцiя, причому E ε(0) = 0, E ε 2 (0) < ∞. (0.2) A2. ξ(t), t ∈ R, — дiйсний неперервний в середньому квадратичному вимiрний стацiонарний гауссiвський процес, який визначено на ймовiрнiсному просторi (Ω, F, P), E ξ(0) = 0. A3. Коварiацiйна функцiя (к. ф.) гаусciвського процесу ξ у припущеннi A2 має вигляд E ξ(t)ξ(0) = B(t) = X r j=0 AjBαj ,χj (t), t ∈ R, r ≥ 0, (0.3) 19 де Aj ≥ 0, j = 0, r, Pr j=0 Aj = 1, Bαj ,χj (t) = cos(χj t) (1 + t 2 ) αj/2 , αj ∈ (0, 1) j = 0, r, 0 ≤ χ0 < χ1 < ... < χr < +∞, E ξ 2 (t) = B(0) = 1, а с. щ. f має форму f(λ) = X r j=0 Ajfαj ,χj (λ), λ ∈ R, (0.4) де для j = 0, r fαj ,χj (λ) = c1(αj ) 2 h Kαj−1 2 (|λ + χj |)|λ + χj | αj−1 2 + Kαj−1 2 (|λ − χj |)|λ − χj | αj−1 2 i , λ ∈ R, c1(α) = 2 (1−α)/2 √ πΓ α 2 , Kν(z) = 1 2 Z ∞ 0 s ν−1 exp − 1 2 s + 1 s z ds, z ≥ 0, ν ∈ R, − модифiкована функцiя Бесселя 2-го роду поряку ν. Позначимо через F(x) функцiю розподiлу (ф. р.) ε(0). A4. F(0) = β, β ∈ (0, 1). Введемо функцiю ρβ(x) = βx, x ≥ 0, (β − 1)x, x