

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Матушко Мария Георгиевна
**Пределы интегрируемых систем типа
Калоджеро-Сазерленда**

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Хорошкин Сергей Михайлович

Москва – 2020

Аннотация

Основной целью данной работы является изучение пределов системы Калоджеро-Сазерленда в скалярном и спинном случаях, когда число частиц N стремится к бесконечности. В каждом из случаев строится бозонный и фермионный предел, соответствующий симметричным и антисимметричным волновым функциям системы.

Для фермионного предела скалярной системы мы выводим предельное выражение для оператора Дункла через свободные фермионные поля, см. Теорему 2.1, которое позволяет получить семейство коммутирующих гамильтонианов в пространстве Фока, см. Предложение 2.4. В случае значения константы связи $\beta = 0$ получена явная формула для производящей функции гамильтонианов, которая отличается от известных ранее. Первая формула дана в виде нормально упорядоченного выражения в бозонном пространстве, см. Предложение 3.1. Вторая формула записана в терминах простого интегрального оператора, но не является нормально упорядоченной, см. Предложение 3.2.

Спиновая система КС обладает янгианной симметрией. Однако, действие генераторов янгиана, а также гамильтонианов в скалярном случае не образуют проективной системы. Поэтому мы изучаем проективные свойства действия янгиана и формулируем результаты в Предложении 4.1 и Предложении 4.2.

Для спиновой системы реализуется бозонный и фермионный предел в многокомпонентном пространстве Фока. Мы вводим отображения в конечные системы и строим обратный образ конечных операторов Дункла в терминах вершинных операторов в бозонном случае и в терминах свободных фермионных полей в фермионном случае, см. Предложение 5.1 и Предложение 6.1. Предел оператора Дункла позволяет построить соответствующее представление янгиана в пространстве Фока, см. Теорему 5.1 и Теорему 6.1. В бозонном случае исследуем классический предел, см. Предложения 5.3 и 5.4.

Исторический обзор

Система одномерных частиц с попарным взаимодействием обратно-пропорциональным квадрату расстояния играет важную роль в математической и теоретической физике на протяжении последних 40 лет. Эта модель возникает и имеет приложения в различных областях физики, таких как физика конденсированного состояния, спинные цепочки, калибровочная теория и теория струн, и является основным примером интегрируемой и точно решаемой многочастичной модели. В литературе она связана с именами Ф. Калоджеро, Б. Сазерленда и Ю. Мозера. Впервые система тождественных частиц, сосредоточенных на прямой, с потенциалом обратно пропорциональным квадрату расстояния между частицами была введена Ф. Калоджеро в 1971 году [7]. Гамильтониан этой системы задается следующим образом

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i < j} \frac{g}{(q_i - q_j)^2}$$

где использованы привычные обозначения импульсов и координат. Массы частиц равны единице, g — константа взаимодействия. Можно рассмотреть периодическую версию системы (например, с периодом 2π), считая, что взаимодействуют бесконечно

много образов частиц, тогда двухчастичный потенциал преобразуется следующим образом

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g}{(x + 2\pi n)^2} = \frac{g}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

Это модель была введена Б. Сазерлендом в 1971 году [44]. Удобно использовать следующую параметризацию константы связи

$$g = \beta(\beta - 1).$$

Тем самым мы получаем систему N тождественных частиц на окружности длины L , которую мы будем называть квантовая система Калоджеро-Сазерленда со следующим гамильтонианом

$$H = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)^2 + 2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{i < j}^N \frac{\beta(\beta - 1)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{L} (q_i - q_j) \right)}, \quad (1)$$

и являющуюся объектом нашего дальнейшего исследования. Естественно рассматривать периодические волновые состояния системы

$$\phi(q_1, \dots, q_i + L, \dots, q_N) = \phi(q_1, \dots, q_i, \dots, q_N).$$

Функция

$$\phi_0(\mathbf{q}) = \phi_0(q_1, \dots, q_N) = \prod_{i < j} \left| \sin \left(\frac{\pi}{L} (q_i - q_j) \right) \right|^\beta$$

задает основное состояние гамильтониана с собственной энергией [18]

$$E_0 = (\pi\beta/L)^2 N(N^2 - 1)/3.$$

Применяя преобразование подобия $\Phi_0(\mathbf{q})^{-1} H^{CS} \Phi_0(\mathbf{q})$ и переходя в новом "коллективном" переменным $x_i = e^{\frac{2\pi i q_i}{L}}$, получаем формулу для эффективного гамильтониана:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \beta \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (2)$$

Гамильтониан (2) представляет собой дифференциально-разностный оператор. Оказывается, существует семейство коммутирующих между собой дифференциально-разностных операторов, включающее в себя (2). Это семейство может быть построено с помощью операторов Хекмана-Дункла [11, 12]. Мы приведем для них выражения в форме, предложенной в [37]:

$$D_i^{(N)} = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{x_i - x_j} (1 - K_{ij}), \quad (3)$$

где K_{ij} — перестановка. Симметрические многочлены от $D_i^{(N)}$ коммутируют [12] между собой. Обозначим

$$H_k^{(N)} = \text{Res}_+ \left(\sum_i \left(D_i^{(N)} \right)^k \right), \quad (4)$$

где Res_+ означает ограничение на пространство симметрических многочленов. Операторы $H_k^{(N)}$ могут быть выбраны в качестве высших гамильтонианов модели Калоджеро-Сазерленда. В частности, $H = H_2^{(N)}$.

Собственными функциями коммутирующих операторов $H_k^{(N)}$ являются симметрические полиномы от N переменных с параметром $\alpha = \frac{1}{\beta}$, которые называются полиномами Джека [16]. Они параметризуются разбиениями и являются обобщением полиномов Шура и частным случаем симметрических полиномов Макдональда с двумя параметрами q, t [24, 25]. Устремив $q, t \rightarrow 1$ и считая, что $q = t^\alpha$, получим полиномы Джека. Известно семейство разностных операторов, для которых полиномы Макдональда являются собственными [24]. В случае полиномов Джека эти операторы были введены Ж. Секигучи [42] и А. Дебьярдом [9]. Операторы Секигучи-Дебьярда являются вырождением операторов Макдональда. Правда, они не совпадают с операторами, введенными в (4), но полиномиально выражаются через них.

Конструкция полиномов Макдональда и соответствующих коммутирующих разностных операторов известна и для произвольной системы корней [8, 26, 27]. Обобщение полиномов Джека на произвольную систему корней было введено Хекманом и Э.Опдамом, они называются полиномами Якоби, связанные с системой корней [13, 14, 15, 35]. Полиномы Джека — это случай системы корней A_n . Мы ограничимся только этим случаем. Заметим, что система Калоджеро-Сазерленда — интегрируемая система, соответствующая системе корней A_{N-1} , следуя М. Ольшевскому и А. Перелому [34].

Естественно возникает вопрос об описании модели при стремлении числа частиц N к бесконечности. Эта задача решалась, и в работах [2, 4, 5, 17, 37] конца 80-х начала 90-х годов были явно предъявлены ответы для предела второго гамильтониана (2) в бозонном пространстве Фока. Около 20 лет спустя общую конструкцию коммутирующих гамильтонианов в бозонном пространстве предъявили М. Назаров и Е. Складчин [32] и независимо А. Веселов и А. Сергеев [43]. Развивая идеи Макдональда, М. Назаров и Е. Складчин в работе [32] построили предельные выражения для операторов Секигучи-Дебьярда в пределе N к бесконечности. Главным инструментом являлась теория симметрических функций. Симметрические функции можно представлять себе как симметрические многочлены от бесконечного числа переменных. Нулевой сектор бозонного пространства Фока может быть отождествлен с кольцом симметрических функций, которое формально определяется как проективный предел колец симметрических многочленов. Тем самым в работе было построено семейство операторов, собственными функциями которых уже являлись симметрические функции Джека.

В [31], [43] было предложено другое построение предельной конструкции модели Калоджеро-Сазерленда в бозонном пространстве Фока. Главной идеей было использовать семейство операторов Дункла (3) как квантовый L -оператор системы. Для систем Калоджеро L -оператор был уже известен [30] и оказался схожим с действием семейства операторов Дункла, записанном в матричном виде в подходящем базисе. Это позволило явно построить выражения для высших гамильтонианов в бозонном пространстве Фока и тем самым показать, что предельная система является интегрируемой. Полученная система может быть рассмотрена как квантовый аналог интегрируемой иерархии уравнения Бенжамина-Оно [1, 38].

В частном случае значения константы связи симметрические функции Джека

становятся функциями Шура, а уравнение Бенжамина-Оно соответственно вырождается в бездисперсное уравнение КдФ (или так называемое уравнение Бюргерса). Точная конструкция коммутирующих гамильтонианов квантового бездисперсного уравнения КдФ может быть получена непосредственно из бозон-фермионного соответствия. Гамильтонианы могут быть получены рекуррентно [36] или в терминах производящей функции [33, 41].

Мы рассмотрим спиновую систему Калоджеро-Сазерленда, которая является обобщением этой модели, где вводятся дополнительные степени свободы, которые обычно интерпретируются как спиновые переменные. Интегрируемость системы Калоджеро изучалась во многих работах, например [23]. Спиновые система Калоджеро-Сазерленда являются суперинтегрируемыми согласно Н. Решетихину [39, 40]. В настоящей работе мы будем использовать специальный случай спиновой модели для системы корней A_N и соответствующий представлению старшего веса $\mathfrak{sl}_N$. В этом случае в числителе потенциала гамильтониана (1) будет стоять $\beta(\beta - K_{ij})$, где K_{ij} это оператор перестановки координат i -ой and j -ой, и мы будем предполагать зависимость частиц от спина.

Спиновая система обладает янгианной симметрией, другими словами, гамильтонианы системы Калоджеро-Сазерленда коммутируют с действием янгиана, более того они выражаются через центральные элементы янгиана. Наличие янгианной симметрии непосредственно связано с операторами Дункла. Они удовлетворяют соотношениям вырожденной аффинной алгебры Гекке, что в свою очередь позволяет построить представление янгиана $\mathfrak{gl}_N$, согласно общей конструкции [3, 10]. Тем самым высшие гамильтонианы системы могут быть выбраны как центр янгиана — коэффициенты квантового детерминанта.

В симметрическом спиновом случае предельное выражение для второго гамильтониана в коллективных переменных было получено в работе [5]. Антисимметрический предел спиновой системы изучался Д. Угловым [45, 47]. Д. Углов изучал проективные свойства действия янгиана для конечной системы, а именно предложил формулу подправки трансфер-матрицы янгиана, чтобы система стала проективной и действие стабилизировалось. Также Д. Углов разложил соответствующее пространство Фока на неприводимые компоненты по отношению к действию янгиана и нашел спектр гамильтонианов.

1 Бозонный предел Калоджеро-Сазерленда

В первой главе приводится обзор результатов [31, 43], касающихся построения бозонного предела системы Калоджеро-Сазерленда, но изложение происходит на языке вершинных операторов. Используются обозначения, отличающиеся от [31, 43], но более удобные для наших целей и проясняющие дальнейшее изложение.

Мы начинаем изложение с описания конечной системы КС, ограниченной на кольцо симметрических многочленов от N переменных. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать эквивариантные операторы Хекмана-Дункла как квантовый L-оператор, действующий на пространстве полиномиальных функций одной переменной с коэффициентами, являющимися симметричными полиномами от остальных $N - 1$ переменных. Очевидно, что соответствующий оператор Дункла $D_i^{(N)}$ сохраняет симметрию по всем переменным кроме x_i , и поэтому, рассматриваем его действие

на $\Lambda_+^{N,i}$ — пространстве функций симметричных во всем переменных кроме x_i .

Действие высших гамильтонианов (4) системы может быть посредством следующей процедуры: начинаем с симметрического полинома $f(x_1, \dots, x_N) \in \Lambda_+^N$ и строим вектор из его N копий. При действии k -ой степени оператора Дункла $(\tilde{D}_i^{(N)})^k$ получается семейство N эквивариантных функций $f_i(x_1, \dots; x_i; \dots x_N) = (\tilde{D}_i^{(N)})^k f(x_1, \dots, x_N) \in \Lambda_+^{N,i}$ таких, что

- $f_i(x_1, \dots; x_i; \dots x_N)$ является симметричной по всем переменным кроме x_i
- и переставляются симметрической группой

$$K_{ij} f_i = f_j. \quad (5)$$

Для $g(x_1, \dots; x_i; \dots x_N) \in \Lambda_+^{N,i}$ введем оператор симметризации

$$E_N g = \sum_{j=1}^N K_{ij} g.$$

Затем применим E_N к функции f_i из эквивариантного семейства (5):

$$E_N f_i = \sum_{j=1}^N f_j$$

Эту процедуру можно проиллюстрировать следующей матричной формулой:

$$\tilde{H}_k = (1, 1, \dots) \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \beta \sum_{i=2}^N \frac{x_1}{x_1 - x_i} & -\beta \frac{x_1}{x_1 - x_2} & \dots \\ -\beta \frac{x_2}{x_2 - x_1} & x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \beta \sum_{i \neq 2}^N \frac{x_2}{x_2 - x_i} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} f \\ f \\ \vdots \\ f \end{pmatrix},$$

матрица в которой напоминает матрицу Лакса (см. [30]) для системы КС.

Мы переформулируем процедуру в терминах многочленов Ньютона $p_k^{(N)} = x_1^k + \dots + x_N^k$ и выразим операторы Хекмана-Дункла через конечные аналоги $V_+(z)$, $V'_+(z)$ вершинных операторов $\Phi(z)$, $\Phi^{-1}(z)$ и отрицательную часть производной бозонного поля $\varphi^-(z)$, которые задаются формулами:

$$\Phi(z) = \exp \left(\sum_{n \geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n} \right), \quad \varphi^-(z) = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{p_n}{z^n} \right).$$

Для этого запишем симметрический многочлен в следующем виде

$$f(p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, p_3^{(N)}, \dots)$$

Оператор $V_+(x_i)$ заменяет каждую сумму Ньютона $p_k^{(N)}$ на $p_k^{(N-1)} + x_i^k$, тем самым $V_+(x_i) f \in \Lambda_+^{N,i}$ является разложением Тейлора полинома f по переменной x_i .

Для того, чтобы симметризовать функцию $F(x_i, \{p_n^{(N-1)}\}) \in \Lambda_+^{N,i}$ используется формальный интеграл

$$E_N F(\{p_n\}) = \oint \frac{d\xi}{\xi} \varphi^-(\xi) (V'_+(\xi) F)(\xi; \{p_n\}).$$

который означает взятие вычета в бесконечности. Оператор $V'_+(\xi)$ меняет каждую сумму Ньютона $p_k^{(N-1)}$ на $p_k^{(N)} - \xi^k$. Затем взятие интеграла $\oint \frac{d\xi}{\xi} \varphi^-(\xi)$ заменяет каждое вхождение ξ^k на $p_k^{(N)}$.

Далее строится бозонный предел в расширенном кольце симметричных функций $\hat{\Lambda}$. Пусть $\hat{\Lambda} = \Lambda[p_0]$ — кольцо симметричные функции [24] с добавленной свободной переменной p_0 . Пространство $\hat{\Lambda}$ является неприводимым представлением алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}$, порожденной элементами p_n и $\frac{\partial}{\partial p_n}$ и может рассматриваться как полиномиальная версия пространства Фока. Оно содержит вакуумный вектор $|0\rangle_+$ такой, что

$$\frac{\partial}{\partial p_n} |0\rangle_+ = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Дуальный вакуумный вектор ${}_+ \langle 0|$ удовлетворяет условиям

$${}_+ \langle 0| p_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

Мы определяем проекцию $\tilde{\pi}_N : \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda_+^N$, которая элементу $|v\rangle_+ \in \hat{\Lambda}$ сопоставляет следующий матричный элемент

$$\tilde{\pi}_N |v\rangle_+ = {}_+ \langle 0| \Phi(x_N) \dots \Phi(x_2) \Phi(x_1) |v\rangle_+.$$

Эта проекция переводит элемент p_k в соответствующий полином Ньютона от N переменных:

$$\tilde{\pi}_N : p_k \rightarrow p_k^{(N)} = \sum_{i=1}^N x_i^k, \quad p_0 \rightarrow N.$$

Определим линейное отображение $\mathcal{S} : \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \rightarrow \hat{\Lambda}$ как

$$\mathcal{S} F(\{p_n\}) = \oint \frac{d\xi}{\xi} \varphi^-(\xi) \Phi^{-1}(\xi) F(\xi, \{p_n\}).$$

и докажем, что отображение $\mathcal{S}$ является поднятием конечной симметризации E_N относительно $\tilde{\pi}_N$:

$$E_N \tilde{\pi}_{N-1} F(z, \{p_n\}) = \tilde{\pi}_N \mathcal{S}(F(z, \{p_n\})).$$

Мы формулируем главный результат этой главы:

Теорема 1.1 Оператор $\tilde{D} : \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \rightarrow \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z]$, заданный формулой

$$\tilde{D}(F(z, \{p_n\})) = z \frac{\partial}{\partial z} F(z, \{p_n\}) + \beta z \oint \frac{d\xi}{\xi^2} \frac{1}{1 - \frac{z}{\xi}} \Phi^*(\xi) \Phi(z) F(\xi, \{p_n\}),$$

является пределом операторов Дункла $\tilde{D}_i^{(N)}$.

Другими словами, оператор $\tilde{D}$ является поднятием $\tilde{D}_i^{(N)}$ относительно отображения $\tilde{\pi}_N$. Этот результат был получен ранее в [31, 43], но в другой формулировке, здесь он приводится на языке вершинных операторов. Из данной теоремы следует следующее

Предложение 1.2 *Операторы $\tilde{\mathcal{H}}_k = \mathcal{S}\tilde{D}^k\Phi(z) : \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}$,*

$$\tilde{\mathcal{H}}_k : \hat{\Lambda} \xrightarrow{\Phi(z)} \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \xrightarrow{D^k} \hat{\Lambda} \otimes \mathbb{C}[z] \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\Lambda},$$

образуют коммутирующее семейство гамильтонианов предельной системы [31, 43].

Также показывается, что в классическом пределе система переходит в иерархию Бенжамина-Оно, здесь изложение следует [31].

2 Фермионный предел системы КС

Вторая глава посвящена фермионному пределу модели Калоджеро-Сазарленда, где излагаются результаты статьи [19]. В этом случае частицы являются фермионами, и мы имеем дело с антисимметрическими волновыми функциями.

Как и в бозонном случае начнем описание системы КС ограниченной на пространство антисимметрических полиномов Λ_-^N в терминах операторов Хекмана-Дункла. Выразим операторы Хекмана-Дункла через конечные аналоги $V_-(z)V_+(z)$ и $V'_-(z)V'_+(z)$ вершинных операторов $\Psi(z)$ и $\Psi^*(z)$, где

$$\begin{aligned}\Psi(z) &= z^{p_0} \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p_n}{nz^n}\right) \exp\left(\sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right) \\ \Psi^*(z) &= z^{-p_0} \exp\left(\sum_{n>0} \frac{p_n}{nz^n}\right) \exp\left(-\sum_{n\geq 0} z^n \frac{\partial}{\partial p_n}\right).\end{aligned}$$

Для этого запишем антисимметрический полином от N переменных в виде

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j) f(p_1^{(N)}, p_2^{(N)}, p_3^{(N)}, \dots)$$

где $p_k^{(N)} = x_1^k + \dots + x_N^k$. Оператор $V_+(x_1)$ подставляет вместо элемента $p_k^{(N)}$ элемент $p_k^{(N-1)} + x_1^k$, а оператор

$$V_-(x_1) = x_1^N \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{p_n^{(N-1)}}{nx_1^n}\right)$$

является умножением на $\prod_{i=2}^N (x_1 - x_i)$, таким образом, применение $V_-(x_1)V_+(x_1)$ к антисимметрическому полиному $g(x_1, \dots, x_N)$ есть разложение в ряд Тейлора по переменной x_1 . С другой стороны, оператор $V'_-(z)V'_+(z)$ используется для полной антисимметризации функций антисимметричных по всем переменным кроме одной.

Затем мы реализуем предел в полиномиальном пространстве Фока $\hat{\Lambda}$. Каждому вектору $|v\rangle$ из $\hat{\Lambda}$ сопоставим семейство $\{\bar{\pi}_N(v)\}$ антисимметрических функций от N переменных, заданное матричными элементами

$$\bar{\pi}_N(v) = \langle 0 | \Psi(x_N) \cdots \Psi(x_1) | v \rangle. \quad (6)$$

Основной целью является построение операторов в пространстве $\hat{\Lambda}$, которые будут согласованы с действиями конечных гамильтонианов КС посредством отображений (6). Мы строим их, следуя подходу Склянина [31, 21]: определяем вспомогательное пространство $U \subset \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \hat{\Lambda}$ и его отображения в пространства полиномов антисимметричных по всем переменным кроме одной. Далее предъявляем операторы, действующие на пространстве U , который согласованы относительно введенных отображений.

Ключевой идеей конструкции является оператор интегрального усреднения $\mathcal{A} : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}$, которой является предельным аналогом конечной антисимметризации. Пусть $F(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \hat{\Lambda}$, определим $\mathcal{A}F \in \hat{\Lambda}$ следующей формулой:

$$\mathcal{A}F = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z \circ 0} dz \int_{u \circ z} du \frac{\Psi^*(u)F(z)}{u - z}.$$

В Лемме 2.3 показывается, что $\mathcal{A} : U \rightarrow \hat{\Lambda}$ является поднятием конечной антисимметризации.

Далее определим оператор $D : \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \hat{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes \hat{\Lambda}$ следующей формулой

$$DF(z) = z \frac{\partial}{\partial z} F(z) + \beta \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{w \circ 0} dw \int_{u \circ w} \frac{du}{(u - w)} \frac{\Psi^*(u)}{(1 - \frac{w}{z})} (\Psi(w)F(z) - \Psi(z)F(w)).$$

и доказываем

Теорема 2.1 *Оператор D , действующий на вспомогательном пространстве U , является поднятием операторов Хекмана-Дункла $D_i^{(N)}$ относительно отображения $\bar{\pi}_N$.*

Гамильтонианы конечной системы с N частицами в антисимметрическом случае могут быть записаны с помощью операторов Дункла, аналогично формуле (4):

$$\bar{H}_k^{(N)} = \text{Res}_- \left(\sum_i \left(D_i^{(N)} \right)^k \right),$$

где Res_- означает ограничение на пространство антисимметрических полиномов Λ_-^N . Мы строим предельные гамильтонианы $\mathcal{H}_k$, которые являются поднятием гамильтонианов $\bar{H}_k^{(N)}$ конечной системы:

$$\bar{H}_k^{(N)} \bar{\pi} = \bar{\pi} \mathcal{H}_k.$$

Определим операторы

$$\mathcal{H}_k = \mathcal{A} D^k \Psi(z) : \hat{\Lambda} \rightarrow \hat{\Lambda}, \quad (7)$$

тогда верно следующее

Предложение 2.4 *Операторы $\mathcal{H}_k$ образуют коммутативное семейство операторов в пространстве $\hat{\Lambda}$.*

Построенные гамильтонианы коммутируют в пространстве $\hat{\Lambda}$. Более того, они коммутируют в алгебре Гейзенберга и как следствие в любом ее представлении, например, в бозонном пространстве Фока. Мы можем определить проекцию $\pi_N : \mathcal{F} \rightarrow \Lambda_-^N$, похожую на формулу (6)

$$\pi_N(v) = \langle 0 | \Psi(x_N) \cdots \Psi(x_1) | v \rangle.$$

В действительности оно действует не нулем только на N -ом секторе $\mathcal{F}_N$ пространства Фока. Теперь построенные гамильтонианы $\mathcal{H}_k$ согласованы с отображениями π_N , коммутативность $\pi_N \mathcal{H}_k = \bar{H}_k^{(N)} \pi_N$ нетривиальна только на N -ом секторе $\mathcal{F}_N$. Мы переформулируем нашу конструкцию в фермионном пространстве Фока, реализованном как пространство полубесконечных форм, и определяем проекцию аналогичную π_N , которая действует как “обрезание” формы.

3 Производящие функции коммутирующих гамильтонианов для специальных значений константы СВЯЗИ

В этой главе рассмотрим частный случай $\beta = 0$ антисимметрического предела (используются такие же обозначения для гамильтонианов как и в предыдущей главе, подразумевая, что $\beta = 0$). В этом случае гамильтонианы (7) могут быть записаны простой формулой в фермионном пространстве Фока

$$\mathcal{H}_n = \sum_k :k^n \psi_k^* \psi_k:.$$

Бозон-фермионное соответствие позволяет найти выражения для $\mathcal{H}_n$ в бозонном пространстве Фока, это было проделано А. Погребковым [36] для аддитивной версии на прямой и позже П. Росси [41] на окружности.

Здесь мы выводим две формулы для плотностей гамильтонианов $\mathcal{H}_n$, которые не были известны ранее, и излагаем результаты работы [28]. В случае $\beta = 0$ оператор Дункла становится просто дифференциальным оператором $(z \frac{\partial}{\partial z})$ и гамильтонианы (7) выражаются через плотности $\mathcal{H}_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \cup 0} \frac{dz}{z} \mathcal{W}_k(z)$, заданные формулой

$$\mathcal{W}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u \cup z} du \frac{\Psi^*(u)}{u - z} \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^k \Psi(z).$$

Эти гамильтонианы являются поднятиями дифференциальных операторов $\bar{H}_k^{(N)} = \sum_{i=1}^N \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k$. Мы получаем первую формулу, вычисляя интеграл по u в выражении для $\mathcal{W}_k(z)$, используя бозонное исчисление. Это приводит к следующему ответу

Предложение 3.1 Экспоненциальная производящая функция $\mathcal{W}(z, x)$ для плотностей $\mathcal{W}_k(z)$ задается следующей формулой

$$\mathcal{W}(z, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \mathcal{W}_k(z) = \frac{:\exp\left(x\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \varphi(z)\right)\right): - 1}{e^x - 1}$$

и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{W}(x, z)}{\partial x} =: \varphi(z) \mathcal{W}(z, x) : + z \frac{\partial \mathcal{W}(x, z)}{\partial z} - \frac{e^x \mathcal{W}(z, x) - \varphi(z)}{e^x - 1}.$$

Здесь экспонента означает формальный ряд, действующий на тождественную функцию:

$$\exp\left(x\left(z\frac{\partial}{\partial z} + \varphi(z)\right)\right) = 1 + x\varphi(z) + \frac{x}{2!}\left(\varphi^2(z) + z\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z)\right) + \dots$$

Вторая формула получается с помощью фермионного исчисления и выражается в виде интегрального оператора. Определим интегральный оператор $K : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]] \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$ следующей формулой

$$K[f(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{w \odot z} \frac{dw}{w - z} \varphi(w) f(z),$$

здесь $f(z) \in \mathcal{F} \otimes \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$. Затем приведем явные выражения для гамильтонианов и формулируем

Предложение 3.2 Экспоненциальная производящая функция для гамильтонианов задается формулой

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2\pi i(e^x - 1)} \int_{z \odot 0} dz \frac{e^{xK} - 1}{K} \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right].$$

Гамильтонианы выражаются следующим образом:

$$\mathcal{H}_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{z \odot 0} dz \left(\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \binom{n+1}{l+1} B_{n-l} K^l \left[\frac{\varphi(z)}{z} \right] \right). \quad (8)$$

Здесь B_n обозначают числа Бернулли, а оператор $\frac{e^{xK} - 1}{K}$ означает формальный степенной ряд по K :

$$\frac{e^{xK} - 1}{K} = x + \frac{x^2}{2}K + \frac{x^3}{6}K^2 + \frac{x^4}{24}K^3 + \dots$$

Заметим, что выражения для гамильтонианов, полученные в Предложении 3.2, не являются нормально упорядоченными.

Гамильтонианы $\mathcal{H}_n$ коммутируют, тем самым можно ввести интегрируемую иерархию временных эволюций, порождаемые этими коммутирующими потоками

$$\varphi_{t_n}(z) = [\mathcal{H}_n, \varphi(z)].$$

Мы приводим точные выражения и формулируем следующее

Лемма 3.5 *Иерархия временных эволюций порожденная коммутирующими потоками (8) задается следующим образом*

$$\varphi_{t_k}(z) = \frac{1}{2}B(x) : \int_{x \circ 0} dx \frac{k!}{x^{k+1}} \sinh \left(xz \frac{\partial}{\partial z} \right) e^{xS(xz \frac{\partial}{\partial z})\varphi(z)} : .$$

Классическим пределом полученной иерархия является бездисперсная иерархия КдФ на окружности [36].

4 Операторы Дункла и представление янгиана $Y(\mathfrak{gl}_s)$

Фазовое пространство квантовой спиновой системы Калоджеро-Сазерленда (КС) состоит из функций со значениями в векторном пространстве $(\mathbb{C}^s)^{\otimes N}$, а в гамильтониане системы

$$H^{CS} = - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^N \frac{\beta(\beta - K_{ij})}{\sin^2(q_i - q_j)},$$

присутствует зависимость от спина частиц [18]. Здесь K_{ij} обозначает оператор перестановки i -ой и j -ой частицы. После сопряжения на функцию $\prod_{i < j} |\sin(q_i - q_j)|^\beta$, которое задает основное состояние, и переходя к экспоненциальным переменным $x_i = e^{2\pi i q_i}$ и параметру $\alpha = \beta^{-1}$, более часто используемому в математической литературе, и после сдвига получаем эффективный гамильтониан

$$H = \alpha \sum_{i=1}^N \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i < j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} \left(x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - 2 \sum_{i < j} \frac{x_i x_j}{(x_i - x_j)^2} (1 - K_{ij}),$$

который ограничим на пространство $\Lambda_{\pm}^{s,N}$ полных инвариантов или, соответственно, антиинвариантов симметрической группы S_N в пространстве $V^{\otimes N}$,

$$\Lambda_{\pm}^{s,N} = (V^{\otimes N})^{(\pm)}.$$

Здесь $V = \mathbb{C}[z] \otimes \mathbb{C}^s$. (Анти)инварианты берутся по отношению к диагональному действию симметрической группы, $\sigma_{ij} \mapsto K_{ij}P_{ij}$, где K_{ij} определено выше, а P_{ij} — оператор перестановки i -ой и j -ой тензорной копии пространства $\mathbb{C}^s$.

Далее мы используем операторы Хекмана-Дункла $\mathcal{D}_i^{(N)} : V \otimes \Lambda_{\pm}^{s,N-1} \rightarrow V \otimes \Lambda_{\pm}^{s,N-1}$ в форме, которую предложил Полихронакос [37]:

$$\mathcal{D}_i^{(N)} = \alpha x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{x_i - x_j} (1 - K_{ij}).$$

Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} K_{ij} \mathcal{D}_i^{(N)} &= \mathcal{D}_j^{(N)} K_{ij}, \\ [\mathcal{D}_i^{(N)}, \mathcal{D}_j^{(N)}] &= (\mathcal{D}_j^{(N)} - \mathcal{D}_i^{(N)}) K_{ij}, \end{aligned}$$

которые в свою очередь совпадают с соотношениями вырожденной аффинной алгебры Гекке H_N . Пользуясь дуальностью, предложенной Дринфельдом [10], это представление вырожденной аффинной алгебры Гекке задает представление янгиана $Y(\mathfrak{gl}_s)$ в пространстве $\Lambda_{\pm}^{s,N}$, см [3, 22]

$$t_{ab}(u) = \delta_{ab} + \sum_i \frac{E_{ab,i}}{u \pm \mathcal{D}_i^{(N)}}. \quad (9)$$

Здесь $E_{ab,i}$ означает действие алгебры $\mathfrak{gl}_s$ на i -ой тензорной компоненте,

$$E_{ab,i} \left(\dots \otimes \underbrace{(e^c \otimes x^k)}_i \otimes \dots \right) = \delta_{bc} \left(\dots \otimes \underbrace{(e^a \otimes x^k)}_i \otimes \dots \right).$$

а $t_{ab}(u)$, $a, b = 1, \dots, s$,

$$t_{ab}(u) = \delta^{ab} + \sum_{i=0}^{\infty} t_{ab,i} u^{-i-1}$$

задает производящую функцию генераторов $t_{ab,i}$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}_s)$. Определяющие соотношения янгиана $Y(\mathfrak{gl}_s)$ записываются следующим образом [29]

$$[t_{ab}(u), t_{cd}(v)] = \frac{t_{cb}(u)t_{ad}(v) - t_{cb}(v)t_{ad}(u)}{u - v}.$$

Высшие гамильтонианы спиновой системы КС можно выбрать как элементы квантового детерминанта

$$q \det t(u) = \sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} t_{\sigma(1),1}(u) t_{\sigma(2),2}(u-1) \dots t_{\sigma(m),m}(u-m+1).$$

который порождает центр янгиана $Y(\mathfrak{gl}_s)$ [6, 29].

Нашей основной целью является построение предела определенного выше действия янгиана, когда N стремится к бесконечности. В частности, получаем пределы вышеупомянутого коммутирующего семейства гамильтонианов. Чтобы построить предел нам необходимо исследовать проективные свойства действия янгиана в фазовых пространствах $\Lambda_{\pm}^{s,N}$ модели КС. Такой анализ был проведен Д. Угловым в работе [46], но наше описание отличается от описания [46].

Кольцо Λ_+^N симметрических функций образует проективную систему относительно отображений

$$\omega_N^+ : \Lambda_+^N \rightarrow \Lambda_+^{N-1}, \quad \omega_N^+ f(x_1, \dots, x_N) = f(x_1, \dots, x_{N-1}, 0).$$

Аналогично, пространство Λ_-^N антисимметрических функций образует проективную систему относительно отображений

$$\omega_N^- : \Lambda_-^N \rightarrow \Lambda_-^{N-1}, \quad \omega_N^- f(x_1, \dots, x_N) = (x_1 \dots x_{N-1})^{-1} f(x_1, \dots, x_{N-1}, 0).$$

В отличие от кольца симметричных функций, пространство $\hat{\Lambda}$ не является проективным пределом пространств (анти)симметричных функций из-за наличия нулевой

моды p_0 . С другой стороны, сами гамильтонианы H_k системы КС как в симметричном, так и в кососимметрическом случаях не образуют проективного семейства, поскольку они не подчиняются естественным проекциям

$$\omega_N^+ H_k^{(N+1)} \neq H_k^{(N)} \omega_N^+.$$

Пусть

$$T(u) = \sum_{a,b=1}^s E_{ab} \otimes t_{ab}(u) \in \text{End}(\mathbb{C}^s) \otimes Y(\mathfrak{gl}_s)[u^{-1}]$$

производящая функция образующих янгиана. Введем обозначение $T_N(u)$ для трансфер-матрицы, соответствующая представлению янгиана (9), здесь индекс N обозначает количество частиц. В скалярном случае ($s = 1$) трансфер-матрица $T_N(u)$ является производящей функцией гамильтонианов

$$T_N(u) = 1 + \frac{1}{u} H_0^{(N)} + \frac{1}{u^2} H_1^{(N)} + \frac{1}{u^3} H_2^{(N)} + \dots$$

Далее мы формулируем предложение о проективных свойствах $T_N(u)$ в скалярном симметрическом и кососимметрическом случаях

Предложение 4.1 *(i) В скалярном симметрическом случае выполняется следующее соотношение для операторов $\tilde{\Lambda}_+^N[u^{-1}] \rightarrow \tilde{\Lambda}_+^{N-1}[u^{-1}]$:*

$$\omega_N^+ T_N(u) = \frac{u+1}{u} T_{N-1}(u+1) \omega_N^+;$$

(ii) В скалярном кососимметрическом случае выполняется следующее соотношение для операторов $\tilde{\Lambda}_-^N[u^{-1}] \rightarrow \tilde{\Lambda}_-^{N-1}[u^{-1}]$:

$$\omega_N^- T_N(u) = \frac{u+1}{u} T_{N-1}(u-\alpha-1) \omega_N^-.$$

Применяя соотношения из Предложения 4.1, видим, что перенормированные трансфер-матрицы $\tilde{T}_N(u)$ и $\bar{T}_N(u)$ в симметрическом и кососимметрическом случаях

$$\tilde{T}_N(u) = \frac{u-N}{u} T_N(u-N) \quad \bar{T}_N(u) = T_N(u+\gamma N) \prod_{k=1}^N \frac{u+k\gamma}{u+k\gamma+1},$$

согласуются с проекциями ω_N^+ и ω_N^- , соответственно:

$$\omega_N^+ \tilde{T}_N(u) = \tilde{T}_{N-1}(u) \omega_N^+ \quad \omega_N^- \bar{T}_N(u) = \bar{T}_{N-1}(u) \omega_N^-.$$

Здесь $\gamma = \alpha + 1$. Коэффициенты перенормированной трансфер матрицы можно выбрать в качестве проективной системы гамильтонианов системы КС.

Утверждение Предложения 4.1 обобщается на кососимметрический спиновый случай. Рассмотрим элемент f пространства $\Lambda_-^{s,N}$ как функцию со значениями в $(\mathbb{C}^s)^{\otimes N}$ $f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Определим линейное отображение $\omega_N : \Lambda_-^{s,N} \rightarrow \Lambda_-^{s,N-s}$ следующей формулой

$$\omega_N^-(f) = (x_1 \cdots x_{N-s})^{-1} (1^{\otimes(N-s)} \otimes e_1^\perp \otimes e_2^\perp \cdots \otimes e_s^\perp) f(x_1, \dots, x_{N-s}, 0, \dots, 0).$$

Предложение 4.2 *Выполняются следующие соотношения для операторов $\mathbb{C}^s \otimes \tilde{\Lambda}_-^{s,Ns}[u^{-1}] \rightarrow \mathbb{C}^s \otimes \tilde{\Lambda}_-^{s,(N-1)s}[u^{-1}]$:*

$$\omega_{N_s}^- T_{N_s}(u) = \frac{u+1}{u} T_{(N-1)s}(u - \alpha - s) \omega_{N_s}^-.$$

Положим $\gamma = \alpha + s$ и

$$\bar{T}_{N_s}(u) = T_{N_s}(u + \gamma N) \prod_{k=1}^N \frac{u + k\gamma}{u + k\gamma + 1},$$

рассматриваемый как асимптотический ряд по u^{-1} . Тогда $\bar{T}_{N_s}(u)$ удовлетворяют соотношениям

$$\omega_{N_s}^- \bar{T}_{N_s}(u) = \bar{T}_{(N-1)s} \omega_{N_s}^-$$

и образуют проективную систему трансфер-матриц.

5 Бозонной предел спиновой системы Калоджеро-Сазерленда

В этой главе мы излагаем результаты работы [21] в других формулировках.

Пусть $\mathcal{H}^s$ — алгебра Гейзенберга с образующими $a_{c,k}, c = 1, \dots, s, k = 0, 1, \dots$ и $(q_c)^{\pm 1}$, которые удовлетворяют соотношениям

$$[a_{c,k}, a_{d,l}] = k\delta_{cd}\delta_{k,-l}, \quad q_c a_{d,k} = (a_{d,k} + \delta_{cd}\delta_{k0})q_c.$$

Пусть $\hat{\Lambda}^{(s)}$ — представление алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}^s$ с вакуумным вектором $|0\rangle_+$ такое что

$$a_{c,k}|0\rangle_+ = 0, \quad c = 1, \dots, s, \quad k > 0, \quad q_c|0\rangle_+ = |0\rangle_+, \quad c = 1, \dots, s.$$

Обозначим левый вакуумный вектор как ${}_+\langle 0|$, он удовлетворяет соотношениям

$${}_+\langle 0|a_{c,k} = 0, \quad c = 1, \dots, s, \quad k \leq 0.$$

Для любого $|v\rangle_+ \in \hat{\Lambda}^{(s)}$ рассмотрим матричный элемент $\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) \in V^{\otimes N}$

$$\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) = {}_+\langle 0|\Phi(z_N)\Phi(z_{N-1})\cdots\Phi(z_1)|v\rangle_+,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_c(z) &= \exp\left(\sum_{n>0} \frac{a_{c,n}}{n} z^n\right) q_c : & \hat{\Lambda}^{(s)} &\rightarrow \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes \mathbb{C}[z], & c = 1, \dots, s, \\ \Phi(z) &= \sum_c \Phi_c(z) \otimes e_c : & \hat{\Lambda}^{(s)} &\rightarrow \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V, \end{aligned}$$

обозначают вершинные операторы, и символом $\Phi(z_k)$ кратко обозначается $\Phi(z_k) \otimes 1^{\otimes k-1}$. Мы показываем, что $\tilde{\pi}_N(|v\rangle_+) \in \Lambda_+^{s,N}$ является симметрическим инвариантом.

Нашей целью является нахождение обратного образа действия янгиана (9) в пространстве $\Lambda_+^{s,N}$ относительно отображения $\tilde{\pi}_N$. Мы используем процедуру аналогичную скалярному случаю и строим действие образующей янгиана (9) на вектор $|w\rangle_+ \in \Lambda_+^{s,N}$ в несколько шагов. Сначала представим симметричный тензор $|w\rangle_+ \in \Lambda_+^{s,N}$ как элемент пространства $(\mathbb{C}[x_i] \otimes \mathbb{C}^s) \otimes \Lambda_+^{s,N-1}$, тем самым получив эквивариантное семейство векторов, затем применим к каждому i -ому вектору эквивариантного семейства соответствующий оператор Хекмана-Дункла $\mathcal{D}_i^{(N)}$, получим другое эквивариантное семейство. Последним шагом является симметризация $E_N(u)$ — сумма всех элементов эквивариантного семейства:

$$E_N(u) = \sum_{j=1}^N \sigma_{1j}(u),$$

где $\sigma_{ij} = K_{ij}P_{ij}$ — перестановка i -ого и j -ого тензорного сомножителя.

Для любого $\mathbf{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ определим элемента $\mathcal{S}(\mathbf{F}(z)) \in \hat{\Lambda}^{(s)}$ как формальный интеграл

$$\mathcal{S}(\mathbf{F}(z)) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \Phi^*(z) \mathbf{F}(z),$$

который вычисляет нулевой член ряда Лорана. Здесь

$$\Phi^*(z) = \sum_c \varphi_c^-(z) \cdot \Phi_c^{-1}(z) \otimes e_c^\perp : \quad \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \rightarrow \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes \mathbb{C}[z],$$

ряд $\varphi_c^-(z) = \sum_{n \leq 0} a_{c,n} z^n$ — отрицательная часть производной бозонного поля, и оператор $e_c^\perp : \mathbb{C}^s \rightarrow \mathbb{C}$ задан следующим соотношением $e_c^\perp(e_b) = \delta_{bc}$. Ключевым местом конструкции является следующая лемма, которая устанавливает, что отображение $\mathcal{S}$ является обратным образом конечной симметризации:

Лемма 5.2 Для любого $\mathbf{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ и любого натурального N выполнено следующее равенство элементов $\Lambda_+^{s,N}$:

$$E_N(\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1)(\mathbf{F}(z)) = \tilde{\pi}_N \mathcal{S}(\mathbf{F}(z)).$$

Пусть $\tilde{\mathcal{D}} : \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \rightarrow \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ — линейное отображение, переводящее элемент $\mathbf{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ в

$$\tilde{\mathcal{D}}\mathbf{F}^{(1)}(z) = \alpha z \frac{d}{dz} \mathbf{F}^{(1)}(z) + \frac{z}{2\pi i} \oint \frac{d\xi}{\xi^2(1 - \frac{z}{\xi})} \Phi^{*(2)}(\xi) \Phi^{(2)}(z) \mathbf{F}^{(1)}(\xi)$$

Здесь верхние индексы (i) , $i = 1, 2$ обозначают, в какой тензорной копии пространства $\mathbb{C}^s$ соответствующий вектор лежит или оператор действует. Мы утверждаем, что $\tilde{\mathcal{D}}$ является обратным образом эквивариантного семейства операторов Хекмана $\mathcal{D}_i^{(N)}$.

Предложение 5.1 Для любого $\mathbf{F}(z) \in \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$ выполнено

$$(\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1) \tilde{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(x_1)) = \mathcal{D}_1^{(N)} (\tilde{\pi}_{N-1} \otimes 1) \mathbf{F}(x_1)$$

Пусть $E_{ab} \in \text{End } \mathbb{C}^s$ — матричная единица, $E_{ab}(e_c) = \delta_{bc} e_a$. Введем обозначение $\mathcal{E}_{ab}$ для оператора $1 \otimes 1 \otimes E_{ab} : \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V \rightarrow \hat{\Lambda}^{(s)} \otimes V$:

$$\mathcal{E}_{ab} \mathbf{F}(z) = F_b(z) \otimes e_a.$$

Подводя итог и учитывая приведенные выше утверждения, получаем следующий результат [21]

Теорема 5.1 *Оператор $T_{ab,n}$, заданный формулой*

$$T_{ab,n} = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z} \Phi^*(z) \mathcal{E}_{ab} \tilde{\mathcal{D}}^n \Phi(z)$$

является обратным образом янгианых образующих $t_{ab,n}$, см (9):

$$\tilde{\pi}_N T_{ab,n} = t_{ab,n} \tilde{\pi}_N \quad \text{для любого} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Используя эту конструкцию, мы выводим явные выражения для первых гамильтонианов предельной системы КС.

Далее мы исследуем классический предел полученной системы. Мы вводим оператор $\mathcal{H}^{\text{cl}}$, который является пределом второго гамильтониана, правило соответствия коммутатора и скобки Пуассона следующее: $\beta^{-1}[\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}$. В Предложении 5.3 мы предъявляем уравнения движения, заданные гамильтонианом $\mathcal{H}^{\text{cl}}$:

$$\frac{d\phi_a(z)}{dt} = \{\phi_a(z), \mathcal{H}^{\text{cl}}\}.$$

Здесь и далее $\phi_a(z)$ и $\mathcal{V}_a(z)$ — классические аналоги полей $\varphi_a(z)$ и вершинного оператора $\Phi_a(z)$, соответственно.

Квантовая система интегрируема: имеется бесконечное число интегралов движения, которые получаются из квантового детерминанта производящей функции $T_{ab}(u)$ образующих янгиана. Естественно ожидать, что классическая система также является интегрируемой. В частности, она должна допускать представление Лакса. Рассмотрим операторы L и M , действующие на аналитические функции $f(z)$:

$$\begin{aligned} Lf &= z \frac{\partial}{\partial z} f(z) + \sum_a \mathcal{V}_a(z) (\phi_a^-(z) \mathcal{V}_a^{-1}(z) f(z))^+, \\ Mf &= \left(z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(z) + 2 \sum_b (\phi_b^+(z) \phi_b^-(z))^+ f(z) + 2 \sum_b \mathcal{V}_b(z) z \frac{\partial}{\partial z} (\phi_b^-(z) \mathcal{V}_b^{-1}(z) f(z))^+. \end{aligned}$$

Предложение 5.4 *Операторы L и M задают пару Лакса для классической системы:*

$$\frac{dL}{dt} = [M, L].$$

6 Фермионный предел для спиновой системы

Фермионный предел спиновой системы КС изучался Д. Угловым. Здесь мы предлагаем и развиваем другой подход, который приводит к предельной интегрируемой системе, связанной с системой, полученной в [46], но реализованной в терминах фермионных полей, изложение следует работе [20].

Начинаем с фермионного пространства Фока $\mathcal{F}^s$, которое является представлением алгебры $\mathcal{H}_-^s$ свободных фермионных полей. Введем обозначения $\Psi_c(z)$ и $\Psi_c^*(z)$ для следующих производящих функций элементов алгебра $\mathcal{H}_-^s$:

$$\Psi_c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{cn} z^n, \quad \Psi_c^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_{cn}^* z^{n-1}.$$

Для любого $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ определим матричный коэффициент следующей формулой

$$\pi_N(|v\rangle) = \langle 0 | \Psi(z_N) \Psi(z_2) \cdots \Psi(z_1) | v \rangle, \quad |v\rangle \in \mathcal{F}^s$$

где $\Psi(z) = \sum_{c=1}^s \Psi_c(z) \otimes e_c$ и $e_c \in \mathbb{C}^s$ вновь базисные векторы пространства $\mathbb{C}^s$. Матричный элемент $\pi_N(|v\rangle)$ принадлежит пространству $\Lambda_-^{s,N}$, которое является фазовым пространством конечной системы КС. Затем систематически строится обратный образ при отображении π_N всех операций, необходимых для построения действия янгана в спиновой системе КС с конечным числом частиц.

Ключевым моментом конструкции является оператор, задающий обратный образ конечной антисимметризации $A_N : V \otimes \Lambda_-^{s,N-1} \rightarrow \Lambda_-^{s,N}$ и заданный формулой

$$A_N(u) = u - \sum_{j=2}^N \sigma_{1j}(u).$$

Для любого $\mathbf{F}(z) \in \mathcal{H}_-^s(z) \otimes \mathbb{C}^s$ определим элемент $\mathcal{A}(\mathbf{F}(z)) \in \mathcal{H}_-^s$ как интеграл

$$\mathcal{A}(\mathbf{F}(z)) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z \odot 0} dz \int_{u \odot z} du \frac{\Psi^*(u) \mathbf{F}(z)}{u - z}.$$

Как и в скалярном случае введем вспомогательное пространство $U \in \mathcal{H}_-^s(z) \otimes \mathbb{C}^s$ элементов, которые удовлетворяют специальным условиям, а именно, сохраняют полиномиальное пространство и являются однородными. Эти условия уважает и обратный образ оператора Дункла, который будет введен далее. Следующая лемма устанавливает, что оператор $\mathcal{A}$ является обратным образом конечной антисимметризации:

Лемма 6.2 Для любого $\mathbf{F}(z) \in U$, любого $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ и любого натурального N выполняется следующее равенство элементов пространства $\Lambda_-^{s,N}$:

$$A_N \pi_{N-1,1}(\mathbf{F}(z) \otimes |v\rangle) = \pi_N \mathcal{A}(\mathbf{F}(z)) |v\rangle.$$

Определим оператор $\mathcal{D} : \mathcal{H}_-^s(z) \otimes \mathbb{C}^s \rightarrow \mathcal{H}_-^s(z) \otimes \mathbb{C}^s$ следующим соотношением

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\mathbf{F}(z) = & \alpha z \frac{d}{dz} \mathbf{F}(z) + \\ & \frac{z}{(2\pi i)^2} \int_{\substack{w \odot 0 \\ |w| < |z|}} dw \int_{u \odot w} du \Psi^{*(2)}(u) \frac{\Psi^{(2)}(w) \mathbf{F}^{(1)}(z) - \Psi^{(2)}(z) \mathbf{F}^{(1)}(w)}{(u-w)(z-w)}. \end{aligned}$$

Используя Лемму 6.2, можем отождествить оператор $\mathcal{D}$ с обратным образом эквивариантного семейства операторов Хекмана $\mathcal{D}_i^{(N)}$, действующих на пространстве частично симметричных тензоров

Предложение 6.1 Для любого $\mathbf{F}(z) \in U$, $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ и $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\pi_{N-1,1}(\mathcal{D}\mathbf{F}(x_1) \otimes |v\rangle) = \mathcal{D}_1^{(N)} \pi_{N-1,1}(F(x_1) \otimes |v\rangle).$$

Как и бозонном случае введем операторы :

$$T_{ab,n} = \mathcal{A}\mathcal{E}_{ab}\mathcal{D}^n\Psi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{z \odot 0} dz \int_{u \odot z} du \frac{\Psi^*(u)\mathcal{E}_{ab}\mathcal{D}^n\Psi(z)}{u-z}.$$

Подводя итоги и резюмирую все вышеупомянутые утверждения, мы заключаем, что оператор $T_{ab,n}$ является обратным образом образующих янгиана $t_{ab,n}$, действующих в пространстве $\Lambda_-^{s,N}$.

Proposition 6.2 Для любого $|v\rangle \in \mathcal{F}^s$ и $N \in \mathbb{N}$ выполнено равенство

$$\pi_N(T_{ab,n}|v\rangle) = t_{ab,n}\pi_N|v\rangle.$$

Отметим важность полиномиального свойства полной нулевой моды в построенном действии янгиана в пространстве $\mathcal{F}^s$, которое доказывается с помощью проективных свойств янгиана, действующим в фазовом пространстве модели КС; это позволяет сформулировать следующее

Теорема 6.1 Операторы $T_{ab,n}$ удовлетворяют соотношениям янгиана.

В частности, коэффициенты квантового детерминанта $q \det T(u)$ образуют коммутативное семейство, которые может быть выбрано в качестве пределов гамильтонианов системы КС.

Приложения результатов

Мы отметим некоторые возможные приложения результатов, касающихся пределов интегрируемых систем типа Калоджеро-Сазерленда:

- теория представлений
- теория симметрических функций
- теория узлов, комбинаторика чисел Гурвица

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

1. Khoroshkin S. M., Matushko M., Sklyanin E., *On spin Calogero–Moser system at infinity*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. 2017. Vol. 50. P. 1-26
2. S.M. Khoroshkin, M. G. Matushko, *Fermionic limit of the Calogero-Sutherland system*, Journal of Mathematical Physics. 2019. Vol. 60. No. 7. P. 071706-1-071706-22.

Список литературы

- [1] A. G. Abanov, P. B. Wiegmann, Quantum hydrodynamics, the quantum Benjamin-Ono equation, and the Calogero model, Physical review letters, 95(7), (2005), 076402
- [2] I. Andric, A. Jevicki and H. Levine, On the large-N limit in symplectic matrix models, Nucl. Phys. **B215** (1983), 307.
- [3] T. Arakawa, Drinfeld functor and finite-dimensional representations of the Yangian, Commun. Math. Phys. **205** (1999), 1–18.
- [4] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake, J. Shiraishi, Collective field theory, Calogero-Sutherland model and generalized matrix models, Physics Letters **B 347**:1 (1995), 49-55.
- [5] H. Awata, Y. Matsuo and T. Yamamoto, Collective field description of spin Calogero-Sutherland models, J. Phys. **A29** (1996), 3089-3098.
- [6] D. Bernard, M. Gaudin, F. D. M. Haldane, V. Pasquier, Yang-Baxter equation in spin chains with long range interactions, J. Phys. **A26** (1993), 5219.
- [7] F. Calogero, Solution of the one-dimensional n-body problems with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials, Journal of Mathematical Physics, 12(3), (1971), 419-436,
F. Calogero, Solution of a three-body problem in one dimension, Journal of Mathematical Physics, 10(12), (1969), 2191-2196.
F. Calogero, Exactly solvable one-dimensional many-body problems, Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985), 13(11), (1975), 411-416.
- [8] I. Cherednik, Double affine Hecke algebras and Macdonald's conjectures. Annals of mathematics, 141(1), (1995), 191-216.
- [9] A. Debiard, Polynômes de Tchébychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension p, CR Acad. Sc. Paris, 296, (1983) 529-532.
- [10] V. G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, Funct. Anal. Appl., **20**:1 (1986) 62–64.
- [11] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Transactions of the American Mathematical Society. **311**:1 (1989), 167-183.
- [12] G. J. Heckman, An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam, Inventiones mathematicae **103**:1 (1991), 341-350.
- [13] G. J. Heckman, A Remark on the Dunkl Differential–Difference Operators, In Harmonic analysis on reductive groups. Birkhäuser, Boston, MA. (1991), pp. 181-191.
- [14] G. J. Heckman, E. M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions. I. Compositio Mathematica, 64(3), (1987), 329-352.

- [15] G. J. Heckman, Root systems and hypergeometric functions. II., *Compositio mathematica*, 64(3), (1987), 353-373.
- [16] H. Jack, I.—A class of symmetric polynomials with a parameter, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 69:1, (1970), 1-18.
- [17] A. Jevicki, B. Sakita. Collective field approach to the large-N limit: Euclidean field theories, *Nuclear Physics B* 185.1 (1981): 89-100.
- [18] Y. Kato and Y. Kuramoto, Exact solution of the Sutherland model with arbitrary internal symmetry *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995), 1222.
- [19] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, Fermionic limit of the Calogero-Sutherland system, *Journal of Mathematical Physics* 60, (2019).
- [20] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, Matrix elements of vertex operators and fermionic limit of spin Calogero–Sutherland system, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, arXiv:1608.00599.
- [21] S.M. Khoroshkin, M.G. Matushko, E.K. Sklyanin, On spin Calogero–Moser system at infinity, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **50**:11 (2017), 115203.
- [22] S. M. Khoroshkin, M. L. Nazarov, Yangians and Mickelsson algebras. II., *Moscow Mathematical Journal* **6**:3 (2006), 477-504.
- [23] I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon, Spin generalization of the Calogero-Moser system and the matrix KP equation, *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 170, (1995), 83-120.
- [24] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford university press (1998).
- [25] I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, *Publ. IRMA Strasbourg*, 372, (1988), 131-171.
- [26] I. G. Macdonald, Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials, (Vol. 157). Cambridge University Press, (2003).
- [27] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems. In Orthogonal polynomials, Springer, Dordrecht, (1990), pp. 311-318.
- [28] M. G. Matushko, Calogero-Sutherland system at free fermion point, to appear in *Theoretical and Mathematical Physics*
- [29] A. Molev, M. Nazarov and G. Olshanski, Yangians and classical Lie algebras, *Russian Math. Surveys* **51** (1996), 205–282.
- [30] I. Moser, Three integrable hamiltonian sysems connected with isospectrum deformations *Adv. Math.*, 1976, 16, 354-370.
- [31] M.L. Nazarov and E.K. Sklyanin, Integrable hierarchy of the quantum Benjamin-Ono equation *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications SIGMA* **9** (2013), 078.

- [32] M.L. Nazarov and E. K. Sklyanin, Sekiguchi-Debiard operators at infinity, Communications in Mathematical Physics **324**:3 (2013), 831-849.
- [33] A. Okounkov, R. Pandharipande, Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane, Inventiones mathematicae, 179(3), (2010), 523-557.
- [34] M.A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Quantum integrable systems related to Lie algebras, Physics Reports, 94(6), (1983), 313-404.
M.A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras, Physics Reports, 71(5), (1981), 313-400.
- [35] E.M. Opdam, Root systems and hypergeometric functions III, Compositio Mathematica, 67(1), (1988), 21-49.
- [36] A.K. Pogrebkov, Boson-fermion correspondence and quantum integrable and dispersionless models, Russian Mathematical Surveys (2003) 58(5), 1003.
- [37] A. P. Polychronakos, Exchange operator formalism for integrable systems of particles, Physical Review Letters **69**:5 (1992), 703.
- [38] A. P. Polychronakos, Waves and solitons in the continuum limit of the Calogero-Sutherland model, Physical review letters, 74(26), (1995), 5153.
- [39] N. Reshetikhin, Degenerate integrability of quantum spin Calogero–Moser systems, Letters in Mathematical Physics, 107(1), (2017), 187-200.
- [40] N. Reshetikhin, Degenerate integrability of the spin Calogero–Moser systems and the duality with the spin Ruijsenaars systems, Letters in Mathematical Physics, 63(1), (2003), 55-71.
- [41] P. Rossi, Gromov–Witten invariants of target curves via symplectic field theory, Journal of Geometry and Physics **58**:8 (2008), 931-941.
- [42] J. Sekiguchi, Zonal spherical functions on some symmetric spaces, Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, 12(Supplement), (1977), 455-459.
- [43] A. N. Sergeev, A. P. Veselov, Dunkl operators at infinity and Calogero-Moser systems, International Mathematics Research Notices, **21** (2015), 10959-10986.
- [44] B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension, Physical Review A, 4(5), (1971), 2019.
B. Sutherland, Exact results for a quantum many-body problem in one dimension. II, Physical Review A 5.3 (1972): 1372.
- [45] K. Takemura, D. Uglov, The orthogonal eigenbasis and norms of eigenvectors in the spin Calogero-Sutherland model, Journal of Physics A: Mathematical and General, 30(10), (1997), 3685.
- [46] D. Uglov, Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and Basic modules of the affine Lie algebra $\widehat{sl}(N)$, arXiv preprint q-alg/9705010 (1997).
- [47] Uglov D. Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of affine $\widehat{gl}_N$, eprint arXiv preprint math/9802048. – 1998.