На правах рукописи

Егорченкова Елизавета Алексеевна

ВЕРБАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГРУПП НАД БЕСКОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург

2019

Работа выполнена на кафедре алгебры Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена»

Научный руководитель:

Гордеев Николай Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Степанов Алексей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, доцент Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет»

Лурье Борис Бениаминович, доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 25 декабря 2019 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.02 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «____» __________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Пусть G — произвольная группа. Для любого слова $w = w(x_1, \ldots, x_n) \in F_n$ свободной группы F_n можно задать *вербальное отображение*

$$\widetilde{w} : G^n \to G$$

следующей формулой:

$$\widetilde{w}\big((g_1, \ldots, g_n)\big) \overset{def}{=} w(g_1, \ldots, g_n).$$

Иными словами, мы подставляем g_i вместо x_i в слово w.

Актуальность и степень разработанности темы. Свойства вербальных отображений исследуются в теории групп в течение многих лет. Они связаны с различными теоретико-групповыми задачами. Ярким примером здесь является проблема О. Оре, которая на языке вербальных отображений эквивалентна проблеме доказательства сюръективности отображений $\widetilde{w}$ для конечной простой группы при $w = [x_1, x_2]$.

В последние 10-15 лет сильно возрос интерес к вербальным отображениям простых (и полупростых) алгебраических групп и их групп точек над различными полями. Здесь отправной точкой является теорема А. Бореля:

Вербальное отображение $\widetilde{w} : G^n \to G$ полупростой алгебраической группы G доминантно для $w \neq 1$.

Однако уже в работе А. Бореля был приведен пример

$$w = x^2, G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$$

несюръективного вербального отображения. Тем не менее, из теоремы Бореля следует сюръективность вербального отображения для полупростой алгебраической группы в случае, когда

$$w(x_1, \ldots, x_n) = w_1(x_1, \ldots, x_k) w_2(x_{k+1}, \ldots, x_n),$$

т.е. слово w представляется в виде произведения двух слов от независимых переменных (здесь нумерация переменных может быть произвольной). Следует отметить, что проблема описания сюръективных и несюръективных вербальных отображений простых алгебраических групп полностью решена только для слов вида $w = x^n$, $w = [x_1, x_2]$. Например, для простейшей группы PGL_2 над полем характеристики ноль нет ни одного примера несюръективности нетривиальных вербальных отображений. Исследования сюръективных вербальных отображений простых (полупростых) алгебраических групп интенсивно продолжаются в течение последних лет.

Еще труднее проблема сюръективности вербальных отображений становится для групп вида $G = \mathcal{G}(K)$, где $\mathcal{G}$ — простая (полупростая) алгебраическая группа, определенная над полем K. Здесь можно указать множество примеров несюръективности. Однако сюръективность часто удается доказать, если слово w раскладывается в произведение

$$w = w_1 w_2 \cdots w_k$$

достаточного числа слов с независимыми переменными. Получению оценок для различных k были посвящены работы А. Шалева, А. Люботского, М. Ларсена, М. Либека, П.Х. Тьеппа и др. По аналогии с проблемой Варинга из теории чисел, эти исследования получили название "Проблемы Варинга для вербальных отображений групп".

Исследования такого типа естественно разбиваются на несколько случаев, сильно различающихся как по результатам, так и по методам исследования:

1. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ расщепима (группа Шевалле);

2. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ изотропна, но нерасщепима;

3. поле K бесконечно и группа $\mathcal{G}$ анизотропна;

4. поле K конечно;

5. поля специального вида $K = \mathbb{R}, \mathbb{Q}_p$, и т.д.

В данной работе мы в основном рассматриваем случай 1. и, отчасти, случаи 2. и 5.

Для простой односвязной алгебраической группы $\mathcal{G}$, определенной и расщепимой над бесконечным полем K, Хэем-Ларсеном-Шалевым был получен следующий важный результат:

Теорема. *Пусть $G = \mathcal{G}(K)$ и пусть $w = w_1w_2w_3w_4 \in F_n$ – произведение четырех слов от независимых переменных. Тогда любой нецентральный элемент группы G содержится в образе вербального отображения $\widetilde{w}$.*

Цель исследования — описание сюръективных вербальных отображений групп K-точек простых алгебраических групп, определенных и расщепимых (изотропных) над бесконечным полем. Для достижения цели поставлены следующие задачи:

1. Рассмотреть ситуацию, описанную в теореме Хэя-Ларсена-Шалева и распространить этот результат на случай слов, раскладывающихся в произведения трех слов от независимых переменных (исключая случаи групп типа B_2 и G_2);

2. Получить результат, аналогичный описанному выше, для групп типа B_2 и G_2;

3. Рассмотреть вербальные отображения для слов, раскладывающихся в произведение двух слов с независимыми переменными;

4. Рассмотреть случай изотропной, но нерасщепимой группы над телом и получить результаты о коммутаторной ширине.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты важны как для понимания природы вербальных отображений, так и для структурной теории алгебраических групп.

Методы исследования. В данной работе применялись как стандартные методы теории алгебраических групп, так и некоторые специальные методы этой теории: разложения Гаусса с заданной полупростой частью, теория пересечений регулярных классов, сопряженных с клетками Брюа, теория специальных элементов Кокстера и др.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми в теории алгебраических групп. Мы улучшаем результат Хэя-Ларсена-Шалева, а также получаем ряд результатов о вербальных отображениях, соответствующих произведению двух слов с независимыми переменными. В последней главе мы рассматриваем также случай изотропной, но нерасщепимой группы над телом.

Степень достоверности. Все утверждения диссертации снабжены подробными доказательствами, которые основаны на хорошо известных результатах теории алгебраических групп.

Апробация работы. По теме исследования было прочитано три доклада:

1. Е. А. Егорченкова. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями// Семинар кафедры алгебры РГПУ им. А.И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия. 19.04.2019;

2. Е. А. Егорченкова. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями// Городской алгебраический семинар им. Д.К. Фаддеева. ПОМИ, Санкт-Петербург, Россия. 13.05.2019;

3. Е. А. Егорченкова. О коммутаторной ширине группы SL_n над телами// International Workshop "Actual Problems of the Theory of Algebraic Groups". Herzen University, Saint Petersburg, Russia. 16.09.2019-18.09.2019.

Положения, выносимые на защиту.

В теоремах 1, 2 и 3 $\mathcal{G}$ — это простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$, $Z(G)$ — центр G, $\operatorname{Im}\widetilde{w}$ — образ отображения $\widetilde{w}$. Пусть

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(X_1, \dots, X_k) \in F_k, \\ w_2 &= w_2(Y_1, \dots, Y_l) \in F_l, \\ w_3 &= w_3(Z_1, \dots Z_m) \in F_m \text{ —} \end{aligned}$$

три нетривиальных слова с независимыми переменными, где F_k, F_l, F_m — свободные группы ранга k, l и m соответственно. Тогда

$$w := w_1 w_2 w_3 \in F_{k+l+m} \text{ —}$$

нетривиальное слово от переменных $\{X_p\}, \{Y_q\}, \{Z_r\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{G}$ — простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$. Положим, что $\mathcal{G}$ не является группой типа B_2 или G_2. Пусть, далее,*

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Тогда

$$G \setminus Z(G) \subset \operatorname{Im}\widetilde{w}.$$

Теорема 2. *Пусть $w = w_1 w_2$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда*

1. *любой регулярный расщепимый полупростой элемент из G принадлежит $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$, если G — группа типов A_r, C_r, G_2 или K — совершенное поле, у которого $\dim K \leqslant 1$;*

2. *любой регулярный унипотентный элемент из G принадлежит $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$, если G — группа типа A_r или K — совершенное поле, характеристика которого не является плохим простым числом для G и $\dim K \leqslant 1$.*

Здесь $\dim K$ — когомологическая размерность K.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G}$ — группа типа B_2 или G_2. Тогда*

$$B\,\mathfrak{n}_0\,B \subset \mathrm{Im}\,\widetilde{w},$$

где $w = w_1w_2w_3$ — произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными.

Здесь $B\mathfrak{n}_0B$ — большая клетка Брюа группы $G = \mathcal{G}(K)$, а $\mathrm{Im}\,\widetilde{w}$ — образ вербального отображения

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G.$$

Теорема 4. *Пусть K — поле характеристики ноль, а $\mathcal{H}$ — простая алгебраическая группа, определенная над полем K. Предположим, что $\mathcal{H}$ — изотропная, но не обязательно расщепимая группа. Пусть, далее, $H = \mathcal{H}(K)$ и $w = w_1w_2 \in F_n$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент поля K лежит в образе вербального отображения $\widetilde{w} : H^n \to H$.*

Пусть D — некоммутативное тело, $D^* = D\backslash\{0\}$ — мультипликативная группа D, $[D^*, D^*]$ — коммутаторная подгруппа D^*,

$$E_n(D) = \big\langle t_{ij}(\lambda) \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n,\ \ \lambda \in D\big\rangle,$$

где $t_{ij}(\lambda)$ — (ij)-трансвекция, $Z\big(E_n(D)\big)$ — центр $E_n(D)$.

Теорема 5. *Пусть $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$ и пусть*

$$\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^* \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Далее, пусть

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D) \text{ —}$$

вербальное отображение на $\mathrm{GL}_n(D)$*, соответствующее тому же слову* w*. Предположим, что* $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$*. Тогда*

$$\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

Если $n > 2$*, то*

$$\widetilde{w}\big(E_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

В частности, если каждый элемент из $[D^*, D^*]$ *является коммутатором элементов из* D^**, то каждый нецентральный элемент из* $E_n(D)$ *является коммутатором элементов из* $E_n(D)$*.*

Объем и структура работы. Текст диссертации изложен на 73-х страницах. Он включает в себя введение, три главы и заключение. Список литературы состоит из 30-ти наименований.

Результаты глав 1 и 3 были опубликованы в совместных работах с научным руководителем. При этом научным руководителем были сформулированы задачи и указаны некоторые приемы (например, разложение Гаусса с заданной полупростой частью), использованные в его предыдущих работах. Также при написании работы были использованы некоторые методические указания руководителя. Все формулировки и доказательства, приведенные в диссертации, были получены диссертантом самостоятельно.

Содержание работы

В **первой главе** “Произведения трех вербальных отображений простых расщепимых алгебраических групп” рассматривается ситуация из теоремы Хэя-Ларсена-Шалева.

Пусть K — поле. Любую алгебраическую группу H над K мы отождествляем с группой $\mathcal{H}(\overline{K})$, где $\overline{K}$ — алгебраическое замыкание K. $\mathcal{G}$ — простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над K, $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$.

Пусть

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(X_1, \ldots, X_k) \in F_k, \\ w_2 &= w_2(Y_1, \ldots, Y_l) \in F_l, \\ w_3 &= w_3(Z_1, \ldots Z_m) \in F_m \text{ —} \end{aligned}$$

три нетривиальных слова с независимыми переменными, где F_k, F_l, F_m — свободные группы ранга k, l и m соответственно. Тогда

$$w := w_1 w_2 w_3 \in F_{k+l+m} \text{ —}$$

нетривиальное слово от переменных $\{X_p\}, \{Y_q\}, \{Z_r\}$. Основным результатом этой главы является следующая теорема:

Теорема 1 *Пусть $\mathcal{G}$ — простая односвязная группа, определенная и расщепимая над бесконечным полем K, и пусть $G = \mathcal{G}(K)$. Положим, что $\mathcal{G}$ не является группой типов B_2 и G_2. Пусть, далее,*

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Тогда

$$G \setminus Z(G) \subset \operatorname{Im} \widetilde{w}.$$

Здесь $\operatorname{Im} \widetilde{w}$ — образ вербального отображения $\widetilde{w}$.

Мы доказываем этот результат редукцией к некой параболической группе $\mathcal{P}$ из $\mathcal{G}$ с фактором Леви, простые компоненты которого имеют тип A_r. Далее, мы используем теорему Лева о произведении трех регулярных классов сопряженных элементов группы $\mathrm{SL}_n(K)$, $n > 2$ и лемму Вассерштайна-Виланд о произведениях трех нецентральных классов подобия для групп $\mathrm{SL}_2(K)$. Также, мы используем представление элемента расщепимой простой группы в разложении Гаусса с заданной полупростой частью.

Результат теоремы нельзя прямо распространить на случаи B_2 и G_2 с помощью методов, что мы используем в первой главе. Группы этих типов рассматриваются в следующей главе.

Во **второй главе** "Произведения двух вербальных отображений простых расщепимых алгебраических групп. Случай групп типа B_2 и G_2" мы рассматриваем вербальные отображения для слов, которые раскладываются в произведение двух слов с независимыми переменными. Пусть $\mathcal{G}$ — простая односвязная алгебраическая группа, определенная и расщепимая над K, $G = \mathcal{G}(K)$ — группа K-точек группы $\mathcal{G}$. Для группы G мы получаем следующий результат:

Теорема 2 *Пусть $w = w_1 w_2$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда*

1. *любой регулярный расщепимый полупростой элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типов A_r, C_r, G_2 или K — совершенное поле, у которого $\dim K \leqslant 1$;*

2. *любой регулярный унипотентный элемент из G принадлежит $\operatorname{Im} \widetilde{w}$, если G — группа типа A_r или K — совершенное поле, характеристика которого не является плохим простым числом для G и $\dim K \leqslant 1$.*

Здесь $\dim K$ — когомологическая размерность K.

Далее, в этой главе мы рассматриваем простые односвязные группы $\mathcal{G}$ типов B_2 и G_2, определенные и расщепимые над бесконечным полем K. Для расщепимой группы $\mathcal{G}$ имеется разложение Брюа

$$\mathcal{G} = \bigcup_{w \in W} \mathcal{B}\, \mathfrak{n}_w\, \mathcal{B},$$

где $\mathcal{B}$ — K-определенная подгруппа Бореля группы $\mathcal{G}$ и $\mathfrak{n}_w$ — фиксированный прообраз элемента w группы Вейля W в $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})$ — нормализаторе соответствующего максимального K-расщепимого тора из $\mathcal{G}$.

Используя пункт 1 из теоремы 2, мы получаем аналогичный теореме 1 результат для больших клеток Брюа:

Теорема 3 *Пусть $\mathcal{G}$ — группа типов B_2 или G_2. Тогда*

$$B\, \mathfrak{n}_0\, B \subset \operatorname{Im} \widetilde{w},$$

где $w = w_1w_2w_3$ — произведение трех нетривиальных слов с независимыми переменными.

Здесь $\mathcal{B}\,\mathfrak{n}_0\,\mathcal{B}$ — большая клетка Брюа группы $G = \mathcal{G}(K)$, а $\operatorname{Im}\widetilde{w}$ — образ вербального отображения

$$\widetilde{w} : G^{k+l+m} \to G.$$

Также во второй главе мы рассматриваем группы над полями характеристики ноль. С помощью теоремы Морозова-Джекобсона и пункта 2 из теоремы 2 мы получаем следующий результат:

Теорема 4 *Пусть K — поле характеристики ноль, а $\mathcal{H}$ — простая алгебраическая группа, определенная над полем K. Предположим, что $\mathcal{H}$ — изотропная, но не обязательно расщепимая группа. Пусть, далее, $H = \mathcal{H}(K)$ и $w = w_1w_2 \in F_n$ — произведение двух нетривиальных слов с независимыми переменными. Тогда любой унипотентный элемент поля K лежит в образе вербального отображения $\widetilde{w} : H^n \to H$.*

В **третьей главе** "Произведение коммутаторов полной линейной группы над телом" мы рассматриваем случай изотропной, но нерасщепимой редуктивной группы $G = \mathrm{GL}_n(D)$, где D — некоммутативное тело.

Пусть $E_n(D)$ — группа, порожденная трансвекциями $\mathrm{GL}_n(D)$. Мы рассматриваем следующее вербальное отображение:

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D),$$

где

$$w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i].$$

Мы получаем следующий результат о коммутаторной ширине:

Теорема 5 *Пусть $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$ и пусть*

$$\widetilde{w} : D^{*2k} \to D^* \text{ —}$$

соответствующее вербальное отображение. Далее, пусть

$$\widetilde{w} : \mathrm{GL}_n(D)^{2k} \to E_n(D) \text{ —}$$

вербальное отображение на $\mathrm{GL}_n(D)$, соответствующее тому же слову w. Предположим $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$. Тогда

$$\widetilde{w}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

Если к тому же $n > 2$, тогда

$$\widetilde{w}\big(E_n(D)^{2k}\big) \supset E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big).$$

В частности, если каждый элемент из $[D^*, D^*]$ является коммутатором элементов из D^*, тогда каждый нецентральный элемент из $E_n(D)$ является коммутатором элементов из $E_n(D)$.

Так как любой элемент z группы $Z\big(E_n(D)\big)$ можно представить как произведение двух нецентральных элементов $g \in E_n(D) \setminus Z\big(E_n(D)\big)$ и $g^{-1}z$, то из теоремы 5 получаем

Следствие 1 *Если $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ для $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$, то*

$$\widetilde{\omega}\big(\mathrm{GL}_n(D)^{4k}\big) = E_n(D)$$

для $\omega = \prod_{i=1}^{2k}[x_i, y_i]$. При этом

$$\widetilde{\omega}\big(E_n(D)^{4k}\big) = E_n(D),$$

если $n > 2$.

Если любой нецентральный элемент группы $E_n(D)$ является произведением k коммутаторов, то любой неединичный элемент группы $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ является произведением k коммутаторов. Действительно, образ $w(g_1, \dots, g_m)$ в $E_n(D)/Z(D)$ совпадает с элементом $w(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_m)$, где $\bar{g}_i$ – это образ элемента $g_i \in E_n(D)$ в $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$. Единичный элемент также является произведением k коммутаторов (например, коммутирующих элементов). Таким образом, получаем из теоремы 5

Следствие 2 *Если $\widetilde{w}(D^{*2k}) = [D^*, D^*]$ для $w = \prod_{i=1}^{k}[x_i, y_i]$ и $n > 2$, то*

$$\widetilde{w}\Bigg(\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big)^{2k}\Bigg) = E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big).$$

Если мы обозначим через $l_{D^*}\big([D^*, D^*]\big)$ коммутаторную ширину $[D^*, D^*]$ в D^*, а через $l\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big)$ — коммутаторную ширину $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$, тогда следствие 2 дает нам следующее неравенство

$$l\Big(E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)\Big) \leqslant l_{D^*}\big([D^*, D^*]\big) \ \ (n > 2).$$

Остается открытым вопрос о представлении любого нецентрального элемента простой группы $E_n(D)/Z\big(E_n(D)\big)$ в виде единственного коммутатора.

Публикации по теме работы

По теме работы опубликовано три статьи в журналах, которые входят в список рекомендованных ВАК для соискателей ученой степени кандидата и доктора наук. Все журналы входят в базы SCOPUS и Mathscinet. Archiv der Mathematik входит также в базу Web of Science.

1. Egorchenkova, E. Products of three word maps on simple algebraic groups / E. Egorchenkova, N. Gordeev // Archiv der Mathematik. – 2019. – Volume 112. – Issue 2. – P. 113-122.

2. Егорченкова Е.А. Произведения коммутаторов полной линейной группы над телом / Е.А. Егорченкова, Н.Л. Гордеев // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2018. – Том 470. – С. 88-104.

3. Егорченкова Е.А. Вербальные отображения групп Шевалле над бесконечными полями / Е.А. Егорченкова // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2019. – Том 478. – С. 108-127.