

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Ложников Михаил Андреевич

О некоторых разностных схемах для уравнений газовой динамики

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: Кобельков Георгий Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Амосов Андрей Авенирович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического моделирования
Института автоматики и вычислительной техники
национального исследовательского университета «МЭИ»

Головизнин Василий Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры вычислительных методов факультета
вычислительной математики и кибернетики МГУ
имени М. В. Ломоносова

Поляков Сергей Владимирович
доктор физико-математических наук, старший
научный сотрудник, ведущий научный сотрудник
института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН

Защита диссертации состоится 16 октября 2019 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.05.01 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: vasenin@msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М. В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/202490187/>.

Автореферат разослан 16 сентября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.05.01,
к.ф.-м.н.

Кривчиков Максим Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Диссертация посвящена созданию неявных разностных схем для уравнений газовой динамики и исследованию свойств предложенных схем. Решение задач газовой динамики является одной из интереснейших проблем вычислительной математики, исследованию этих задач посвящено много научных трудов, среди которых важно отметить работы Б.Л. Рождественского и Н.Н. Яненко¹, а также работы А.А. Самарского и Ю.П. Попова².

На практике необходимость решения задач газо- и гидродинамики возникает во многих областях промышленности, например, таких как авиастроение, разработка струйных логических элементов, а также проектирование гидравлических систем, трубопроводов, используемых в широком классе прикладных задач от перекачки нефти до систем охлаждения в атомных реакторах.

Одной из интересных особенностей этих задач является наличие контактных разрывов и ударных волн, которые приводят к необходимости работать с разрывными решениями.

Впервые подход к расчёту таких задач был представлен в работе J. Von Neumann и R. D. Richtmyer³. Предложенный ими метод предполагает введение искусственной вязкости в уравнение неразрывности для размазывания резких скачков решения на несколько ячеек сетки. Таким образом, в областях разрывов решение представляется непрерывными функциями с большими градиентами на достаточно малых промежутках. Это направление получило широкое распространение. Одним из наиболее известных современных алгоритмов, основанных на нём, является метод адаптивной искусственной вязкости (АИВ), впервые опубликованный в работе И.В. Попова и И.В. Фрязинова⁴. К числу достоинств подхода АИВ можно отнести использование метода опорных операторов⁵, обеспечивающего сопряжённость сеточных операторов дивергенции и градиента, а также использование приёмов построения полностью консервативных разностных схем⁶. Недостатками метода АИВ являются жёсткое ограничение на шаг по времени, а также отсутствие точных теоретических оценок, поскольку все выкладки делаются при “замороженных” коэффициентах.

¹Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М. : Наука, 1978.

²Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М. : Наука, 1992.

³Von Neumann J., Richtmyer R. D. A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks // Journal of Applied Physics. 1950. Т. 21. С. 232–237.

⁴Попов И. В., Фрязинов И. В. Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 8. С. 48–60.

⁵Разностные схемы на нерегулярных сетках / А. А. Самарский, А. В. Колдоба, Ю. А. Повещенко, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский. Минск, 1996.

⁶Самарский А. А., Попов Ю. П.. Указ. соч.

Алгоритмы, основанные на введении искусственной вязкости, строятся при помощи разложения в ряд Тейлора, следовательно требуют некоторой гладкости решения. В работе С. К. Годунова⁷ был впервые предложен метод, предназначенный для расчёта разрывных решений. Подход Годунова вводит нелинейный алгоритм нахождения соотношений на разрывах таким образом, что схема Годунова предоставляет точное решение для задачи Римана⁸. Кроме того, С. К. Годунов ввёл понятие монотонных схем и сформулировал так называемый запрет Годунова, утверждающий, что не существует монотонных схем второго порядка аппроксимации. Позднее этот термин получил развитие в работах В. В. Остапенко⁹, в которых были предложены сильно монотонные разностные схемы. В последнее время получили распространение схемы типа TVD, впервые опубликованные в работе А. Harten¹⁰, позволяющие обойти запрет Годунова, введя понятие схем, не увеличивающих общую вариацию.

Отметим, что подавляющее большинство разностных схем для уравнений газовой динамики являются явными с ограничением на шаг по времени, зависящим от скорости и вводимым посредством числа Куранта. В диссертационной работе автора предлагаются неявные разностные схемы без ограничения на шаг по времени, теоретическое обоснование предложенных схем проводится без использования принципа замороженных коэффициентов.

В настоящее время практически отсутствуют какие-либо теоретические результаты, касающиеся решения задачи как в дифференциальной, так и в разностной постановке. Например, одним из естественных требований при решении задач газовой динамики является выполнение свойства положительности плотности, которое следует из физики. Однако данный вопрос практически нигде не исследовался. Исключением является работа А. А. Злотника¹¹, в которой в переменных Эйлера была доказана отделимость плотности от нуля и стабилизация решения в дифференциальной постановке. Также стоит отметить статью А. А. Злотника и А. А. Амосова¹², в которой доказана отделимость плотности от нуля в переменных Лагранжа, существование, единственность и устойчивость решений разностной схемы. Кроме того, в работе

⁷ Годунов С. К. Разностный метод численного расчёта разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47, вып. 3. С. 271—306.

⁸ Toro E. F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Berlin : Springer-Verlag, 2009.

⁹ Остапенко В. В. О монотонности разностных схем // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, вып. 5. С. 1111—1126 ; Остапенко В. В. О сильной монотонности трёхточечных разностных схем // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39, вып. 6. С. 1357—1367 ; Остапенко В. В. О сильной монотонности нелинейных разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, вып. 7. С. 1170—1185.

¹⁰ Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal of Computational Physics. 1983. Т. 49, № 3. С. 357—393. ISSN 0021-9991.

¹¹ Straškraba I., Zlotnik A. On a decay rate for 1D-viscous compressible barotropic fluid equations // Journal of Evolution Equations. 2002. Т. 2, № 1. С. 69—96.

¹² Амосов А. А., Злотник А. А. Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27, № 7. С. 1032—1049.

А. В. Попова¹³ для системы уравнений вязкого баротропного газа в переменных Эйлера при помощи некоторого преобразования исходной системы в предположении положительности плотности строится разностная аппроксимация, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. В недавней работе Ф. Б. Имранова, Г. М. Кобелькова, А. Г. Соколова¹⁴ был предложен новый подход к построению разностных схем для одномерных уравнений динамики идеального баротропного газа в переменных Эйлера. Этот подход позволяет строить разностные схемы, обеспечивающие выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующие положительность сеточной функции плотности.

В диссертационной работе автор обобщает идеи, предложенные Ф. Б. Имрановым, Г. М. Кобельковым и А. Г. Соколовым¹⁵, на другие постановки задач, а также на многомерный случай, в том числе и для неструктурированных сеток.

Цели работы.

1. Построение аппроксимации, обеспечивающей положительность сеточной функции плотности, одномерных уравнений динамики баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением.
2. Построение метода стабилизации уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению.
3. Построение аппроксимации, обеспечивающей положительность сеточной функции плотности, двумерных уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках.
4. Обобщение метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа на неструктурированных тетраэдральных сетках.
5. Проведение численных экспериментов, исследующих поведение указанных выше схем на модельных задачах. Численная оценка сходимости предложенных методов, сравнение указанных методов с другими алгоритмами на стандартных тестах¹⁶.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся: обоснование актуальности, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, а

¹³ Попов А. В., Жуков К. А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 4. С. 516–523.

¹⁴ Имранов Ф. Б., Кобельков Г. М., Соколов А. Г. О разностной схеме для уравнений баротропного газа // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 4. С. 388–391.

¹⁵ Там же.

¹⁶ Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations : тех. отч. / LANL. Los Alamos, 2001. LA-UR-01-6225.

также следующие положения, которые подтверждаются результатами исследования, представленными далее в заключении диссертации.

1. Построена аппроксимация одномерных уравнений динамики баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением. Доказан сеточный аналог закона сохранения массы, положительность сеточной функции плотности, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
2. Предложен метод стабилизации решения уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению по начальным условиям. Получены оценки скорости сходимости для линеаризованной задачи.
3. Построена аппроксимация двумерных уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках. Доказан сеточный аналог закона сохранения массы, положительность сеточной функции плотности, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
4. Предложена модификация метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики вязкого теплопроводного сжимаемого газа на неструктурированных тетраэдральных сетках. Предложена комбинация поправок Лакса–Вендрофа и МакКормака, позволяющая провести частичную монотонизацию разностного решения точно так же, как и в оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости, несмотря на увеличенный шаблон схемы.
5. Проведено сравнение предложенных методов с другими алгоритмами на модельных задачах, проведена численная оценка сходимости предложенных методов. Проведено сравнение результатов расчётов с результатами натурного эксперимента.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. Основными из них являются следующие.

1. Впервые предложена аппроксимация для расчёта одномерных уравнений динамики вязкого баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Доказаны сеточный аналог закона сохранения массы, энергетическое неравенство и существование разностного решения.
2. Впервые предложен метод численной стабилизации нелинейных уравнений динамики вязкого баротропного газа по начальным данным к стационарному решению. Получены оценки скорости сходимости для полунейвной линеаризации исходной задачи.

3. Впервые предложена конечно-разностная аппроксимация уравнений динамики вязкого баротропного газа на треугольных сетках, обеспечивающая положительность сеточной функции плотности и гарантирующая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы. Доказаны энергетическое неравенство и существование разностного решения.
4. Предложена модификация метода адаптивной искусственной вязкости на случай уравнений динамики сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для метода адаптивной искусственной вязкости на тетраэдральных сетках предложены модификации сеточных операторов дивергенции и градиента, позволяющие обойти условие отсутствия тупоугольных элементов, являющееся критическим в трёхмерном случае.

Теоретическая значимость работы. Теоретические исследования, проведённые для анализа предложенных разностных схем, гарантирующих положительность сеточной функции плотности, являются важным дополнением вычислительной математики, а именно теории конечно-разностных аппроксимаций уравнений газовой динамики.

Практическая значимость работы. Аппроксимации на треугольных и тетраэдральных сетках являются эффективным инструментарием, который на практике можно использовать для численного моделирования задач вычислительной математики в общем виде в областях произвольной формы посредством использования стандартных сеточных генераторов таких, как Gmsh или Ani2D.

Методология и методы исследования. Для построения разностных схем использовались идеи аппроксимаций, предложенные в работах А. Г. Соколова¹⁷, а также И. В. Попова и И. В. Фрязинова¹⁸. Для обоснования полученных схем использовалась методика, предложенная Г. М. Кобельковым¹⁹. Исследование стабилизации к стационарному решению производилось с помощью идей, предложенных в работах А. А. Корнева²⁰ и Е. В. Чижонкова²¹. Кроме того, использовались методы линейной алгебры, методы функционального анализа, а также методы построения и обоснования разностных схем. Для проведения численных расчётов был написан комплекс программ, предназначенный для использования на системах с раздельной памятью. Пересылка данных между узлами реализована при помощи технологии MPI. Чис-

¹⁷Имранов Ф. Б., Кобельков Г. М., Соколов А. Г. О разностной схеме для уравнений баротропного газа.

¹⁸Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 6. С. 109–127.

¹⁹Имранов Ф. Б., Кобельков Г. М., Соколов А. Г. Указ. соч.

²⁰Жуков К. А., Корнев А. А., Попов А. В. Об ускорении процесса выхода на стационар решений линеаризованной системы динамики вязкого газа. I. // Вестник МГУ. 2018. № 1. С. 26–32.

²¹Chizhonkov E. V. Numerical aspects of one stabilization method // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 2003. Т. 18, № 5. С. 363–376.

ленные эксперименты проводились на суперкомпьютерном комплексе “Ломоносов” с использованием до 1024 ядер.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Вычислительная математика — область науки, к которой относятся разработка и теория методов численного решения математических задач, возникающих при моделировании естественнонаучных и прикладных проблем, а также реализация методов в практическом решении задач с применением современных ЭВМ. Области исследования:

1. создание алгоритмов численного решения задач алгебры, анализа, дифференциальных и интегральных уравнений, математической физики, теории вероятностей и статистики, типичных для приложений математики к различным областям науки и техники;
2. разработка теории численных методов, анализ и обоснование алгоритмов, вопросы повышения их эффективности;
4. реализация численных методов в решении прикладных задач, возникающих при математическом моделировании естественнонаучных и научно-технических проблем, соответствие выбранных алгоритмов специфике рассматриваемых задач.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

1. на конференции “Ломоносов 2018”, Москва, Россия, МГУ имени М.В.Ломоносова (9–13 апреля 2018);
2. на конференции Ломоносовские чтения–2018, секция Математики, Москва (16–26 апреля 2018);
3. на XVII Всероссийской молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения–2018” (г. Казань, 23–28 ноября 2018);
4. на научном семинаре института вычислительной математики имени Г. И. Марчука РАН (г. Москва, 20 февраля 2018);
5. на научном семинаре кафедры математического моделирования АВТИ МЭИ (г. Москва, 3 октября 2018);
6. на научном семинаре института прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (г. Москва, 1 ноября 2018);
7. на международной научной конференции “Современные проблемы математики и механики”, посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко (г. Москва, 14 мая 2019);
8. на научном семинаре кафедры Вычислительной математики механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2014–2019гг).

Публикации. По теме диссертации опубликовано четыре статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.07 — “Вычислительная математика” и входящих в списки Scopus и/или RSCI, а также три публикации в сборниках материалов конференций.

Структура диссертационной работы. Работа состоит из введения, пяти глав, списка публикаций, заключения и списка литературы. Список литературы состоит из 53 наименований. Объём работы составляет 110 страниц.

Содержание работы.

Во **введении** изложен обзор численных методов для задач газовой динамики, кроме того кратко представлены основные результаты работы.

В первой главе вводятся обозначения и аппроксимации на одномерных сетках, на двумерных ортогональных сетках, а также на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках.

На одномерных сетках $\Omega_h^1 = \{x_0 < x_1 < \dots < x_M\}$ с постоянным шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, M-1}$ произвольная сеточная функция ζ определяется в точке x_i через ζ_i . Как обычно в безындексной записи $\zeta = \zeta_i$, $\zeta_{(\pm 1)} = \zeta_{i\pm 1}$ и $\zeta_x = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_i}{h}$, $\zeta_{\bar{x}} = \frac{\zeta_i - \zeta_{i-1}}{h}$, $\zeta_x^\circ = \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2h}$, $\bar{\zeta} = \frac{\zeta_i + \zeta_{i-1}}{2}$.

Аналогично, на двумерных ортогональных сетках $\Omega_h^2 = \{x_{i,j} \mid i = \overline{0, M_1}, j = \overline{0, M_2}\}$ с шагом h_α , $\alpha = \overline{1, 2}$ значение произвольной сеточной функции ζ в узле $x_{\bar{m}}$ с номером $\bar{m} = (i, j)$ обозначается через $\zeta_{\bar{m}}$ или $\zeta_{i,j}$. В безындексной форме записи $\zeta_{\bar{m}} = \zeta$, $\zeta_{i\pm 1, j} = \zeta^{\pm 1}$, $\zeta_{i, j\pm 1} = \zeta^{\pm 2}$. Разностные производные имеют вид $\zeta_{x_k} = \frac{\zeta^{+k} - \zeta}{h_k}$, $\zeta_{\bar{x}_k} = \frac{\zeta - \zeta^{-k}}{h_k}$ и

$$\langle \zeta \rangle_{x_k}^\circ = \begin{cases} \frac{\langle \zeta \rangle^{+k} - \langle \zeta \rangle^{-k}}{h_k}, & \text{если узлы } x^{\pm k} \text{ лежат в области } \Omega_h^2; \\ \frac{\langle \zeta \rangle^{+k} - \langle \zeta \rangle^{-k}}{h_k/2}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где усреднение $\langle \zeta \rangle^{\pm k}$ определяется как

$$\langle \zeta \rangle^{\pm k} = \begin{cases} \frac{\zeta + \zeta^{\pm k}}{2}, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит в области } \Omega_h^2; \\ \zeta, & \text{иначе} \end{cases}$$

для произвольной сеточной функции ζ .

На треугольных (тетраэдральных) сетках вводятся следующие обозначения. Пусть некоторая двумерная (трёхмерная) область Ω разбита на согласованные треугольники (тетраэдры), которые в дальнейшем будем называть ячейками. Таким образом, мы получаем сеточную область $\Omega_h^{\Delta, 2}$ ($\Omega_h^{\Delta, 3}$) с границей Γ_h . Центр x_i ячейки ω_i определяется в центре окружности (сферы), описанной вокруг соответствующего

треугольника (тетраэдра) при условии того, что он лежит внутри этого треугольника (тетраэдра). В противном случае центром ячейки является её центр тяжести. Общее ребро (общую грань) ячеек ω_i и ω_{i_k} , $k = \overline{1, D+1}$ обозначим через S_{i_k} , где D — размерность пространства. В трёхмерном случае нам понадобится центр масс $\tilde{x}_{i_k}^{\text{цм}}$ грани S_{i_k} . Определим потоковый узел $\tilde{x}_{i_k}$ ребра (грани) S_{i_k} в точке пересечения ребра (грани) (или его (её) продолжения) с отрезком, соединяющим центры ячеек ω_i и ω_{i_k} . Если грань тетраэдра ($D = 3$) находится на границе области Γ_h , то в случае если эта грань является остроугольным треугольником, назовём её потоковым узлом центр описанной окружности грани. В противном случае потоковый узел этой грани расположим в её центре тяжести. В двумерном случае граничные потоковые узлы расположим в середине соответствующего ребра. Введённые ранее узлы $\tilde{x}_{i_k}^{\text{цм}}$ будем также относить к потоковым.

Фигуру, ограниченную отрезками (плоскостями), проведёнными через концы отрезка (ребра грани) S_{i_k} и точки x_i и x_{i_k} назовём потоковой ячейкой и обозначим через $\tilde{\omega}_{i_k}$, а её центром назовём точку $\tilde{x}_{i_k}$. Положим $\tilde{\Omega}_h^{\Delta,2}$ ($\tilde{\Omega}_h^{\Delta,3}$) — множество всех потоковых ячеек. Величины $\Delta l_{i_k}^1$ и $\Delta l_{i_k}^2$ определим как части отрезка Δl_{i_k} , находящиеся со стороны точек x_i и x_{i_k} от ребра (грани) S_{i_k} соответственно. Пусть $\mathbf{n}_{i_k}$ — внешняя нормаль к ребру (грани) S_{i_k} ячейки ω_{i_k} . Обозначим с помощью величин Δn_{i_k} , $\Delta n_{i_k}^1$ и $\Delta n_{i_k}^2$ длины проекций отрезков Δl_{i_k} , $\Delta l_{i_k}^1$ и $\Delta l_{i_k}^2$ соответственно на нормаль $\mathbf{n}_{i_k}$. Для удобства будем обозначать объёмы ячеек, площади граней и длины отрезков точно так же, как и ячейки, грани и отрезки соответственно.

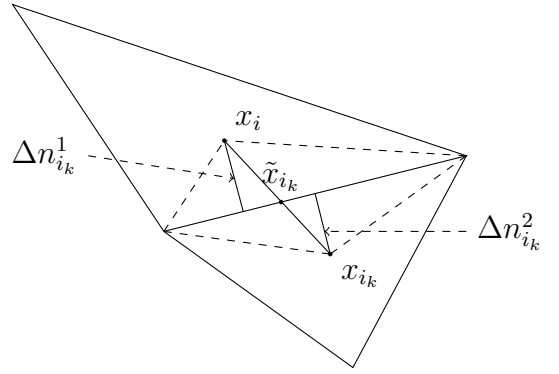


Рис. 1: Ячейки ω_i и ω_{i_k}

Сеточные функции ρ и вектор-функции $\mathbf{u}$ определим на множестве центров ячеек $\{x_i | \omega_i \in \Omega_h^{\Delta,2}(\Omega_h^{\Delta,3})\}$ таким образом, что $\rho(x_i) = \rho_i$ и $\mathbf{u}(x_i) = \mathbf{u}_i$. Значение произвольной сеточной функции ζ в потоковом узле $\tilde{x}_j$ обозначим через $\tilde{\zeta}_j$.

Наконец, нам понадобятся усреднения в потоковых узлах:

$$\langle \mathbf{W} \rangle_{i_k} = \begin{cases} \frac{\mathbf{w}_i \Delta n_{i_k}^2 + \mathbf{w}_{i_k} \Delta n_{i_k}^1}{\Delta n_{i_k}}, & \tilde{x}_{i_k} \notin \Gamma_h, \\ (\mathbf{W})_i, & \tilde{x}_{i_k} \in \Gamma_h, \end{cases}$$

и

$$\bar{p}_{i_k} = \begin{cases} \frac{p_i \Delta n_{i_k}^1 + p_{i_k} \Delta n_{i_k}^2}{\Delta n_{i_k}}, & S_{i_k} \notin \Gamma_h \\ p_i, & S_{i_k} \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Для удобства введём безындexсную форму записи, а именно, при рассмотрении аппроксимации в одной отдельно взятой ячейке ω_i будем опускать индекс i для всех введённых обозначений, то есть положим $\omega = \omega_i$, $\rho = \rho_i$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, $S_k = S_{i_k}$, $\Delta n_k = \Delta n_{i_k}$ и т. д.

Кроме того, в данной главе приведены сеточные аппроксимации дивергенции и градиента в основных и потоковых узлах сетки, а также модификации этих аппроксимаций, необходимые в трёхмерном случае.

В конце главы приведены некоторые теоретические факты, используемые в работе, а также доказана теорема, применяющаяся при доказательстве положительности сеточной функции плотности

Теорема 1. Пусть элементы $a_{i,j}$, $i, j = 1, \dots, n$ действительной матрицы A удовлетворяют следующим свойствам

1. $a_{i,i} > 0$, $i = 1, \dots, n$.
2. $a_{i,j} \leq 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$.
3. Существуют такие $\omega_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, что $\forall j$, $1 \leq j \leq n$ выполнено $\sum_{i=1}^n a_{i,j} \omega_i = 0$.

Тогда для любого $\tau > 0$ матрица $(A + \tau E)$ является M -матрицей.

Во второй главе рассматривается задача динамики одномерного вязкого газа с линейной зависимостью давления от плотности

$$\begin{aligned} \frac{\partial(A\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial(A\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(A\rho u^2)}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_{\text{тр}} L &= 0, \\ p &= \kappa \rho, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

где $p(x, t)$ — давление, $\rho(x, t)$ — плотность, $u(x, t)$ — скорость жидкости (газа), $A(x, t)$ — заданная площадь поперечного сечения канала, $L(x, t)$ — периметр поперечного сечения канала, а κ — некоторая положительная константа. Сила трения во втором уравнении системы (2.1.3) моделируется экспериментальной формулой $\tau_{\text{тр}} = \lambda u|u|$, где λ — положительная константа, зависящая только от числа Рейнольдса. Кроме того, система (2.1.3) снабжена краевыми

$$u(X_1) = u(X_2) = 0 \tag{2.2.1}$$

и начальными условиями

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x). \tag{2.2.2}$$

Для аппроксимации первого уравнения системы (2.1.3) предлагается полностью неявная двухслойная разностная схема

$$(A\rho)_t + \left(\{\hat{\rho}, \hat{u}\} \hat{A}\hat{u} \right)_x = 0, \quad i = 0, \dots, M-1, \quad (2.3.1)$$

где

$$\{\rho, u\}_i = \begin{cases} \rho_{i-1}, & \text{если } u_i > 0; \\ \rho_i, & \text{если } u_i < 0, \end{cases}$$

Для схемы (2.3.1) доказаны теоремы

Теорема 2. Аппроксимация (2.3.1) обеспечивает выполнение сеточного закона сохранения массы, т. е.

$$\sum_{i=0}^{M-1} h A_i^0 \rho_i^0 = \sum_{i=0}^{M-1} h A_i^n \rho_i^n \quad (2.3.2)$$

при однородных краевых условиях, то есть при $u_0^n = u_M^n = 0$, $n = 0, \dots, N$.

Теорема 3. Аппроксимация (2.3.1) гарантирует положительность сеточной функции плотности, т. е. при выполнении условий $\rho_i^0 > 0$ и $A_i^n > 0$ для любых $i = \overline{0, M-1}$ и $n \geq 0$ имеет место неравенство $\rho_i^n > 0$ при любых $i = \overline{0, M-1}$ и $n > 0$.

Второе уравнение системы (2.1.3) аппроксимируется таким образом, чтобы выполнялся сеточный аналог условия

$$((A\rho u^2)_x, u) - \frac{1}{2} \left((A\rho u)_x, u^2 \right) = 0.$$

Тогда аппроксимация второго уравнения системы (2.1.3) примет вид:

$$(A\rho u)_t + \frac{1}{2} \left(\{\hat{\rho}, \hat{u}\} \hat{A}\hat{u}(\hat{u}_{(-1)} + \hat{u}) \right)_x + \kappa \frac{1}{h} \hat{A}\{\hat{\rho}, \hat{u}\} \ln \frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{(-1)}} + \lambda \hat{u}|\hat{u}| \hat{L} = 0. \quad (2.3.3)$$

Отметим, что аппроксимации (2.3.1) и (2.3.3) имеют порядок $O(\tau + h)$. Для данной аппроксимации доказано энергетическое неравенство

Теорема 4. Решение разностной задачи (2.3.1), (2.3.3) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (A^n \rho^n, (u^n)^2) + \kappa (A^n \rho^n (\ln \rho^n - 1), 1) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(A^k \rho^k, (u^{k+1} - u^k)^2 \right) + \\ & + \kappa (A_0 \rho_0, 1) \sum_{k=0}^{n-1} \min_{\Omega_\rho} \frac{A^{k+1} - A^k}{A^{k+1}} + \tau \lambda \sum_{k=1}^n (|u^k| L^k, (u^k)^2) \leq \\ & \leq \frac{1}{2} (A^0 \rho^0, (u^0)^2) + \kappa (A^0 \rho^0 (\ln \rho^0 - 1), 1) \end{aligned}$$

при однородных краевых условиях, то есть при $u_0^n = u_M^n = 0$, $n = 0, \dots, N$.

При помощи подхода Лере–Шаудера доказано существование разностного решения при любых шагах по времени и пространству

Теорема 5. Пусть выполнено условие

$$(A_0 \rho_0, 1) - (A^n, 1) > 0 \text{ при любом } n > 0. \quad (2.3.10)$$

Тогда система уравнений (2.3.1), (2.3.3) с краевыми условиями (2.2.1) и начальными условиями (2.2.2) имеет решение при любых τ и h .

Третья глава посвящена стабилизации одномерных уравнений газовой динамики по начальным условиям методом нулевого приближения. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ p = p(\rho) \end{cases} \quad (3.1.1)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} (\rho, u)|_{t=0} &= (\rho_0, u_0), \quad x \in \Omega = [0, L]; \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Здесь искомые величины — плотность ρ , давление p и скорость u являются функциями переменных Эйлера $(x, t) \in [0, L] \times [0, T]$, а величина μ характеризует вязкость газа. Связь между давлением и плотностью положим степенной, т.е. $p = C_p \rho^\gamma$, где C_p — некоторая положительная константа, γ — показатель адиабаты Пуассона. Для задачи (3.1.1), (3.1.2) вводится явно-неявная разностная аппроксимация на смещенных сетках В.И. Лебедева, то есть функцию скорости аппроксимируем в узлах равномерной сетки $Q_{u,\tau} = \omega_u \times \omega_\tau$, где $\omega_u = \{x_m = mh, m = 0, \dots, M\}$, $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, \dots, N\}$, $h = L/M$, $\tau = T/N$, а функцию плотности — в узлах сетки $Q_{\rho,\tau} = \omega_\rho \times \omega_\tau$, где $\omega_\rho = \{x_{m+1/2} = (m + 1/2)h, m = 0, \dots, M - 1\}$, смещенной по пространству относительно сетки $Q_{u,\tau}$ на полшага вправо. Таким образом, разностная задача принимает вид

$$\begin{cases} \rho_t + (\{\hat{\rho}, u\}u)_x = 0, \quad i = 0, \dots, M - 1; \\ (\bar{\rho}u)_t + \frac{1}{4} \left((\{\hat{\rho}, u\}(\hat{u} + \hat{u}_{(-1)})u)_x + (\{\hat{\rho}, u\}(\hat{u} + \hat{u}_{(+1)})u)_{\bar{x}} \right) + \\ + C_p D_p(\hat{\rho}, u) - \mu \hat{u}_{x\bar{x}} = 0, \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$i = 1, \dots, M - 1,$

где

$$D_p(\rho, u) = \begin{cases} \{\rho, u\}(\ln \rho)_{\bar{x}}, & \gamma = 1; \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \{\rho, u\}(\rho^{\gamma-1})_{\bar{x}}, & \gamma > 1 \end{cases}$$

и

$$\{\zeta, u\}_i = \begin{cases} \zeta_i, & \text{если } u_i < 0; \\ \zeta_{i-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Зададим следующие начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} \rho^0 &= \rho_0((i + 1/2)h), \quad i = 0, \dots, M-1, \quad u^0 = u_0(ih), \quad i = 1, \dots, M-1; \\ u_0^n &= 0, \quad u_M^n = 0, \quad n = 0, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Разностная схема (3.1.3) приводит к полуневяной линеаризации

$$\begin{cases} \rho_t + \sigma_\rho u_x = 0, \quad i = 0, \dots, M-1; \\ u_t + \sigma_u \hat{\rho}_{\bar{x}} - \mu \hat{u}_{x\bar{x}} = 0, \quad i = 1, \dots, M-1, \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Для линеаризации (3.1.5) построен спектр, собственные значения которого являются решениями системы

$$\lambda_k^2 + \lambda_k (\mu r_k^2 - \tau \sigma_\rho \sigma_u r_k^2) + \sigma_\rho \sigma_u r_k^2 = 0, \quad r_k = \frac{2}{h} \sin \frac{\pi k h}{2L};$$

исследована его зависимость от шага по времени, а также сконструировано решение $\mathbf{w} = (\rho, u)^T$ методом Фурье и получена оценка на скорость сходимости линеаризованной задачи к стационарному решению.

Теорема 6. *Решение задачи (3.1.5), (3.1.4) может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_m^n &= C_0 \Psi_0 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{M-1} \left(C_k^{(1)} \left(1 - \tau \lambda_k^{(1)} \right)^{-n} \Psi_k^{(1)} + C_k^{(2)} \left(1 - \tau \lambda_k^{(2)} \right)^{-n} \Psi_k^{(2)} \right) + \\ &+ \begin{cases} C_{k_0}^{(1)} (1 - \tau \lambda_{k_0})^{-n} \Psi_{k_0} + C_{k_0}^{(2)} (1 - \tau \lambda_{k_0})^{-n} (n \Psi_{k_0} + \Phi_{k_0}), & D(k_0) = 0; \\ C_{k_0}^{(1)} \left(1 - \tau \lambda_{k_0}^{(1)} \right)^{-n} \Psi_{k_0}^{(1)} + C_{k_0}^{(2)} \left(1 - \tau \lambda_{k_0}^{(2)} \right)^{-n} \Psi_{k_0}^{(2)}, & D(k_0) \neq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{где} \quad \Psi_0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_k^{(1,2)} = \begin{pmatrix} -\sigma_\rho r_k (1 + \tau \mu r_k^2) \cos \left(\frac{\pi k (m + \frac{1}{2}) h}{L} \right) \\ (\lambda_k^{(1,2)} - \tau \sigma_\rho \sigma_u r_k^2) \sin \left(\frac{\pi k m h}{L} \right) \end{pmatrix}, \\ k = 1, \dots, M-1, \quad \Psi_{k_0} &= \begin{pmatrix} -\sigma_\rho r_{k_0} (1 + \tau \mu r_{k_0}^2) \cos \left(\frac{\pi k_0 (m + \frac{1}{2}) h}{L} \right) \\ (\lambda_{k_0} - \tau \sigma_\rho \sigma_u r_{k_0}^2) \sin \left(\frac{\pi k_0 m h}{L} \right) \end{pmatrix}, \\ \Phi_{k_0} &= \begin{pmatrix} (\sigma_\rho r_{k_0} / \lambda_{k_0} - \tau \sigma_\rho r_{k_0}) \cos \left(\frac{\pi k_0 (m + \frac{1}{2}) h}{L} \right) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Коэффициенты} \quad C_0, \quad C_k^{(1,2)}, \\ k = 1, \dots, M-1 &\text{однозначно определяются из начальных условий } \mathbf{w}^0. \end{aligned}$$

Для линеаризованной задачи предложен метод по ускорению сходимости к стационарному решению при помощи изменения начальных данных.

В конце главы приведены результаты численного эксперимента для начальных условий типа скачок скорости или скачок плотности, иллюстрирующие зависимость скорости стабилизации от различных параметров.

В четвёртой главе рассматриваются уравнения динамики баротропного газа в двумерной области

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p &= 0,\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

с уравнением состояния

$$p = a\rho^\gamma, \quad \gamma > 1\tag{4.1.2}$$

начальными

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{x}, 0) &= \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

и граничными условиями

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0,\tag{4.1.4}$$

где ρ — плотность, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ — вектор скорости, p — давление газа, a — некоторая положительная константа, которая без ограничения общности считается равной единице, γ — показатель адиабаты Пуассона.

Сначала строится аппроксимация системы (4.1.1) на ортогональных сетках. Аппроксимация уравнения неразрывности имеет вид

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0,\tag{4.2.3}$$

где

$$A(\mathbf{u})\rho = \sum_{k=1}^2 \{\rho u_k\}_{\hat{x}_k},$$

и

$$\{\rho u_k\}^{\pm k} = \begin{cases} 0, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h^2; \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \mp \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), & \text{если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} > 0; \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \pm \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), & \text{если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} < 0; \\ \rho \langle u_k \rangle^{\pm k}, & \text{если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} > 0; \\ \rho^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k}, & \text{если } \operatorname{sign} u_k \neq \operatorname{sign} u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} \leq 0, \end{cases}$$

$k = \overline{1, 2}$ и $\delta^{\pm k} = \operatorname{sign}(x_k^{\pm k} - x_k)$. Для аппроксимации (4.2.3) доказаны следующие утверждения

Теорема 7. Аппроксимация (4.2.3) гарантирует положительность сеточной функции плотности, т. е. при выполнении условий $\rho_{i,j}^0 > 0$ для любых $i = \overline{0, M_1}$, $j = \overline{0, M_2}$ имеет место неравенство $\rho_{i,j}^n > 0$ при любых $i = \overline{0, M_1}$, $j = \overline{0, M_2}$ и $n > 0$.

Теорема 8. *Аппроксимация (4.2.3) обеспечивает выполнение сеточного закона сохранения массы, т. е.*

$$\sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} \hat{\rho}_{i,j} = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} \rho_{i,j}^0,$$

где

$$h_{\alpha i} = \begin{cases} h_{\alpha}, & i = \overline{1, M_{\alpha} - 1} \text{ (то есть узел } x^{\pm\alpha} \text{ лежит в } \Omega_h^2); \\ h_{\alpha}/2, & i = 0, i = M_{\alpha} \text{ (иначе),} \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, 2}. \quad (1.1.2)$$

Второе уравнение системы (4.1.1) аппроксимируется с помощью

$$(\rho \mathbf{u})_t + \sum_{k=1}^2 (\{\hat{\rho} \hat{u}_k\} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle)_{\hat{x}_k} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \hat{\rho} \nabla_h \hat{\rho}^{\gamma-1} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \sum_{\substack{k=-2 \\ k \neq 0}}^2 \psi^k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \quad (4.2.4)$$

где $\nabla_h g = (\langle g \rangle_{\hat{x}_1}, \langle g \rangle_{\hat{x}_2})$, а

$$\psi^{\pm k}(\rho, u_q, g) = \frac{1}{2h_{ki_k}} \begin{cases} 0, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h^2; \\ -(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } u_k > 0 \text{ и } u_k^{\pm k} > 0; \\ (\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } u_k < 0 \text{ и } u_k^{\pm k} < 0; \\ 0, & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) > 0; \\ \delta^{\pm k}(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и} \\ & \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) < 0, \end{cases}$$

$q = \overline{1, 2}$, $\psi^{\pm k}(\rho, \mathbf{u}, g) = (\psi^{\pm k}(\rho, u_1, g), \psi^{\pm k}(\rho, u_2, g))$ для произвольной сеточной функции g , величина h_{ki_k} определяется формулой (1.1.2).

Аппроксимация (4.2.3), (4.2.4) имеет порядок $O(\tau + h)$ и удовлетворяет энергетическому неравенству

Теорема 9. *Решение разностной задачи (4.2.3), (4.2.4) с заданным на границе условием непротекания удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho^{n+1}, (\mathbf{u}^{n+1})^2) + \frac{1}{\gamma - 1}(p^{n+1}, 1) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (\rho^m, (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)^2) &\leq \\ &\leq \frac{1}{2}(\rho^0, (\mathbf{u}^0)^2) + \frac{1}{\gamma - 1}(p^0, 1). \end{aligned}$$

Затем результаты, полученные для ортогональных сеток обобщаются на треугольные неструктурированные сетки. Для аппроксимации уравнения неразрывности предлагается следующая разностная схема:

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0. \quad (4.4.5)$$

где

$$A(\mathbf{u})\rho = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} \{\rho \mathbf{u}\}_{i_k}$$

и

$$\{\rho u_d\}_k = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h; \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k - H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, & \text{если } u_d > 0 \text{ и } u_{dk} > 0; \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k + H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, & \text{если } u_d < 0 \text{ и } u_{dk} < 0; \\ \rho \langle u_d n_k^d \rangle_k, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k > 0; \\ \rho_k \langle u_d n_k^d \rangle_k, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k < 0, \end{cases} \quad (4.4.4)$$

$$H_d = \max_{\Omega_h^{\Delta, 2}} (\Delta n_{i_k} |n_{i_k}^d|), \quad d = \overline{1, 2},$$

$k = \overline{1, 3}$, нормаль $\mathbf{n}_k$ является внешней по отношению к ячейке ω_i . Для аппроксимации (4.4.5) доказаны следующие утверждения

Теорема 10. *Если $\rho^0 > 0$, то сеточная функция плотности будет положительной на $(n+1)$ -ом шаге по времени при любых шагах по времени и пространству.*

Теорема 11. *Разностная схема (4.4.5) удовлетворяет сеточному аналогу закона сохранения массы, то есть*

$$\sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \hat{\rho}_i = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \rho_i^0.$$

Аппроксимация уравнения движения на треугольных сетках имеет вид

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{u})_t + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}\}_k \frac{\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_k}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \hat{\rho} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}} \mathbf{n}_k + \\ + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \psi_k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

где $\psi_k(\rho, \mathbf{u}, g) = (\psi_k(\rho, u_1, g), \psi_k(\rho, u_2, g))$ и

$$\psi_k(\rho, u_d, g) = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h; \\ -H_d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} (g_k - g), & \text{если } u_d > 0 \text{ и } u_{dk} > 0; \\ H_d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} (g_k - g), & \text{если } u_d < 0 \text{ и } u_{dk} < 0; \\ 0, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k > 0; \\ n_k^d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} (\rho_k - \rho) (g_k - g), & \\ & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k < 0. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

Отметим, что разностная схема (4.4.5), (4.5.1) имеет порядок аппроксимации $O(\tau + \max\{H_1, H_2\})$ на остроугольных ячейках. Доказаны утверждения

Теорема 12. *Для решения разностной задачи (4.4.5), (4.5.1) с однородными краевыми условиями, то есть $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на границе Γ_h , имеет место следующая оценка*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\rho^{n+1}, (\mathbf{u}^{n+1})^2) + \frac{1}{\gamma - 1}(p^{n+1}, 1) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (\rho^m, (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)^2) \leq \\ \leq \frac{1}{2}(\rho^0, (\mathbf{u}^0)^2) + \frac{1}{\gamma - 1}(p^0, 1). \end{aligned}$$

Теорема 13. *Решение разностной задачи (4.4.5), (4.5.1) с однородными краевыми условиями, то есть $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на границе Γ_h существует при любых шагах по времени и пространству.*

Глава завершается серией численных экспериментов, в которых демонстрируется численная оценка сходимости, поведение разностной схемы на модельных задачах, а также проводится сравнение предложенной схемы с методом адаптивной искусственной вязкости на примере решения задач Римана.

Пятая глава посвящена обобщению метода адаптивной искусственной вязкости на случай вязкого теплопроводного сжимаемого газа на тетраэдральных сетках. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla p - \text{div}(\mu \nabla \mathbf{v}) - \nabla \left(\left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \text{div} \mathbf{v} \right) = 0, \quad (5.1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon \right) \right] + \text{div} \left[\rho \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right) - \kappa \nabla T - \frac{1}{2} \mu \nabla(\mathbf{v}^2) - \right. \\ \left. - \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{v} \text{div} \mathbf{v} \right] = 0, \quad (5.1.3) \end{aligned}$$

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (5.1.4)$$

где ρ — плотность, p — давление, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, ε — внутренняя энергия, γ — показатель адиабаты Пуассона. Величина μ обозначает кинематическую вязкость, ζ — вторую вязкость. Внутренняя энергия связана с температурой формулой $\varepsilon = C_v T$. Величины μ , ζ , κ и C_v положим постоянными.

В оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости используется схема со вторым порядком аппроксимации по времени, позволяющая сократить количество осцилляций сеточного решения. Для достижения аппроксимации по времени второго порядка используются поправки Лакса-Вендроффа. Этот метод приводит к пятиточечной разностной схеме, которую в дальнейшем нетрудно монотонизировать с помощью добавления искусственной вязкости, величину которой можно оценить с помощью метода замороженных коэффициентов. Однако, в задаче (5.1.1)–(5.1.4) эти поправки неудобно использовать ввиду их громоздкости, которая обусловлена наличием производных по пространству второго порядка. Для достижения аппроксимации второго порядка можно использовать метод МакКормака, однако он приводит к семнадцатиточечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В данной главе предлагается совместить лучшие качества метода МакКормака и метода Лакса-Вендроффа, а именно, ввести поправки Лакса-Вендроффа для уравнений без учёта вязких слагаемых, а поправки, которые появляются от наличия вязких слагаемых, ввести с помощью метода МакКормака.

Для построения аппроксимаций используются сеточные операторы дивергенции и градиента, предложенные в работе²², таким образом, поправки Лакса-Вендроффа аппроксимируются аналогично. Следует отметить, что в случае если хотя бы одна из ячеек ω_i или ω_{i_k} , $k = \overline{1, 4}$ является тупоугольной, то для аппроксимации поправок Лакса-Вендроффа для уравнений неразрывности, движения и полной энергии следует использовать формулы

$$LW_\rho(\rho, \mathbf{v}, p) = -\frac{\tau_n}{2} \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \left(\operatorname{div}_{i_k}^h (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \nabla_{i_k}^h p \right);$$

$$LW_I(\rho, \mathbf{v}, p) = -\frac{\tau_n}{2} \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \left(\operatorname{div}_{i_k}^h (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{v}) + \nabla_{i_k}^h p \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla_{i_k}^h p \right) - \\ - \frac{\tau_n}{2} \nabla \left(\gamma p_i^L \operatorname{div} \mathbf{v}_i^Q + \nabla p_i^Q \cdot \mathbf{v}_i^L \right) \Big|_{x_i};$$

²² Попов И. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках.

$$\begin{aligned}
LW_E(\rho, \mathbf{v}, p, E) = & -\frac{\tau_n}{2} \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \left(\operatorname{div}_{i_k}^h ((E + p) \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) + \right. \\
& \left. + \left\langle \frac{E + p}{\rho} \right\rangle_{i_k} \nabla_{i_k}^h p + \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \left(\gamma \langle p \rangle_{i_k} \operatorname{div}_{i_k}^h \mathbf{v} + \nabla_{i_k}^h p \cdot \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \right) \right),
\end{aligned}$$

соответственно, причём модификации аппроксимаций дивергенции и градиента в потоковых ячейках $\operatorname{div}_{i_k}^h$ и $\nabla_{i_k}^h$ определяются через $\operatorname{div}_{i_k}^h \zeta = \operatorname{div} \zeta_{i_k}^Q|_{\tilde{x}_{i_k}}$, $\nabla_{i_k}^h \zeta = \nabla \zeta_{i_k}^Q|_{\tilde{x}_{i_k}}$, где ζ^Q квадратичное приближение функции ζ , а ζ^L линейное приближение функции ζ . Кроме того, в этом случае считаем, что $\langle \zeta \rangle_{i_k}$ — линейная интерполяция функции ζ в точку $\tilde{x}_{i_k}^{\text{ЦМ}}$.

Аналогично, при помощи предложенных модификаций сеточных операторов дивергенции и градиента строится аппроксимация вязких и невязких слагаемых

$$A_\rho(\rho, \mathbf{v}) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \langle \rho \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k}, \quad (5.3.1)$$

$$A_I(\rho, \mathbf{v}, p) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \left(\left(\langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \cdot \mathbf{n}_{i_k} \right) \frac{1}{2} (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i_k}) + \bar{p}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \right), \quad (5.3.2)$$

$$A_E(\rho, \mathbf{v}, p, \varepsilon) = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \left(\left(\langle \rho \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \right) \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{i_k} + \langle \varepsilon \rangle_{i_k} \right) + \bar{p}_{i_k} \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \right). \quad (5.3.3)$$

$$B_I(\mathbf{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \mu \nabla_{i_k}^h \mathbf{v} - \nabla \left((\zeta + \mu/3) \operatorname{div} \mathbf{v}_i^Q \right) \Big|_{x_i}, \quad (5.3.4)$$

$$B_E(\mathbf{v}, \varepsilon) = -\frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^4 S_{i_k} \mathbf{n}_{i_k} \left(\kappa \nabla_{i_k}^h T + \frac{1}{2} \mu \nabla_{i_k}^h (\mathbf{v})^2 + (\zeta + \mu/3) \langle \mathbf{v} \rangle_{i_k} \operatorname{div}_{i_k}^h \mathbf{v} \right), \quad (5.3.5)$$

Таким образом, сеточные уравнения без учёта поправок Лакса–Вендроффа и Мак-Кормака примут вид

$$\frac{\tilde{\rho}_i^{n+1/2} - \rho_i^n}{\tau_n} + A_\rho(\rho^n, \mathbf{v}^n) = 0, \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\tilde{I}_i^{n+1/2} - I_i^n}{\tau_n} + A_I(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n) + B_I(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \quad (5.3.7)$$

$$\frac{\tilde{E}_i^{n+1/2} - E_i^n}{\tau_n} + A_E(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n, \varepsilon^n) + B_E(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \quad (5.3.8)$$

где $I = \rho \mathbf{v}$ и $E = \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon \right)$. Для определения поправок к вязким слагаемым, введём вспомогательные величины $\hat{\rho}^{n+1/2} = \rho^n$, $\hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}$ и $\hat{\varepsilon}^{n+1/2}$, которые вычисляются последовательно с помощью

$$\frac{\hat{I}_i^{n+1/2} - I_i^n}{\tau_n} + B_I(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0, \quad (5.3.9)$$

$$\frac{\hat{E}_i^{n+1/2} - E_i^n}{\tau_n} + B_E(\mathbf{v}^n, \varepsilon^n) = 0. \quad (5.3.10)$$

Тогда предикторное решение на $(n + 1)$ -ом слое с учётом поправок Лакса-Вендроффа и МакКормака примет вид

$$\tilde{\rho}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\rho_i^n + \tilde{\rho}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2} A_\rho(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}) - \tau_n LW_\rho(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n), \quad (5.3.11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(I_i^n + \tilde{I}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2} \left[A_I(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}) + \right. \\ \left. + B_I(\tilde{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2}) \right] - \tau_n LW_I(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n), \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i^{n+1} = \frac{1}{2}(E_i^n + \tilde{E}_i^{n+1/2}) - \frac{\tau_n}{2} \left[A_E(\rho^n, \hat{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \hat{p}^{n+1/2}, \hat{\varepsilon}^{n+1/2}) + \right. \\ \left. + B_E(\tilde{\mathbf{v}}^{n+1/2}, \tilde{\varepsilon}^{n+1/2}) \right] - \tau_n LW_E(\rho^n, \mathbf{v}^n, p^n, E^n). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

Уравнения (5.3.9)–(5.3.13) позволяют последовательно вычислить величины $\tilde{\rho}^{n+1}$, $\tilde{\mathbf{v}}^{n+1}$, $\tilde{\varepsilon}^{n+1}$, $\tilde{p}^{n+1}$. Это и есть предикторное решение. Выражения (5.3.11)–(5.3.13) аппроксимируют исходные уравнения (5.1.1)–(5.1.4) с первым порядком по пространству и вторым порядком по времени.

Отметим, что при замороженных коэффициентах уравнения (5.3.9)–(5.3.13) совпадают с уравнениями в оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости, поэтому этап корректора модифицированного метода совпадает с этапом корректора в методе АИВ.

В конце главы приведён численный эксперимент по определению давления переключения струйного транзистора. Результаты эксперимента количественно совпадают с результатами натурального эксперимента.

Заключение

Основные результаты диссертации состоят в следующем.

1. Для задачи динамики вязкого баротропного газа с линейной зависимостью давления от плотности в прямом канале с переменным во времени сечением предложена разностная схема, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Для предложенной разностной схемы доказано энергетическое неравенство и существование решения при любых шагах по времени и пространству.
2. Предложен метод стабилизации уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению по начальным данным. Получены теоретические оценки на скорость сходимости для полуневяжной линеаризации исходной задачи.

3. Построена разностная аппроксимация уравнений динамики вязкого баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности на треугольных неструктурированных сетках, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Для предложенной разностной схемы доказано энергетическое неравенство и существование решения при любых шагах по времени и пространству.
4. Предложено обобщение метода адаптивной искусственной вязкости для уравнений динамики вязкого сжимаемого теплопроводного газа. Предложены модификации сеточных операторов дивергенции и градиента, позволяющие обойти требование отсутствия тупоугольных элементов в сетке, критичного в трехмерном случае. Предложена комбинация поправок Лакса-Вендрофа и МакКормака, позволяющая провести частичную монотонизацию разностного решения тем же способом, что и в оригинальном методе адаптивной искусственной вязкости, несмотря на увеличенный шаблон схемы.
5. Для предложенных схем проведены численные эксперименты на модельных задачах. Проведено сравнение результатов численного эксперимента с результатами натурного эксперимента.

Результаты диссертации могут найти применение в области теории разностных схем, в области вычислительной математики, а также в области численного моделирования.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Георгию Михайловичу Кобелькову за постановку задач и внимание к работе, д.ф.-м.н. профессору А. А. Корневу за постановку задачи о численной стабилизации уравнений газовой динамики и внимание к работе, д.ф.-м.н. профессору А. В. Звягину за постановку задачи об одномерном движении газа в канале с переменным во времени сечением, а также всем сотрудникам кафедры вычислительной математики МГУ им М. В. Ломоносова за внимание и доброжелательное отношение.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.07 — “Вычислительная математика” и входящих в списки Scopus и/или RSCI

1. Звягин А.В., Кобельков Г.М., Ложников М.А. *Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2018 №4. 15–22 (Scopus, RSCI WoS, ИФ РИНЦ

- 0.267). (Ложникову М.А. принадлежит предложенная аппроксимация и проведение всех доказательств для неё).
2. Ложников М. А. *Об одной разностной схеме для уравнений газовой динамики на треугольных сетках* // Математическое моделирование. 2019. **31**, №1. 3–26 (RSCI WoS, ИФ РИНЦ 0.810).
 3. Жуков К. А., Корнев А. А., Ложников М. А., Попов А. В. *Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа методом нулевого приближения* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2019 №2. 14–21 (Scopus, RSCI WoS, ИФ РИНЦ 0.267). (Ложникову М. А. принадлежит оценка скорости сходимости для случая полунявной разностной схемы).
 4. Иванов Д. В., Кобельков Г. М., Ложников М. А., Харисов А. Ф. *Метод адаптивной искусственной вязкости для численного решения уравнений вязкого сжимаемого теплопроводного газа* // Вычислительные методы и программирование. 2018. **19**, №1. 51–62 (RSCI WoS, ИФ РИНЦ 0.459). (Ложникову М.А. принадлежат аппроксимации вязких слагаемых и идея комбинации поправок Лакса–Вендроффа и МакКормака).

Другие публикации

5. Ложников М.А. Неявные разностные схемы для уравнений газовой динамики на неструктурированных сетках [Электронный ресурс] // материалы XXV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов”. — Москва, 9–13 апреля 2018. — https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13559/77363_uid75196_report.pdf.
6. Корнев А.А., Ложников М.А. Об ускорении процесса выхода на стационар решений системы вязкого газа // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского, серия Материалы Семнадцатой молодежной научной школы-конференции "Лобачевские чтения-2018". 2018. Т. 56. С. 156-159. (Ложникову М. А. принадлежит оценка скорости сходимости для случая полунявной разностной схемы).
7. Звягин А.В., Кобельков Г.М., Ложников М.А. О численной стабилизации нестационарных задач математической физики // сборник Современные проблемы математики и механики, серия Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовниченко, место издания МАКС Пресс Москва. 2019. С. 474–475. (Звягиным А.В. предложена система уравнений в частных производных, описывающая модель движения газа в прямом канале с переменным во времени сечением. Кобельковым Г.М. поставлена за-

дача численной оптимизации. Ложниковым М. А. предложен метод построения оптимального управления для поставленной задачи и проведены численные расчеты.)