

На правах рукописи



НОВИКОВА ОЛЬГА СЕРГЕЕВНА

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ
РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
НА ОСНОВЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Липецк 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Липецкий государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Пеньков Виктор Борисович

Официальные оппоненты: **Радаев Юрий Николаевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
ведущий научный сотрудник Института проблем
механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Минаева Надежда Витальевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО "Воронежский государственный университет инженерных технологий"**

Защита диссертации состоится «26» ноября 2019 г. в 16-00 на заседании объединенного диссертационного совета Д 999.191.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина 92. (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» и на сайте http://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Novikova_OS/

Автореферат разослан «27» сентября 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Глаголев Вадим Вадимович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Исторически развитие классических разделов механики опиралось на построение аналитических решений. Приближенные аналитические решения выводились для тел простых геометрических конфигураций. Стремление к построению решений более сложных задач (многополостных, со смешанными граничными условиями (ГУ)) проявилось еще в конце девятнадцатого века (например, «алгоритм Шварца»).

Переход к числовым технологиям породил новые методы решения. Широко распространены программные продукты (ANSYS, APM Civil Engineering, SCAD и др.), позволяющие выполнять довольно сложные расчеты и визуализировать результаты. Их общий недостаток – необходимость пересчета при изменении любого параметра задачи, без чего процесс проектирования не эффективен. Возникла необходимость аналитического приближения решений (методы Лагранжа, Чебышева, сплайн-интерполяции).

Аналитические решения выполняются единожды и далее используются без вычислительных затрат, а также в качестве лаконичной модели объекта в задачах параметрической оптимизации. Эффективные методики разработаны в задачах математической теории упругости Н.И. Мусхелишвили (основные задачи; методы рядов, задача сопряжения), Л.А. Толоконниковым, В.Б. Пеньковым (основные и смешанные задачи «рода 2» для односвязного тела), В.В. Сильвестровым (задачи для объектов, идентифицируемых в модели римановыми поверхностями). Наиболее полное представление материалов о состоянии двумерных тел (изотропных, ортотропных) содержится в фундаментальных работах С.П. Тимошенко, С. Войновского-Кригера и С.Г. Лехницкого. Удачны попытки построения аналитических решений в случае основных задач линейной анизотропии (А.Н. Володченков, А.В. Юденков) и неоднородности (В.В. Стружанов).

Аналитические решения некоторых пространственных задач теории упругости изложены в классических трудах. W. Thomson изложил задачу о сосредоточенной силе. J. Boussinesq рассмотрел воздействие силы на упругое полупространство и другие виды нагружения по ограниченной области. V. Cerruti описал напряженное состояние в упругом полупространстве, нагруженном на границе произвольными поверхностными усилиями. Н. Hertz работал над контактными задачами для полупространства. А.Е.Н. Love исследовал равномерное нормальное нагружение по круговой области. J.Н. Michell изучил равновесие сплошного конуса, нагруженного в вершине. Г.С. Шапиро построил решения задач о равновесии тяжелого конуса с вертикальной осью, а также для параболоида и цилиндра. И.Я. Штаерман и Л.А. Галин достигли важнейших результатов в решении контактных пространственных задач. G. Lamé решена задача для сферической оболочки. Задача о концентрации напряжений в окрестности сферической полости рассмотрена R.V. Southwell. Иные аналитические решения можно обнаружить в классических руководствах А.И. Лурье, Ю.Н. Работнова, а также Ф.А. Богашева, А.Г. Угодчикова. С.Т. Chau, Х.Х. Wai методом рядов построены приближенные аналитические решения: кососимметричной задачи о

нагружении цилиндра поверхностными усилиями, осесимметричной задачи о нагружении торцов цилиндра продольными усилиями в пределах воздействия жестких штампов. Подход С.И. Сенашова с соавторами дает возможность строить строгие решения для классов задач, обладающих общим свойством симметрии (типа «цилиндрическая оболочка», «винтовая поверхность» и др.); для квазилинейных объектов; объектов с усложненными жесткостными свойствами (динамика трехслойных пластин в условиях симметрии); построено в частном случае точное решение для анизотропной среды.

С начала XXI века развивается новый вариационный метод граничных состояний (МГС). Основываясь на положениях МГС, удобно производить выполнение расчетов в современных вычислительных системах, опирающихся на компьютерные алгебры (MathCad, Mathematica и др.) и предоставляющих результаты решения в численно-аналитическом виде. Это позволяет строить полнопараметрические аналитические решения (ППР), в которых фигурируют все параметры задачи в явном виде (для тел произвольной геометрии конфигурации, разнообразных типов ГУ, различных по характеру объемных сил и констант среды). Серьезным средством исследования неоднородных и нелинейных задач стал подход А. Пуанкаре, развитый для механики деформируемого твердого тела (МДТТ) работами Д.Д. Ивлева, Л.В. Ершова, Н.В. Минаевой. Применение метода возмущений в сочетании с МГС (Л.В. Левина, МГСВ) принципиально снижает затраты вычислительных ресурсов: основная энергоемкая процедура (ортогонализация базиса) выполняется однократно.

Актуальность разработки методики построения полнопараметрического аналитического решения для произвольных эластостатических объектов неоспорима и обеспечивает сокращение ресурсоемкости вычислений, высокую точность выполнения расчетов, всесторонний анализ напряженно-деформированного состояния (НДС), легкость тестирования, определение аналитической зависимости решения от параметров, доступность параметрической оптимизации, возможность прогнозирования при оценке критических НДС.

Целью работы является обеспечение методологии построения полнопараметрических решений корректных задач теории упругости.

Средства достижения поставленной цели:

1. Разработка общей методики построения ППР.
2. Выбор метода, эффективного в части представления решения в аналитической форме.
3. Теоретическое обеспечение гарантированного включения в ППР параметров среды, геометрии тела, ГУ, нагрузки на бесконечности, объемных сил.
4. Применение технологии построения ППР к решению конкретных задач.

Научную новизну работы составляют положения, приведенные ниже.

1. Полномасштабный подход к построению ППР реализован впервые.

2. Для явного включения в решение параметров ГУ, нагрузки на бесконечности, объемных сил предложена технология эталонных решений.

3. Для параметров упругой среды и геометрии тела использованы подходы Лагранжа, Чебышева, Пуанкаре. Выполнен их сравнительный анализ.

4. Каждый из перечисленных аспектов научной новизны подтвержден решением конкретных задач.

Теоретическая значимость заключается в предоставлении реальных возможностей построения полнопараметрических аналитических решений (в перспективе – автоматически средствами компьютерных алгебр).

Практическая ценность заключается в ресурсосбережении. Владение полнопараметрическим аналитическим решением позволяет:

- анализировать влияние параметров на НДС тела без перерасчетов;
- синтезировать объект при помощи параметрической оптимизации полнопараметрического решения по любому техническому критерию.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 16-41-480729 «р_а».

Методология и методы исследования. Используются классические модели механики сплошной среды и основные строго доказанные положения МДТТ: П – теорема, принцип взаимности Бетти, теорема Соммилиана, принцип возможных перемещений для установления изоморфизма гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний, строгий математический аппарат теории пространств, самодостаточный с позиций обеспечения задаваемой точности решения МГС, строго обоснованные методы интерполяции по Лагранжу и аппроксимации по Чебышеву, обратный метод анализа упругих полей от объемных сил, метод возмущений.

Положения, выносимые на защиту.

1. Системный подход к обеспечению гарантированного построения ППР, использующий современные технологии компьютерных алгебр.

2. Технология эталонных решений, позволяющая поочередно анализировать влияние параметров, отвечающих за разнообразие ГУ, нагрузки на бесконечности, объемные силы, и комбинировать ППР через эталонные решения в аналитической форме с символьными коэффициентами.

3. Технология включения в ППР параметров среды и геометрии тела, опирающаяся на интерполяционные, аппроксимационные схемы и метод возмущений.

4. Аналитические полнопараметрические формы решений конкретных задач эластостатики.

Достоверность обеспечивается использованием классических положений ТУ, корректной математической постановкой задач, использованием самодостаточного метода решения (МГС), оценкой погрешности решений интегральной невязкой, строгим построением полей НДС от полиномиальных объемных сил.

Апробация работы. Результаты исследования и основные положения диссертационной работы представлялись на: семинарах научной школы «Математические методы и модели механики» (руководитель В.Б. Пеньков,

Липецк, ЛГТУ), НК студентов и аспирантов ЛГТУ (Липецк, ЛГТУ, апрель 2016 г., 24-26.04.2017), МНК «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения» (Липецк, 30.06.2016), конференции с международным участием «Современные вопросы механики сплошных сред 2017» (Чебоксары, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, 14-15.09.2017), МНТК «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (Воронеж, ВГУ, 12–15.09.2016, 18–20.12.2017, 17–19.12.2018), «Проблемы и перспективы развития машиностроения» (Липецк, ЛГТУ, 17–18.11.2016), V МНПК «Актуальные вопросы в науке и практике» (Самара, 01.02.2018), областном профильном семинаре «Школа молодых ученых по проблемам технических наук» (Липецк, ЛГТУ, 09.11.2018).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертации опубликовано 19 печатных работ, в том числе 2 статьи опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК РФ, 2 статьи – в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных Scopus, и 1 статья – Web of Science. Во всех публикациях с соавторами соискателем выполнены процедуры, связанные с организацией ППР. В работах [6–8, 11, 12, 16] обоснована методика построения эталонных решений. В работах [1, 5–9, 11–13, 15, 17–19] выполнены действия по аппроксимации и интерполяции решений. В работах [2–4, 14] конкретизирована структура итерационных процессов по применению метода возмущений.

Структура и объем диссертации: диссертация состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка литературы и приложения на 33 страницах. Объем основного текста составляет 95 страниц, включая 25 рисунков, 9 таблиц и список литературы из 128 наименований. Общий объем работы – 128 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены актуальность темы исследования, цели и задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, степень достоверности и апробация результатов.

В первом разделе обозначены этапы, результатом выполнения которых является аналитическое решение, содержащее все параметры задачи:

1. Корректная механическая постановка задачи.
2. Проведение обезразмеривания определяющих соотношений.
3. Выбор метода решения задач эластостатики, позволяющего представить решение в аналитической форме.
4. Обеспечение фигурирования в ППР параметров, заявляемых в ГУ, нагрузке на бесконечности.
5. Включение параметров среды в ППР.
6. Обеспечение фигурирования в ППР геометрических параметров тела.
7. Обеспечение зависимости решения от параметров объемных сил.
8. После завершения действий в обезразмеренной постановке выполняется переход к размерным величинам.

Дается механическая постановка задачи для изотропного линейно-упругого тела. Обезразмеривание выполняется в соответствии с П – теоремой.

Проведен краткий обзор общих методов решения задач эластостатики. Предпочтение отдано МГС, характеризующемуся рядом отличительных черт:

1) ориентация на компьютерные алгебры (промежуточные и конечные результаты счета имеют форму аналитических выражений);

2) ГУ любого типа легко формализуются (для основных задач доказана разрешимость и единственность решения любой усеченной БСУ);

3) возможность назначения глобальной системы тестов;

4) самодостаточность (не требуется сопоставления решения с таковым, построенным иными способами, поскольку дифференциальные уравнения удовлетворяются тождественно, о точности решения можно судить по невязке ГУ с построенным решением).

МГС основан на понятии состояния среды, под которым понимается любое частное решение, удовлетворяющее определяющим соотношениям. Внутреннее $\xi \in \Xi$ и граничное $\gamma \in \Gamma$ состояния в области V с границей ∂V есть наборы $\xi = \{u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}_V$ и $\gamma = \{u_i, p_i\}_{\partial V}$, соответственно, где u_i , p_i , σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты векторов перемещений и поверхностных усилий, тензоров напряжений и деформаций.

Пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний являются гильбертовыми и изоморфными ($\Xi \leftrightarrow \Gamma$). Для изоморфных пар элементов ($\xi_i \leftrightarrow \gamma_i$) выполняются условия линейности и равенства скалярных произведений:

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \leftrightarrow \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2, \quad (\xi_1, \xi_2)_{\Xi} = (\gamma_1, \gamma_2)_{\Gamma}.$$

Счетные базисы сепарабельных гильбертовых пространств отвечают однородной ($X_i = 0$, где X_i – компоненты вектора объемных сил) постановке: $\Xi_0 = \{\xi^{(k)} \in \Xi \mid k \in N\}$, $\Gamma_0 = \{\gamma^{(k)} \in \Gamma \mid k \in N\}$. Базисы наполняются на основе общих решений Аржаных-Слободянского и ортогонализируются в соответствии со скалярными произведениями:

$$(\xi^{(1)}, \xi^{(2)})_{\Xi} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dv = \int_{\partial V} p_i^{(2)} u_i^{(1)} ds \equiv (\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)})_{\Gamma}.$$

После ортономирования базисов составляется и решается бесконечная система уравнений (БСУ) относительно вектора $\mathbf{c} = \{c_k\}$ коэффициентов Фурье:

$$Q \mathbf{c} = \mathbf{q},$$

где $\mathbf{q}$ – вектор правых частей БСУ. Матрица коэффициентов Q инвариантна по отношению к конкретному наполнению граничных условий, так как зависит лишь от элементов базиса пространства Γ . При этом, в первой и второй основных задачах теории упругости Q является единичной матрицей. Напротив, $\mathbf{q}$ определяется и базисом, и внешним воздействием по границе. Например, в случае первой основной задачи

$$q_k = \int_{\partial V} (p_x u_x^{(k)} + p_y u_y^{(k)} + p_z u_z^{(k)}) ds$$

и вследствие $Q = E$ непосредственно дают решение БСУ: $c_k = (\gamma, \gamma^{(k)})$.

Искомые состояния ξ , γ определяются рядами Фурье:

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi^{(k)}, \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma^{(k)}$$

по соответствующим изоморфным ортонормированным базисам.

Выполнена постановка общей корректной краевой задачи в терминах МГС.

Операторная форма записи определяющих соотношений такова:

$$L\xi = f, \quad x \in V. \quad (1)$$

Правая часть $f \neq 0$ соответствует формулировке неоднородной задачи.

Набор ГУ любого корректного характера обозначим $\langle \gamma \rangle$. Определяющим соотношениям (1) соответствуют ГУ (B – линейный оператор):

$$B\gamma = \langle \gamma \rangle, \quad x \in \partial V. \quad (2)$$

Решение ищем через композицию таковых для однородной и неоднородной задач: $\xi = \xi^0 + \xi^* \leftrightarrow \gamma = \gamma^0 + \gamma^*$. Для отыскания частного решения ξ^* ($\xi^* \leftrightarrow \gamma^*$, $\gamma^* \rightarrow \langle \gamma^* \rangle$) эффективен «обратный метод» (раздел 3).

Поправка $\langle \gamma^* \rangle$ входит в решение ξ^0 однородной задачи

$$L\xi^0 = 0, \quad x \in V \quad (3)$$

через ГУ: $B\gamma^0 = \langle \gamma \rangle - \langle \gamma^* \rangle$, $x \in \partial V$.

Во втором разделе рассмотрено включение параметров среды и геометрии в ППР.

В обезразмеренной постановке для изотропного упругого тела заданной геометрии свободным в отношении варьирования остаётся лишь коэффициент Пуассона. Простейший прием его учета в явном виде является решение серии задач при различных значениях $\nu \in [0, 0.5]$ и последующее их интерполирование или аппроксимация (например, методами Лагранжа, Чебышева). Недостатки: многократная перестройка исходного базиса, ортогонализация. Интерполяцию достаточно проводить только для вектора перемещения; тензоры деформаций и напряжений далее вытекают из формул Коши и обобщенного закона Гука.

Интерполяционные методы имеют нулевые узловые отклонения, но при количестве n узлов требуют использование полиномов порядка $n-1$. Отклонение решения от истинного на интервалах между узлами незначительно.

На примере шара выполнены оценки достоверности, точности полученного решения путем подстановки в определяющие соотношения среды и ГУ. Точностное исследование подтвердило самодостаточность МГС даже при использовании интерполяционных инструментов.

Аппроксимирующий подход П.Л. Чебышева не требует высоких порядков полиномов и гарантирует межузловую погрешность того же уровня, что и узловая. Последнее подчеркивает преимущества аппроксимирующих подходов (в частности, П.Л. Чебышева) перед интерполирующими

(аппроксимирующий подход может обеспечить эффект интерполирования выбором максимального порядка многочленов).

Более рациональным представляется подход, основанный на применении метода возмущений. Идеология МГСВ состоит в «обвязывании» МГС аппаратом А. Пуанкаре. Для изотропной среды полагаем модуль сдвига μ фиксированным и вводим малый параметр β для коэффициента Пуассона: $\nu = \nu_0(1 + \beta)$.

Аппарат МГСВ эффективен в задачах анизотропной упругости. Для ортотропной среды с осями ортотропии Ox , Oy обобщенный закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{xx} = \lambda_1 \theta + 2\mu_1 \varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda_1 \theta + 2\mu_2 \varepsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu_0 \varepsilon_{xy},$$

где $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \mu_0$ – модули объемного расширения и сдвигов. Для обобщенного плоского напряженного состояния удобно записать в виде:

$$\sigma_{xx} = \lambda(1 + \alpha)\theta + 2\mu(1 + \beta)\varepsilon_{xx}, \quad \sigma_{yy} = \lambda(1 + \alpha)\theta + 2\mu(1 + \alpha)\varepsilon_{yy}, \\ \sigma_{xy} = 2\mu(1 + \delta)\varepsilon_{xy}.$$

Малые параметры α, β, δ связаны со значениями модулей упругости:

$$\mu_1 = \mu(1 + \beta), \quad \mu_2 = \mu(1 + \alpha), \quad \lambda_1 = \lambda(1 + \alpha), \quad \mu_0 = \mu(1 + \delta).$$

На каждой итерации решается классическая задача ГУ. Искомое решение декомпозируется на две составляющие. Одна из них отвечает НДС от объемных сил и выписывается строго в области V и на ∂V . Граничное состояние вносит поправку в ГУ, чтобы после отыскания состояния от скорректированных ГУ, их сумма на ∂V совпала с ГУ, поставленными на итерации.

Не требуется многократная ортогонализация базисов. Этот факт является определяющим в сравнении эффективностей применения методов возмущений, интерполяции, аппроксимации и характеризует МГСВ как самый ресурсосберегающий подход.

Для включения параметров геометрии решается серия однотипных задач с последующим приближением результатов аналитическими выражениями.

Построены ППР в конкретных задачах эластостатики: первая основная задача для шара; основная смешанная задача для цилиндра; первая основная задача для шара с неконцентрической сферической полостью и шара, ослабленного поверхностной выемкой; вторая основная задача для тела пулеобразной формы с поливариантностью в ГУ относительно перемещений на границе; плоская задача о нагружении ортотропной пластины; задача о равновесии поверхностно упрочненного гиперболоидального тела при варьируемых параметрах геометрии тела.

В третьем разделе разработан метод эталонных решений при поливариантности граничных условий и объемных сил.

Однородная постановка задачи (3) при поливариантных ГУ:

$$B\gamma^0 = \langle \gamma \rangle, \quad \langle \gamma \rangle = \sum_{k=1}^K \chi_k \langle \gamma^k \rangle, \quad x \in \partial V, \quad (4)$$

где коэффициенты χ_k являются параметрами, $\langle \gamma^k \rangle$ – «эталонная» форма ГУ.

Для каждого $k \in \{1, K, K\}$ решаем задачу (3) при эталонном ГУ $\langle \gamma^k \rangle$ и получаем эталонное решение: $\xi^{0k} \leftrightarrow \gamma^{0k}$. Линейная комбинация таковых даёт

$$\xi^0 = \sum_k \chi_k \xi^{0k} \leftrightarrow \gamma^0 = \sum_k \chi_k \gamma^{0k} \text{ и удовлетворяет ГУ (4).}$$

Решена задача о круговом цилиндре, заключенном в условиях спайки с плоскими жесткими штампами при произвольном малом движении последних.

Для тела пулевидной формы (рисунок 1) геометрические пропорции зафиксированы; упругие модули материала варьируются; объемные силы отсутствуют; допускаются различные сочетания параметров нагружения на S_1, S_2, S_3 ($S_u = S_1$, $S_p = S_2 \cup S_3$, $r \in [0;1]$, $z \in [-1;0]$, $\varphi \in [-\pi; \pi]$, $\theta \in [0; \pi/2]$), представленные в полярной, цилиндрической, сферической системе координат, соответственно:

$$\mathbf{u}|_{S_1} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-1+r^2)^2 \end{pmatrix}, \mathbf{p}|_{S_2} = b \begin{pmatrix} z \cos \varphi \\ z \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}|_{S_3} = a \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \sin 2\theta \\ \cos \theta \sin \varphi \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Требуется выписать ППР с произвольным сочетанием параметров нагружения.

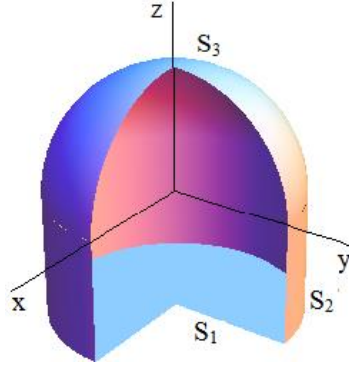


Рисунок 1 – Форма тела

Решение построено средствами МГСВ. Ниже приведено перемещение вдоль Ox (все величины имеют исходную размерность):

$$\begin{aligned} u_x \approx & ax[0.245z/R + 0.218z^2/R^2 - 0.229z^4/R^4 + 4(-0.115x^4z^3/R^7 + 0.117x^2z^3/R^5 + \\ & + 0.116y^2z^3/R^5 - 0.225x^2y^2z^3/R^7 - 0.117xz^4/R^4 - 0.134z^5/R^5)(\nu - 0.25) + \\ & + 16(-0.167x^2y^2z^3/R^7 - 0.125z^4/R^4 - 0.124z^5/R^5)(\nu - 0.25)^2] + \\ & + bx[-0.214x^2z^2/R^4 - 0.210y^2z^2/R^4 + 0.322x^2y^2z^3/R^7 + 0.271z^4/R^4 + \\ & + 4(-0.177z^2/R^2 + 0.172x^2y^2z^3/R^7 + 0.211z^4/R^4)(\nu - 0.25) + 16(-0.201z^2/R^2 + \\ & + 0.217z^4/R^4)(\nu - 0.25)^2] + cx[-0.309z/R + 0.248x^2z^3/R^5 - 0.243y^2z^5/R^7 + \\ & + 4(-0.234z/R - 0.273x^2z^5/R^7 - 0.274y^2z^5/R^7)(\nu - 0.25) + 16(-0.191z/R - \\ & - 0.196x^2y^2z/R^5 - 0.283x^2z^5/R^7 - 0.285y^2z^5/R^7)(\nu - 0.25)^2]. \end{aligned}$$

На рисунке 2 представлены линии уровня безразмерных напряжений в сечении $y = 0$ при линейной комбинации состояний ξ^I, ξ^II, ξ^III соответственно в задачах 1, 2, 3: $\xi = a\xi^I + b\xi^II + c\xi^III$ при значениях параметров $a = -0.01$, $b = -0.005$, $c = 0.002$.

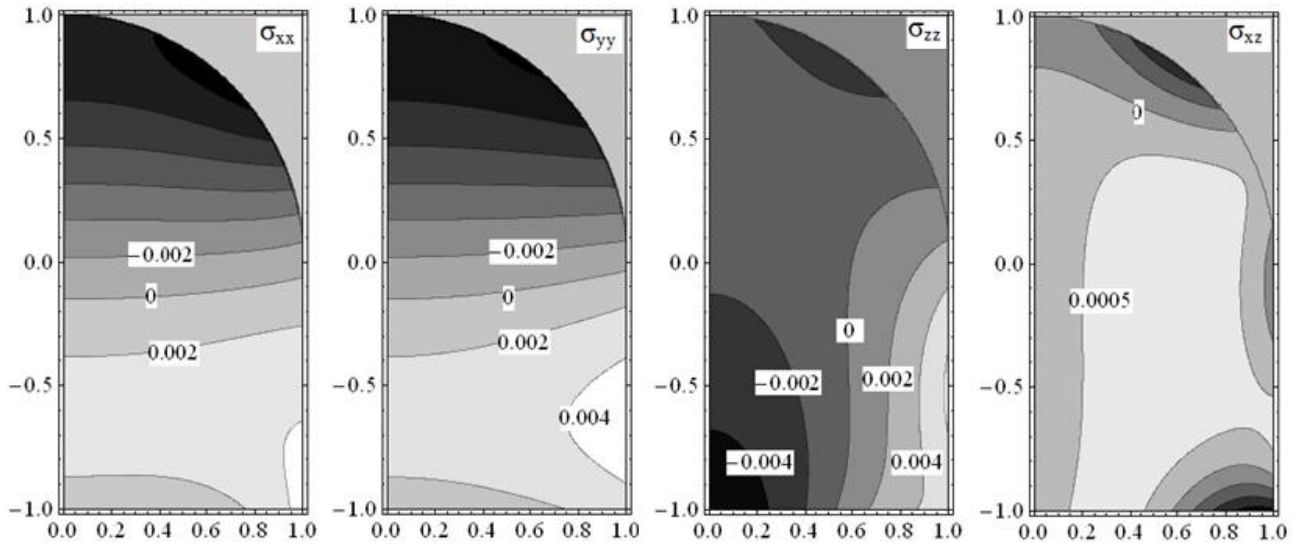


Рисунок 2 – Линии уровня безразмерных напряжений σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xz}

Для учета однородного напряженного состояния на бесконечности (достаточно удерживать только главные напряжения $X^\infty, Y^\infty, Z^\infty$, хотя можно к списку добавить и напряжения сдвига) необходимо построить эталонные состояния ξ_x, ξ_y, ξ_z при единичных значениях соответствующих факторов. Реальное символьное представление суммарного состояния определяется линейной комбинацией $\xi = X^\infty \xi_x + Y^\infty \xi_y + Z^\infty \xi_z$. Это выражение легко обобщается на случай учета напряжений сдвига на бесконечности. Описанная технология принципиально позволяет выписывать ППР для неограниченных тел с конечным множеством ограниченных полостей.

На примере центральносимметричной задачи для неограниченного тела с незагруженной полостью установлено высокоточное совпадение приближенного решения, полученного средствами МГС, и классического решения.

Рассмотрена задача об одноосном растяжении неограниченной среды, содержащей две равновеликие сферические полости, при произвольных коэффициенте Пуассона и межполостном расстоянии. Напряжение на бесконечности есть Z^∞ . Ось z нормальна к общей экваториальной плоскости полостей. После обезразмеривания варьируются параметры: ν , h , Z^∞ .

Эталонные решения (т.е. при $Z^\infty = 1$) были построены для возможных сочетаний значений $\nu \in \{0.2, 0.25, 0.3\}$, $h \in \{0.05, 0.4, 12.6\}$ (линейный масштаб равен R , масштаб по напряжениям – модуль сдвига μ).

Ввиду громоздкости ППР ниже выписано только перемещение вдоль Oz :

$$\begin{aligned}
u_z \approx & Z^\infty z(0.496 + 0.017/A^{9/2} - 0.010x/(R A^{9/2}) + 0.018x^2 z^2/(R^4 B^{11/2}) + \\
& + 1.232x^5/(R^5 C^{15/2}) - 0.449 v - 0.152 x^4 v/(R^4 B^{11/2}) + 2.924xy^4 v^2/(R^5 C^{11/2}) + K + \\
& + (-0.385/A^{9/2} + 0.003z^4/(R^4 B^{11/2}) + 2.399x^7 v/(R^7 C^{15/2}) + 0.028v^2/A^{5/2} + K)h + \\
& + (0.855/A^{9/2} - 0.013xz^2/(R^3 C^{9/2}) + 0.043xv/(R B^{9/2}) + 0.005z^2 v^2/(R^2 A^{9/2}) + K)h^2)/\mu,
\end{aligned}$$

где $A = (-7 + x/R)^2 + y^2/R^2 + z^2/R^2$, $B = (-0.9 + x/R)^2 + y^2/R^2 + z^2/R^2$,
 $C = (-0.725 + x/R)^2 + y^2/R^2 + z^2/R^2$.

Пусть объемная сила является линейной комбинацией:

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^K \chi_k \mathbf{X}^k,$$

где $\mathbf{X}^k$ – вектор полиномов от k -го эталонного объемного воздействия, χ_k – символьный параметр эталона k .

Для каждого k частное решение (1), (2) выписывается в аналитической форме ($\xi^{*k} \leftrightarrow \gamma^{*k}$) и оставляет на ∂V след $\langle \gamma^{*k} \rangle$. Эта поправка «забирает» на себя неуравновешенную часть объемных сил, выводя это воздействие неуравновешенности из ГУ однородной задачи. Линейные комбинации

$$\xi^* = \sum_k \chi_k \xi^{*k} \leftrightarrow \gamma^* = \sum_k \chi_k \gamma^{*k}$$

отвечают за ППР задачи (1) и формируют ГУ:

$$\langle \gamma^0 \rangle = \langle \gamma \rangle - \sum_k \chi_k \langle \gamma^{*k} \rangle,$$

благодаря чему ГУ приобретают поливариантность. Поливариантность представления объемных сил превращается в поливариантность для ГУ.

Биконус (рисунок 3а) радиуса R и высоты $2R$ подвержен воздействию сил инерции и одноосно-симметричных сил, в условиях первой основной задачи $\mathbf{p}|_{\partial V} = \{0, 0, 0\}$, $\mathbf{x} \in \partial V$. Ось Oz есть ось вращения. Обезразмеренные упругие константы конкретного материала с $\nu = 1/4$ (стекло, углеродистая сталь) равны: $\mu = \lambda = 1; R = 1$. Средства решения: МГС, «обратный метод», декомпозиция.

Задача I (в обезразмеренной постановке) о распределении напряжений в биконусе от усилий эталонного вращения $\mathbf{X}^I = \{x, y, 0\}$ имеет решение:

$$\begin{aligned}
u_x \approx & x(0.087 - 0.190z^2 + 0.086z^4 + (-0.041 + 0.003(x^2 + y^2) - 0.082z^2)(x^2 + y^2)), \\
u_y \approx & y(0.087 - 0.190z^2 + 0.086z^4 + (-0.041 + 0.003(x^2 + y^2) - 0.082z^2)(x^2 + y^2)), \\
u_z \approx & z(-0.076 + 0.064z^2 - 0.028z^4 + (0.093 - 0.005(x^2 + y^2) + 0.077z^2)(x^2 + y^2)).
\end{aligned}$$

Задача II (в обезразмеренной постановке) о распределении напряжений в биконусе под действием одноосных сил $\mathbf{X}^{II} = \{0, 0, z\}$ имеет решение:

$$\begin{aligned}
u_x \approx & x(-0.027 + 0.059z^2 + (0.021 + 0.044z^2)(x^2 + y^2) - 0.013x^2 y^2 - 0.007(x^4 + y^4 + z^4)) \\
u_y \approx & y(-0.027 + 0.059z^2 + (0.021 + 0.044z^2)(x^2 + y^2) - 0.013x^2 y^2 - 0.007(x^4 + y^4 + z^4)) \\
u_z \approx & z(0.097 - 0.047z^2 - (0.156 + 0.082z^2)(x^2 + y^2) + 0.096x^2 y^2 + 0.048(x^4 + y^4) + 0.007z^4)
\end{aligned}$$

На рисунках 3б, 3в, 3г представлены безразмерные напряжения в купюре $y = 0$ биконуса при линейной комбинации состояний ξ^I (задача I) и ξ^{II} (задача II): $\xi = \rho\omega^2 \xi^I + \chi \xi^{II}$ при значениях параметров $\rho\omega^2 = 5$, $\chi = 1$. Линии уровня напряжений σ_{yy} имеют характер идентичный с σ_{xx} .

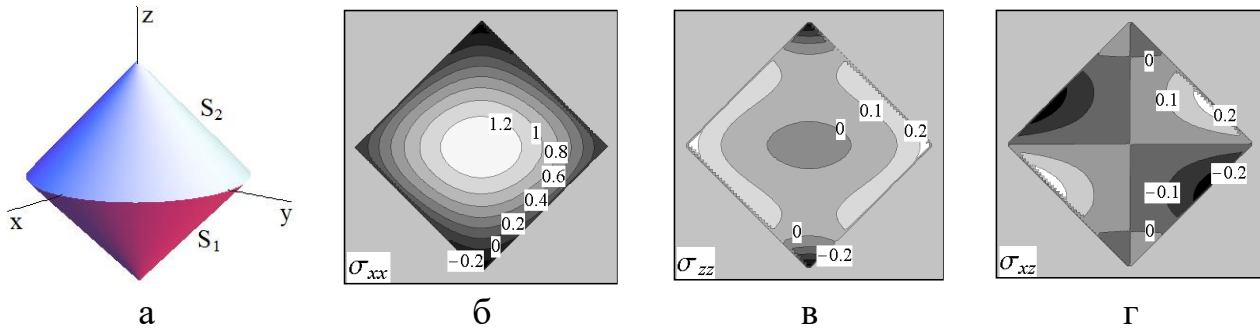


Рисунок 3 – Напряженное состояние биконуса: (а) – биконус, (б) – радиальные напряжения, (в) – осевые напряжения, (г) – напряжения сдвига

Переход к размерным величинам позволил выписать ППР: $\mathbf{u} = R / \mu(\rho\omega^2 \mathbf{u}^I + \chi \mathbf{u}^{II})$. Через определяющие соотношения восстанавливается соответствующее НДС. Пример убеждает в эффективности методики включения параметров объемных сил в общее решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования цель достигнута. Все поставленные задачи выполнены.

1. Разработана общая методика построения полнопараметрических аналитических решений для эластостатических тел произвольной геометрической конфигурации, включая вопросы связности.

2. Обоснован выбор метода граничных состояний как наиболее эффективного средства обеспечения построения ППР.

3. Изучены способы включения в ППР механических параметров упругой среды (интерполяция по Ж.Л. Лагранжу, аппроксимация по П.Л. Чебышеву, возмущения по А. Пуанкаре). Их сравнительный анализ показал существенный выигрыш в отношении ресурсосбережения в пользу методов возмущений. Приведены решения серии задач для изотропного тела и задачи для ортотропной пластины (один и три варьируемых параметра упругости, соответственно).

4. Рассмотрена проблема включения в ППР варьируемых параметров геометрии тела. На конкретном примере о поверхностно упрочненном гиперболоидальном теле с двумя геометрическими параметрами, отвечающими за высоту и диаметр торцевых опорных поверхностей, продемонстрирован один из эффективных подходов – интерполирование по Лагранжу. Наличие ППР позволило провести параметрическую оптимизацию тела по критерию минимальности массы в условиях допустимых по предельной нагрузке эксплуатационных режимов.

5. Предложена и обоснована методика применения «эталонных решений» для обеспечения присутствия в ППР конечных наборов параметров, отвечающих за поливариантность ГУ. Методика проиллюстрирована решением конкретной задачи для конечного кругового цилиндра при различных вариантах жесткого перемещения его оснований (основная смешанная задача).

6. В случае неограниченной области описан подход «эталонных решений» для включения параметров нагрузки на бесконечности в ППР.

7. Технология «эталонных решений» привлечена также для цели включения в ППР параметров поливариантных объемных сил в общем случае непотенциального характера (допускаются силы, аппроксимируемые полиномами). Отмечено, что кроме непосредственного участия этих параметров в частном решении общей постановки задачи эластостатики, они проявляются также в виде параметров поливариантных граничных условий.

8. Все вышеперечисленные выводы подтверждены решением представительной серии конкретных задач. Круг решенных задач убеждает в эффективности разработанной методики.

Просматриваются следующие ближайшие перспективы расширения разработанной методики гарантированного построения ППР:

1) использование метода возмущений А. Пуанкаре для варьирования формы границы с соответствующим включением в ППР параметров, отвечающих за формоизменение;

2) доведение вычислительного комплекса, базирующегося на компьютерной алгебре среды Mathematica, до уровня автоматизированной системы, выписывающей в конечной форме ППР для произвольной задачи эластостатики тела, имеющего произвольную форму.

Соискатель выражает благодарность Л.В. Левиной за своевременные и четкие консультации в части МГСВ.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, включенных в перечень ВАК:

1. Оптимизация облегченных элементов крепления при варьировании геометрических параметров / Л.В. Левина, О.С. Новикова, В.Б. Пеньков, М.В. Поликарпов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2017. – №4 (34). – С. 45–51.

2. Новикова, О.С. Метод граничных состояний с возмущениями как способ организации полнопараметрического аналитического решения второй основной задачи линейной эластостатики / О.С. Новикова, В.Б. Пеньков, Л.В. Левина // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2018. – №2 (36). – С. 26–37.

Публикации в изданиях, индексируемых в WoS и включенных в перечень ВАК:

3. Пеньков, В.Б. Построение полнопараметрических аналитических решений в основной смешанной задаче эластостатики односвязного тела / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, Л.В. Левина // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2018. – Т. 22, № 3. – С. 586–598. – doi: 10.14498/vsgtu1603.

Публикации в изданиях, индексируемых в Scopus:

4. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations / V.B. Penkov, D.A. Ivanychev, O.S. Novikova, L.V. Levina // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series / International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems». – 2018. – Volume 973, № 012015. – 10 p. – doi: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.

5. An algorithm for analytical solution of basic problems featuring elastostatic bodies with cavities and surface flaws / V.B. Penkov, L.V. Levina, O.S. Novikova, A.S. Shulmin // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series / International Conference «Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems». – 2018. – Volume 973, № 012016. – 11 p. – doi:10.1088/1742-6596/973/1/012016.

Другие публикации:

6. Левина, Л.В. Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела / Л.В. Левина, О.С. Новикова, В.Б. Пеньков // Вестник ЛГТУ. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2016. – № 2 (28). – С. 16-24.

7. Пеньков, В.Б. Полнопараметрические решения смешанной задачи эластостатики / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, Л.В. Левина, Е.А. Новиков // Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения: сб. науч. ст. Труды междунар. науч. конф. «Современная наука: актуальные проблемы и пути их решения» (Липецк, 30 июня 2016 г.) / Под ред. М.Ю. Левина. – Липецк: ООО «Максимал информационные технологии», 2016. – №5 (27) – С. 6-11.

8. Новикова, О.С. Методика построения полнопараметрического решения / О.С. Новикова, В.Б. Пеньков // Сб. тез. докл. науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ: в 2 ч. Ч. 1. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2016. – С. 24-26.

9. Пеньков, В.Б. Построение аналитических решений в задачах механики / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. трудов междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 12–15 сентября 2016 г.) – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2016. – С. 324- 326.

10. Новикова, О.С. Построение полнопараметрических аналитических решений основных смешанных задач эластостатики для обеспечения технологических процессов обработки давлением / О.С. Новикова // Проблемы и перспективы развития машиностроения: сб. науч. тр. междунар. науч.-техн. конф. к 60-летию ЛГТУ (17–18 ноября 2016 г.): в 2 ч. Ч. 2. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2016. – С. 203-208.

11. Напряжённо-деформированное состояние неоднородных конструкций при варьировании геометрических параметров / М.В. Поликарпов, Л.В. Левина, О.С. Новикова, Е.А. Новиков // Тенденции развития современной науки: сб. тез. докл. науч. конф. студентов и аспирантов ЛГТУ (24–26 апреля 2017 г.): в 2 ч. Ч. 1. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2017. – С. 33-36.

12. Включение геометрических и физических параметров неограниченного двуполостного эластостатического тела в полнопараметрические решения / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова,

А.С. Шульмин // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 18–20 декабря 2017 г.) – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 1228-1230.

13. Пеньков, В.Б. Построение аналитических решений в задачах эластостатики ограниченного многосвязного тела / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 18–20 декабря 2017 г.) – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 1231-1235.

14. Построение полнопараметрических решений задач статики ортотропной пластины методом граничных состояний с возмущениями / В.Б. Пеньков, Д.А. Иванычев, О.С. Новикова, Л.В. Левина // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 18–20 декабря 2017 г.) – Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2017. – С. 1221-1227.

15. Пеньков, В.Б. Современная концепция построения аналитических решений задач теории упругости / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова // Современные вопросы механики сплошных сред 2017: сб. ст. по материалам конф. (круглого стола) с междунар. участием (Чебоксары, 14-15 сентября 2017 г.) – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2017. – С. 70-75.

16. Пеньков, В.Б. Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил / В.Б. Пеньков, Л.В. Левина, О.С. Новикова // Вестник ЛГТУ. – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2017. – № 4 (34). – С. 52-56.

17. Включение геометрических параметров в полнопараметрическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородного тела / В.Б. Пеньков, О.С. Новикова, М.В. Поликарпов, Л.В. Левина // Актуальные вопросы в науке и практике: сб. ст. по материалам V междунар. науч.-практ. конф. (Самара, 1 февраля 2018 г.) В 4 ч. Ч.1 - Уфа: Изд-во «Дендра», 2018. – С. 212-218.

18. Новикова, О.С. Этапы построения аналитических решений задач механики на базе метода граничных состояний / О.С. Новикова // Школа молодых ученых по проблемам технических наук: сб. материалов областного профильного семинара (9 ноября 2018 г.) – Липецк: Изд-во ЛГТУ, 2018. – С. 195-198.

19. Новикова, О.С. Эффективность приближения многочленами Чебышева при построении полнопараметрического решения задачи об эластостатическом теле / О.С. Новикова, Е.А. Новиков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. науч.-техн. конф. (Воронеж, 17–19 декабря 2018 г.) – Воронеж: «Научно-исследовательские публикации», 2019. – С. 1212-1215.