Кривошеева Олеся Александровна. Ряды экспоненциальных многочленов: диссертация ... доктора Физико-математических наук: 01.01.01 / Кривошеева Олеся Александровна;[Место защиты: ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»], 2018.- 174 с.

**Введение к работе**

**Актуальность темы.** Пусть *А* *= {Лк,пк}к=1* *—* последовательность различных комплексных чисел *Хк* и их кратностей *пк* такая, что *\Хк+1\ > \Лк\, к >* 1, и |Afc| -> оо, *к* -> оо. Диссертация посвящена изучению рядов экспоненциальных мономов и рядов экспоненциальных многочленов, т.е. рядов вида

*оо,пк-1*

**afc**,**nzM\*z**. (1)

fc=l,n=0

**У** ***dmJemJ****(****z****),* (2)

m=lj'=l

где emJ - фиксированная линейная комбинация функций системы (Л) = *[znex\*z}U^'=i*,

показатели *Ак* которой разбиты на группы *Um,m >* 1. Линейная комбинация *emJ* формируется по точкам *Лк* группы *Um.*

Исследуются проблемы представления рядами (1) и (2) элементов подпространств аналитических функций инвариантных относительно оператора дифференцирования в выпуклых областях комплексной плоскости. Изучается также задача распределения особых точек сумм рядов (1) и (2) на границах их областей сходимости. Указанные исследования основаны на изучении областей и характера сходимости этих рядов, на исследовании различных характеристик последовательностей показателей рядов (1) и (2), на изучении взаимосвязей между этими характеристиками и их влияния на соотношение между областями сходимости рядов (1) и (2) и областями существования их сумм.

Тематика, связанная с рядами экспоненциальных мономов и их частными случаями -рядами экспонент (т.е. рядами вида (1), где *пк* *= 1,* *к >* 1), рядами Дирихле (т.е. рядами вида (1), где *пк* *= 1* *иАк-*положительные числа) и рядами Тейлора имеет богатую историю. Их исследование берет свое начало в трудах Тейлора, Коши, Адамара, Абеля и Дирихле. Указанные выше задачи для таких рядов изучались в работах Ж. Валирона, Д. Полиа, С. Мандельбройта, В. Бернштейна, Л. Шварца, П. Мальявена, Б.Я. Левина, А.Ф. Леонтьева, И.Ф. Красичкова-Терновского, Ю.Ф. Коробейника, А.С. Кривошеева и многих других математиков.

Ряды экспоненциальных мономов (и более общих экспоненциальных многочленов) являются естественным обобщением рядов экспонент. Один из основных результатов теории таких рядов, ставший уже классическим, принадлежит А.Ф. Леонтьеву. Ему удалось доказать, что любую функцию, аналитическую в выпуклой области DcC, можно разложить в ряд экспонент с фиксированными показателями *Лк, к >* 1, при определенных условиях на эти показатели. Известно, что экспоненты (и только они) являются собственными функциями оператора дифференцирования. Поэтому задачу представления рядами экспонент можно рассматривать как задачу разложения по собственным функциям этого оператора.

В пространстве H(D) (функций аналитических в области *D* с топологией равномерной сходимости на компактах из *D)* имеется большой запас собственных функций оператора дифференцирования (это все экспоненты). Поэтому существует много различных наборов

показателей ***Лк****,* при помощи которых удается получить представление всех функций из этого пространства посредством ряда экспонент. Если же ***W*** *-* подпространство в ***H****(****D****)* , инвариантное относительно оператора дифференцирования (например, пространство решений однородного уравнения свертки или их систем), то, как правило, только лишь собственных функций этого оператора (в этом случае имеется только счетный набор собственных функций) уже недостаточно для разложения всех функций из подпространства ***W****.*

Однако, ситуация меняется, если наряду с собственными функциями рассматривать еще и присоединенные функции оператора дифференцирования в ***W*** *-* экспоненциальные мономы

**zneAfeZj** ***п****=****ііПк****-****^***

где ***пк*** - кратность собственного значения ***Лк****.* Задача разложения функций из замкнутого инвариантного относительно оператора дифференцирования подпространства ***W*** **с** ***H****(****D****)* по собственным и присоединенным функциям этого оператора (т.е. задача представления рядом (1)) называется проблемой фундаментального принципа. Такое название связано с тем, что в частном случае, когда инвариантное подпространство является пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, возможность разложения произвольного решения по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования называют фундаментальным принципом Л. Эйлера.

Если представление рядом (1) по каким-то причинам становится невозможным, то возникает задача представления рядом (2), т.е. проблема существования базиса в инвариантном подпространстве, построенного по собственным и присоединенным функциям оператора дифференцирования.

Для рядов (1) и (2), как и в теории рядов экспонент (и, в частности, для степенных рядов и рядов Дирихле) первоочередными являются задачи описания классов областей сходимости (это включает в себя задачу о продолжении сходимости) и характер сходимости рядов, а также восстановление области сходимости по коэффициентам ряда. В теории степенных рядов первые две задачи решаются при помощи теоремы Абеля, а последняя задача - при помощи теоремы Коши-Адамара. Для рядов Дирихле имеется аналог теоремы Абеля, в котором утверждается, что сходимость ряда Дирихле в одной точке **z**0 влечет за собой его сходимость в полуплоскости {**z** **Є** **С**: Rez < Rez0} . Если при этом величина **<т**(**Л**) равна нулю, то эта сходимость будет абсолютной и равномерной в любой полуплоскости {**z** **Є (С**: Rez < Rez0 - *є}.*

Кроме того, для рядов Дирихле имеется полный аналог теоремы Коши-Адамара (Валирон, 1924 г.), в котором при условии **<т**(**Л**) = 0 вычисляется расстояние от начала координат до граничной прямой полуплоскости сходимости. В случае рядов экспонент полный аналог теоремы Абеля отсутствует. Имеется результат (Е. Хилле, 1924 г.) о том, что множество точек абсолютной сходимости ряда экспонент выпукло. Причем на компактных подмножествах внутренности этого множества ряд сходится равномерно. При условии **<т**(**Л**) = 0 простая и абсолютная сходимость ряда экспонент в выпуклой области равносильны. Кроме этого для рядов экспонент известен также (Г.Л. Лунц, 1942 г.) аналог теоремы Коши-Адамара. В ней дается описание области сходимости ряда экспонент, которая получается как пересечение некоторого семейства полуплоскостей. При этом приводится формула для расстояний от начала координат до граничных прямых этих полуплоскостей.

Пусть/) - выпуклая область и Л = *{Ак,пк}.* Символом *W(A,D)* обозначим замыкание в пространстве H(D) линейной оболочки системы (Л). Если (Л) не полна в пространстве *H(D),* то *W(A,D)* является нетривиальным (= *H(D),* {0}) замкнутым подпространством в *H(D).* Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система (Л) - это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в *W(A,D).*

Пусть *W* с *H(D)* *—* нетривиальное замкнутое подпространство инвариантное относительно оператора дифференцирования, и *А* *= {Лк,пк}-* его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой оо. В случае, когда спектр конечен, оно совпадает с пространством решений линейного однородного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки /x(flf(z + w)) = 0 (или системы таких уравнений), где *у.* - линейный непрерывный функционал на пространстве H(D). Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является проблема фундаментального принципа. Первым шагом на пути к представлению (1) является решение проблемы спектрального синтеза, т.е. выяснение условий, при которых система (Л) полна в подпространстве *W* (другими словами, когда *W* *= W(A,D),* где Л- кратный спектр *W*). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т.е. для подпространств вида VK(Л,Я).

В 1947 г. Л. Шварц доказал, что любое замкнутое инвариантное подпространство *W* с Я(С) допускает спектральный синтез. Известно также (И.Ф. Красичков-Терновский, 1971 г.), что пространство решений однородного уравнения свертки всегда допускает спектральный синтез. Пространства решений систем однородных уравнений свертки и более общие инвариантные подпространства уже не всегда допускают спектральный синтез. Однако, имеются простые достаточные условия, а также критерий допустимости спектрального синтеза и в этом случае (И.Ф. Красичков-Терновский, 1972 г.). Первый результат, обобщающий фундаментальный принцип Л. Эйлера на случай уравнений свертки был получен Ж. Валироном в 1929 г. Он касается представления целых решений однородного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах Л. Шварца, А.О. Гельфонда, Д.Ж. Диксона, А.Ф. Леонтьева и др. К концу 40-х годов прошлого столетия была замечена тесная связь между проблемой фундаментального принципа и проблемой интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа. Оказалось, что они двойственные. Первый, кто использовал разрешимость интерполяционной задачи для разложения решений уравнения свертки в ряды экспонент, был, по-видимому, А.Ф. Леонтьев. Вслед за ним указанная связь использовалась уже систематически. Проблема интерполяции в пространствах целых функций сама по себе представляет значительный интерес и имеет богатую историю. Вопросами интерполирования в классах целых функций конечного порядка занимались многие математики. Отметим

исследования А.О. Гельфонда, В.Л. Гончарова, М.А. Евграфова, Б.Я. Левина, А.Ф. Леонтьева, ИИ. Ибрагимова и М. В. Келдыша, Ю. А. Казьмина, Ю.Ф. Коробейника и др.

Исследования указанных двойственных задач, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. А.С. Кривошеевым в 2004 г. получены наиболее полные решения этих задач для произвольной выпуклой области DcC при одном ограничении mD(A) = 0 на относительную кратность Л: *пк(р)/\Лк(р)\* -> 0 для любой *{Лк(р)}* такой, что ^(р)/|Я«р)1 "" *е~і(р* *иНв((р)* *<* +оо. Отметим, что критерий разрешимости интерполяционной задачи и допустимости фундаментального принципа в подпространстве VK(A,D), полученный А.С. Кривошеевым имеет один недостаток. В его формулировке имеется «посредник», осуществляющий взаимосвязь между последовательностью Л и областью *D .* Требуется существование семейства целых функций экспоненциального типа, асимптотические оценки сверху и снизу (вне исключительного множества) которых сколь угодно близки друг к другу и согласуются с *D.*

Одним из необходимых условий фундаментального принципа является равенство нулю индекса конденсации А.С. Кривошеева *SA.* Если оно нарушается, то становится невозможным представление всех функций из подпространства *W(A,D)* в виде ряда (1). Известно, однако, что и в этом случае иногда удается получить представление всех функций *д* Є *W(A,D)* в виде ряда (1) «со скобками». Одним из первых результатов подобного рода является результат А.О. Гельфонда 1938 г., в котором утверждается, что каждое целое решение однородного уравнения свертки раскладывается в равномерно сходящийся на компактах ряд

**оо** ***Пк****-1*

*g{z)* = У У У *dnfizn* exp(Afcz) , z Є *Ъ* = (С, (4)

*т=1 Лкеит* п=0

где Л = *{Лк,пк}* - нули и их кратности характеристической функции / оператора свертки, *Um-*группа всех *Лк* из кольца *гт* *< \Л\* *< гт+1,* а *{гт}* *—* возрастающая к +оо последовательность чисел такая, что на окружностях *\Л\* *=* *гт* модуль / имеет подходящие оценки снизу. А.Ф. Леонтьев распространил этот результат на любые нетривиальные инвариантные подпространства целых функций. При этом роль / может играть любая целая функция экспоненциального типа, которая обращается в ноль в точках *Лк* с кратностью не меньшей чем *пк.* Отметим еще, что А.Ф.Леонтьев с помощью индекса конденсации Бернштейна получил критерий фундаментального принципа для инвариантных подпространств целых функций в случае простых *Лк* *.*

Д. Диксон в 1964 г. доказал результат, в котором представление (4) распространяется на произвольные выпуклые области DcC вида *D* *=* *G* + *К* при условии регулярности роста характеристической функции /, где *G* *-* выпуклая область *и* *К-* сопряженная диаграмма /.

В дальнейшем было замечено, что группы *Um* из представления (4) можно формировать не только «по кольцам». Оказалось, что представление (4) будет иметь место, если разбиение семейства (Л) на группы осуществить так, чтобы выполнялось следующее: группы *Um* лежат в ограниченных областях (каждая в своей), на границах которых оценки снизу и сверху на модуль характеристической функции асимптотически совпадают. Таким образом, удалось существенно уменьшить размеры групп и перейти к так называемым «относительно малым» группам. А. С. Кривошеев показал, что линейные комбинации элементов системы (Л) внутри относительно малых групп *т* обладают свойствами схожими со свойствами

экспоненциальных функций. Поэтому представления по таким линейным комбинациям наиболее предпочтительны. В работах Р. Мейзе, В.В. Напалкова и А.С. Кривошеева в областях *D* *=* *G* + *К* для решений однородного уравнения свертки было получено представление (4), где группы *Um* являются относительно малыми. На характеристическую функцию / накладывались условия медленного убывания и регулярности роста. Эти условия обеспечивают наличие необходимого разбиения системы (Л) и подходящих оценок снизу на |/|. При этом удалось получить больше чем просто представление (4). Было доказано, что внутри каждой группы *т* существует фиксированный набор линейных комбинаций такой, что в совокупности все эти наборы образуют базис в пространстве решений, но подобный набор предъявлен не был.

Особо отметим случай, когда плотность п(Л) = 0. Д. Полиа в 1929 г. доказал, что каждое аналитическое решение уравнения свертки с характеристической функцией / минимального типа имеет выпуклую область существования. Валирон в 1929 г. доказал, что каждое аналитическое решение указанного уравнения в области своего существования представляется в виде (4), где *Um* *-* группа всех нулей *Ак*функции / из кольца *гт* *< \Х\* *< гт+1.*

В связи с представлением (4) естественным образом возникает задача о переходе от такого представления в виде ряда «со скобками» к представлению рядом (2), где участвуют фиксированные линейные комбинации элементов системы (Л), которые образуют базис в подпространстве *W(A,D)* *.* Эта задача называется проблемой существования базиса в инвариантном подпространстве. Если он существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Каковы условия его существования. Как осуществить разбиение *U* и можно ли описать все подходящие разбиения. Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации. Насколько малым можно сделать диаметр групп *Um,* т.е. насколько новый «чистый» ряд будет близок по своим свойствам к (1). Наконец, с каким пространством числовых последовательностей можно отождествить *W(A,D).*

Ответы на эти вопросы (за исключением первого и второго) были даны А.С. Кривошеевым в 2010, 2012 гг. В частности, получено следующее. Если в *W(A,D)* существует базис, состоящий из линейных комбинаций элементов системы (Л), сформированный по разбиению *U* на относительно малые группы, то базисом необходимо будет и описанная выше система (Л, *U)* *.* При условии, что эта система является базисом, дается описание всех возможных базисов такого рода. Приводится критерий на последовательность матриц перехода, осуществляющих переход от одного базиса к другому. Также при условии, что система (Л, *U)* является базисом, описано (линейное топологическое) пространство числовых последовательностей (коэффициентов ряда (2)), которое можно отождествить с подпространством *W(A,D).* Кроме того, задача о том, когда система (Л, *U)* является базисом в подпространстве *W(A,D)* сведена к решению специальной двойственной задачи интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа.

В работе [7] А.С. Кривошеевым получены достаточные условия разрешимости этой интерполяционной задачи а, как следствие, и достаточные условия для того, чтобы система (Л,{/) была базисом в инвариантном подпространстве *W(A,D)* в случае произвольной ограниченной выпуклой области/). Эти условия состоят в следующем. Последовательность Л должна быть частью нулевого множества целой функции экспоненциального типа и

регулярного роста, сопряженный индикатор которой совпадает с замыканием области *D,* и индекс конденсации *SA(U)* *=* О (т.е. Л совместима с областью *D).*

Задача описания множества особых точек суммы *дАа* ряда (1) на границе его области сходимости В (Л, а) имеет долгую историю. Ее истоки лежат в начатых еще в позапрошлом веке исследованиях областей существования функций, представимых в виде степенных рядов. В 1892г. Ж. Адамар доказал, что если функция *д* представляется рядом

***g****(****w****) =* ***Ydkwn(-k\*** (5)

fc=i

где *п(к* + 1) — *п(к)* *>* *ап(к),* *п >* *1,* *а* *>* О , то граница его круга сходимости является естественной границей области существования функции *д,* т.е. каждая точка этой границы является особой для *д.* Э. Фабри в 1896г. доказал, что утверждение Адамара сохраняется при более общем условии на последовательность *{п(к)}.* Достаточно чтобы она имела нулевую плотность: *к/п(к)* -> 0. Существенное обобщение этого результата было получено Д. Полиа в 1929 г. Важную роль сыграло введенное им понятие максимальной плотности п(Л) последовательности Л = *{п(к),* 1} положительных чисел. Он показал, что при условии п(Л) < оо, сумма ряда (5), сходящегося в единичном круге, на каждой дуге единичной окружности длины 2тгп(Л) имеет хотя бы одну особую точку. Позднее В. Фукс и П. Мальявен получили результат обратный к теореме Д. Полиа. Для каждой последовательности Л с N , удовлетворяющей условию п (Л) < оо, и каждого *е* *>* О был построен ряд (5), сходящийся в единичном круге, сумма которого аналитически продолжается через дугу единичной

окружности *[еІ(Р:\(р\<* 7ГП(Л) - є}.

Д. Полиа, а также Карлсон и Ландау распространили результат Фабри на случай рядов Дирихле. Они показали, что если функция *д* представляется в виде ряда Дирихле

*g{z) =* У *dke^z, Лк* *>* О, (6)

*к=1*

и *Лк+1-Лк* *> h* *>* 0, *к >* 1, то либо *д* *-* целая функция, либо прямая сходимости (вертикальная прямая, ограничивающая полуплоскость сходимости ряда Дирихле) является естественной границей области существования функции *д.* Этот результат является частным случаем более общего результата В. Бернштейна. Он доказал, что при условиях

**со**

*к к К kJ* *к=1 к*

(у(Л) - индекс конденсации В. Бернштейна) каждый отрезок длины 2лт прямой сходимости ряда (6) (если таковая имеется) содержит, по крайней мере, одну особую точку функции #. Отметим, что утверждение Бернштейна ранее было доказано Д. Полиа при более сильном ограничении (чем у(Л) = 0) на последовательность Л = *{Лк}:* *Лк+1-Лк* *> h* *>* 0, *к >* 1.

А.Ф. Леонтьев обобщил результаты, полученные Д. Полиа, Э. Фабри и В. Бернштейном, на случай рядов экспонент с последовательностью (простых) показателей, имеющей нулевую

плотность. Он доказал, что при этом условии и дополнительном условии () = 0 область сходимости ряда экспонент совпадает с областью существования суммы ряда.

**Цели работы.** Исследовать условия представления функций из инвариантных подпространств аналитических функций посредством рядов (1) и (2). В связи с представлениями рядами (1) и (2) естественным образом возникают задачи изучения поведения сумм этих рядов. В частности, широко исследуется проблема распределения особых точек суммы ряда (1) и его частных случаев (рядов экспонент, рядов Дирихле и рядов Тейлора). Решение указанных проблем требует глубоких исследований в области сходимости рядов (1) и (2). Возникает целый ряд важных задач, которые тесно связаны с поведением последовательности = *{,* *}=1* показателей этих рядов. Прежде всего, это задача пополнения последовательности до правильно распределенного множества (т.е. до нулевого множества целой функции экспоненциального типа и регулярного роста), задача разбиения на группы, подходящие для представления рядом (2), изучение самой возможности такого разбиения. Кроме того, значительные роли играют проблема взаимосвязи между характеристиками последовательности и сходимостью рядов (1) и (2), задача о влиянии этих характеристик на соотношение между областями сходимости рядов и областями существования их сумм и др.

**Методика исследования.** Использованы методы теории рядов экспонент, теории целых функций, методы комплексного и функционального анализа, а также метод построения специальных рядов экспоненциальных мономов.

**Научная новизна.** Все основные результаты диссертации являются новыми. Получены следующие результаты:

- доказаны аналоги теорем Абеля и Коши-Адамара для рядов (1) и (2);

- найдены критерии представления рядами (1) и (2) функций из замкнутого инвариантного  
подпространства в ограниченной выпуклой области плоскости;

- получен критерий представления рядом (2) элементов инвариантного подпространства  
целых функций;

найден критерий на последовательность , когда область существования суммы любого ряда (1) совпадает с областью его сходимости;

получен критерий на последовательность , когда каждая сумма ряда Дирихле имеет хотя бы одну особую точку на любом отрезке фиксированной длины, лежащем на прямой сходимости ряда.

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты диссертации носят теоретический характер. Полученные в диссертации результаты и разработанная в ней методика могут быть полезны как в теории целых функций, теории рядов экспонент, так и в смежных областях анализа, таких, как теория аппроксимации в комплексной области, теории дифференциальных уравнений бесконечного порядка, теории операторов свертки. Они могут быть использованы специалистами, работающими в Математическом институте имени В.А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН, Санкт-Петербургском отделении Математического института имени В.А. Стеклова РАН, Московском, Ростовском,

Саратовском, Казанском, Башкирском госуниверситетах а также в других ведущих российских и зарубежных научных центрах.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на семинарах Института математики с ВЦ УФИЦ РАН под руководством член-корреспондента Напалкова В.В.; на семинарах в Башкирском государственном университете под руководством доктора физико-математических наук, профессора Юлмухаметова Р.С.; на Международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений» посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (Москва, 2009 г.); на VI уфимской международной конференции «Комплексный анализ и дифференциальные уравнения» (Уфа, 2011 г.); на XI Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2013 г.); на Международной конференции «Complex Analysis and Related Topics» (Санкт-Петербург, 2014 г.); на Международной научно-практической конференции «Комплексный анализ и его приложения» (Брянск, 2015 г.); на XII Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2015 г.); на IX Международной школе-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (Уфа, 2016 г.); на Международной научно-практической конференции «Современная математика и ее приложения» (Стерлитамак, 2017 г.); на XIII Международной Казанской летней школе-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (Казань, 2017 г.); на Международной математической конференции по теории функций, посвященной 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева (Уфа, 2017 г.); на Международной конференции «Complex Analysis and Related Topics» (Санкт-Петербург, 2018 г.); на 19-ой Международной Саратовской зимней школе, посвященной 90-летию со дня рождения академика П.Л. Ульянова «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2018 г.); на Международной конференции «Комплексный анализ и геометрия» (Уфа, 2018 г.); на Международной школе-конференции «комплексный анализ и его приложения» (Геленджик, 2018 г.).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 17 работ (16 из них опубликованы в журналах из списка ВАК и 1 монография). Из совместных работ [1], [2], [5]-[7], [9]-[11], [13] в диссертацию включены только результаты автора.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, разделенных на 21 параграф и списка литературы. Объем диссертации составляет 174 страницы. Библиография – 77 наименований.