Бондаренко Євген Володимирович. Назва дисертаційної роботи: "Алгоритмічні та геометричні властивості автоматичних груп "

Київський нацiональний унiверситет

iменi Тараса Шевченка

На правах рукопису

Бондаренко Євген Володимирович

УДК 519.713

АЛГОРИТМIЧНI ТА ГЕОМЕТРИЧНI

ВЛАСТИВОСТI АВТОМАТНИХ ГРУП

01.01.08 — математична логiка, теорiя алгоритмiв i дискретна математика

Дисертацiя

на здобуття наукового ступеня доктора

фiзико–математичних наук

Науковий консультант:

доктор фiз.–мат. наук, професор,

СУЩАНСЬКИЙ В. I.

Київ — 2015

2

Змiст

ВСТУП 7

1 ПОПЕРЕДНI ВIДОМОСТI 32

1.1. Групи автоморфiзмiв кореневих дерев . . . . . . . . . . . . . 32

1.1.1. Простори слiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

1.1.2. Дерева . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33

1.1.3. Рiст графiв та рiст груп . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

1.1.4. Автоморфiзми кореневих дерев . . . . . . . . . . . . . 35

1.2. Автомати та автоматнi групи . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

1.2.1. Автомати . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

1.2.2. Дiя автоматiв на словах . . . . . . . . . . . . . . . . . 40

1.2.3. Полiномiальнi автоморфiзми та автомати . . . . . . . 43

1.2.4. Ханойськi автомати та гра Ханойськi вежi . . . . . . 46

1.3. Самоподiбнi дiї груп . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 48

1.3.1. Вiртуальнi ендоморфiзми самоподiбних груп . . . . . 49

1.3.2. Стискуючi групи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

1.4. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

2 АЛГОРИТМIЧНI ВЛАСТИВОСТI АВТОМАТНИХ ГРУП 52

2.1. Проблема слiв в автоматних групах . . . . . . . . . . . . . . 52

2.1.1. Класичний алгоритм розв’язання проблеми слiв . . . 52

2.1.2. Проблема слiв в ханойських групах . . . . . . . . . . 55

3

2.1.3. Проблема слiв в групах, породжених полiномiальними

автоматами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

2.1.4. Проблема слiв в групах, якi узагальнюють полiномiальнi автомати та стискуючi групи . . . . . . . . . . . 63

2.2. Проблема порядку в групах автоморфiзмiв кореневих дерев 68

2.2.1. Орбiтальнi стани автоморфiзмiв . . . . . . . . . . . . 70

2.2.2. Граф порядку автоморфiзмiв . . . . . . . . . . . . . . 71

2.2.3. Проблема порядку для обмежених автоморфiзмiв . . 73

2.3. Проблема спряженостi в групах автоморфiзмiв дерев . . . . 74

2.3.1. Спряженiсть в групах Aut(X∗

) i RAut(X∗

) . . . . . . 74

2.3.2. Спряженiсть стискуючих автоморфiзмiв . . . . . . . . 82

2.3.3. Спряженiсть обмежених автоморфiзмiв в групi фiнiтарних автоморфiзмiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . 86

2.3.4. Проблема спряженостi в групi обмежених автоматiв . 91

2.3.5. Спряженiсть обмежених автоморфiзмiв в групах

полiномiальних автоматiв . . . . . . . . . . . . . . . . 99

2.4. Проблема скiнченностi для груп, породжених обмеженими

автоматами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101

2.5. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

3 САМОПОДIБНI МIРИ НА ГРАНИЧНИХ ПРОСТОРАХ

САМОПОДIБНИХ ГРУП 108

3.1. Мiри Бернуллi на софiчних зсувах . . . . . . . . . . . . . . . 109

3.2. Граничнi простори самоподiбних груп . . . . . . . . . . . . . 118

3.3. Iнварiантнi мiри на граничних просторах XG . . . . . . . . . 122

3.4. Самоподiбнi мiри на граничних просторах JG . . . . . . . . . 129

3.5. Мiра Лебега самоафiнних множин . . . . . . . . . . . . . . . 136

3.6. Замощення граничних просторiв XG . . . . . . . . . . . . . . 142

4

3.7. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 146

4 ДИНАМIКА КУСКОВО-ЛIНIЙНИХ ВIДОБРАЖЕНЬ

ВИГЛЯДУ fK(v) = minA∈K Av 148

4.1. Необхiднi вiдомостi про невiд’ємнi матрицi . . . . . . . . . . 148

4.1.1. Властивостi невiд’ємних матриць . . . . . . . . . . . . 149

4.1.2. Блочно-трикутна структура невiд’ємних матриць . . 150

4.1.3. Кореневi вектори для невiд’ємних матриць . . . . . . 154

4.1.4. Степенi невiд’ємних матриць . . . . . . . . . . . . . . 154

4.2. Вiдображення fK та рядково-замкненi множини K . . . . . . 157

4.3. Iснування додатнього власного вектора для fK . . . . . . . . 163

4.4. Iснування невiд’ємних кореневих векторiв для fK . . . . . . 167

4.5. Асимптотична поведiнка iтерацiй fK . . . . . . . . . . . . . . 173

4.6. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 174

5 ГРАФИ ШРАЙЄРА АВТОМАТНИХ ГРУП 176

5.1. Графи Шрайєра груп та графи дiї автоматiв . . . . . . . . . 176

5.1.1. Основнi означення . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176

5.1.2. Локальна топологiя на помiчених графах . . . . . . . 178

5.1.3. Графи Шрайєра та граничний простiр . . . . . . . . . 179

5.2. Графи Шрайєра обмежених автоматiв . . . . . . . . . . . . . 182

5.2.1. Конструкцiя графiв Γn(A) та Tn(A) . . . . . . . . . . 182

5.2.2. Кусково-лiнiйнi вiдображення, асоцiйованi з обмеженими автоматами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184

5.2.3. Рiст дiаметрiв графiв Γn(A) та Tn(A) . . . . . . . . . 186

5.3. Графи Шрайєра полiномiальних автоматiв . . . . . . . . . . 189

5.4. ω-перiодичнi графи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 193

5.4.1. Конструкцiя графiв Xw . . . . . . . . . . . . . . . . . 197

5

5.4.2. Проблема iзоморфiзму для графiв Xw . . . . . . . . . 198

5.4.3. Локальнi iзоморфiзми графiв Xw . . . . . . . . . . . . 204

5.4.4. Графи Xw як графи Шрайєра автоматної групи . . . 209

5.4.5. Рiст графiв Xw . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 212

5.4.6. Рiст ω-перiодичних графiв . . . . . . . . . . . . . . . . 213

5.5. Графи Шрайєра ханойських автоматiв . . . . . . . . . . . . 218

5.6. Графи Шрайєра самоподiбної дiї групи Гейзенберга . . . . . 221

5.6.1. Постановка задачi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 221

5.6.2. Самоподiбна дiя групи Гейзенберга . . . . . . . . . . . 223

5.6.3. Графи Шрайєра групи Гейзенберга . . . . . . . . . . 225

5.7. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 230

6 САМОПОДIБНI ТА АВТОМАТНI ДIЇ ГРУП 231

6.1. Скiнченна породженiсть iтерованих вiнцевих добуткiв . . . . 231

6.2. Самоподiбнi групи скiнченного типу . . . . . . . . . . . . . . 240

6.2.1. Означення та простi властивостi самоподiбних груп

скiнченного типу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 241

6.2.2. Скiнченна породженiсть . . . . . . . . . . . . . . . . . 246

6.3. Групи Сущанського . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 250

6.3.1. Оригiнальне означення через таблицi Калужнiна . . . 251

6.3.2. Автоматний пiдхiд . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 252

6.3.3. Самоподiбне замиканння груп Сущанського . . . . . . 254

6.3.4. Промiжний рiст груп Сущанського . . . . . . . . . . . 258

6.4. Рiст спряженостi гiллястих груп . . . . . . . . . . . . . . . . 264

6.5. Самоподiбнi дiї нiльпотентних груп . . . . . . . . . . . . . . 268

6.5.1. Допомiжна iнформацiя про нiльпотентнi групи Лi . . 271

6.5.2. Доведення теорем 6.33 i 6.34 . . . . . . . . . . . . . . 273

6.5.3. Приклад самоподiбної дiї групи Гейзенберга . . . . . 280

6

6.6. Цаппа-Зеп добуток груп i автоматнi групи . . . . . . . . . . 281

6.7. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 285

7 КЛАСИФIКАЦIЯ ГРУП, ПОРОДЖЕНИХ (3, 2) АВТОМАТАМИ 288

7.1. Загальнi результати класифiкацiї . . . . . . . . . . . . . . . . 288

7.2. Опис автоматних груп для вибраних (3, 2) автоматiв . . . . 289

7.3. Висновки до роздiлу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 295

ВИСНОВКИ 296

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 299

7

ВСТУП

Актуальнiсть теми

Абстрактнi автомати є математичною моделлю довiльних обчислень та обчислювальних машин. Математичнi засади теорiї автоматiв ґрунтуються

на алгебраїзацiї поняття iнформацiї в машинах, що дозволяє використовувати алгебраїчнi методи при дослiдженнi потоку iнформацiї пiд час роботи машини. За останнi десятилiття розвиток алгебраїчної теорiї автоматiв

збагатив математичну науку багатьма новими конструкцiями: автоматнi та

самоподiбнi групи та напiвгрупи, самоподiбнi алгебри Лi, гiллястi групи,

групи iтерованих монодромiй, пiдстановочнi бiмодулi, граничнi простори

автоматних груп та граничнi динамiчнi системи тощо. Скiнченнi автомати

знайшли багато застосувань у теорiї груп, теорiї динамiчних систем, спектральнiй теорiї операторiв, фрактальнiй геометрiї, екстремальнiй теорiї

графiв. Все це дозволило розв’язати цiлу серiю вiдкритих проблем.

Рiзнi види автоматiв було розроблено у зв’язку з конкретними практичними задачами, якi ними моделюються або розв’язуються. В данiй роботi

розглядаються детермiнованi автомати-транслятори, якi є автоматами Мiлi

з однаковими вхiдним та вихiдним алфавiтами. Такi автомати перетворюють вхiднi слова лiтера за лiтерою, змiнюючи активний внутрiшнiй стан

автомата. Таким чином, кожен стан автомата, прийнятий за iнiцiальний

стан, визначає перетворення на множинi скiнченних та нескiнченних слiв

над алфавiтом.

8

Першi кроки у вивченнi напiвгруп та груп, породжених автоматними

перетвореннями, були здiйсненi в 60-х роках двадцятого столiття в Київськiй математичнiй школi пiд керiвництвом академiка В. М. Глушкова [6].

Першi суттєвi результати, якi привернули увагу до автоматних груп, були

конструкцiї скiнченних автоматiв [1, 17, 10], якi визначають нескiнченнi

скiнченно породженi перiодичнi групи, таким чином, даючи простi контрприклади до загальної проблеми Бернсайда. Пiзнiше Р. I. Григорчук довiв [11], що автоматна група, яку вiн побудував для проблеми Бернсайда,

має промiжний рiст мiж полiномiальним та експоненцiйним. Це дало вiдповiдь на питання Дж. Мiлнора про iснування таких груп, а також на проблему М. Дея про iснування аменабельних, але не елементарно аменабельних

груп. Навiть на даний момент всi вiдомi конструкцiї груп промiжного росту

основанi на автоматних перетвореннях.

Подальшi дослiдження груп, породжених автоматами, показали, що

вони мають багато iнших цiкавих властивостей (див. оглядовi роботи [22, 8,

23, 65] та списки лiтератури в них). Зокрема, клас автоматних груп мiстить

приклади слабко нескiнченних груп [72, 13, 63], груп скiнченної ширини [24,

22], з гiллястою структурою пiдгруп [97, 9, 22], груп експоненцiйного, але не

рiвномiрно експоненцiйного росту [114, 20] (надаючи вiдповiдь на питання

М. Громова про iснування таких груп), першi приклади аменабельних, але

не субекспоненцiйно аменабельних груп [69, 21].

Геометричнi методи прийшли в теорiю автоматних груп пiсля їх геометричного зображення як груп автоморфiзмiв регулярних кореневих дерев

[71]. Кожне таке дерево є самоподiбним об’єктом: пiддерево, яке висить пiд

кожною вершиною, iзоморфне всьому дереву. Це пiдштовхнуло розвиток

iдей самоподiбностi в теорiї груп i привело до виникнення класу самоподiбних груп автоморфiзмiв дерев та самоподiбних групових дiй [23, 65, 96].

9

Кожна автоматна група є самоподiбною, i навпаки, кожну самоподiбну групу можна задати, взагалi кажучи, нескiнченним автоматом.

Iнший клас груп, який виник з узагальнення деяких прикладiв автоматних груп, — це гiллястi групи, введенi в роботi [9]. Назва вiдображає

властивiсть пiдгруп в цих групах: ґратка субнормальних пiдгруп нагадує

структуру дерева. Важливiсть цього класу пiдкреслюється тим фактом, що

гiллястi групи є одним з трьох класiв груп, на якi природно розбивається

клас слабко нескiнченних груп [63].

Однiєю з важливих тем дослiджень у цьому напрямку є алгоритмiчнi

проблеми навколо автоматiв та груп, породжених автоматами. Слiд вiдзначити, що бiльшiсть таких проблем є вiдкритими на даний момент. Зокрема,

невiдомо, чи можна алгоритмiчно перевiрити, чи заданий скiнченний автомат породжує скiнченну, перiодичну, гiллясту, аменабельну групу, який

рiст групи тощо. Нещодавно було показано, що проблема скiнченностi для

автоматних напiвгруп є алгоритмiчно нерозв’язною [59]. Стосовно класичних алгоритмiчних проблем Дена вiдомо, що проблема слiв в кожнiй автоматнiй групi є розв’язною [8]. Проблема спряженостi була розв’язана тiльки

в деяких автоматних групах [16, 67, 70], а в роботi [109] побудовано приклад автоматної групи з нерозв’язною проблемою спряженостi. Проблема

спряженостi в групi всiх автоматних перетворень та проблема iзоморфiзму в класi автоматних груп є вiдкритими. Тому увага математикiв була

придiлена окремим класам автоматiв. Бiльшiсть дослiджених автоматних

груп, зокрема, група Григорчука, породжуються обмеженими або полiномiальними автоматами, якi визначив С. Сiдкi [104], розглядаючи циклiчну

структуру автоматiв. Серед вiдомих загальних результатiв видiлимо такi:

групи, породженi полiномiальними автоматами, не мiстять вiльних неабелевих пiдгруп [105], а групи, породженi обмеженими автоматами, є амена-

10

бельними [21].

З кожним автоматом природно асоцiюється послiдовнiсть скiнченних

графiв, якi моделюють дiю автомата на словах фiксованої довжини, i незлiченна колекцiя (нескiнченних) графiв, якi моделюють дiю автомата на орбiтах нескiнченних слiв. В термiнах теорiї груп цi графи є графами Шрайєра автоматної групи. Графи дiї автоматiв та графи Шрайєра самоподiбних

груп активно дослiджувалися з точки зору спектру, росту, аменабельностi

(див. оглядову роботу [12] та список лiтератури в нiй). Зокрема, використовуючи автомати, були побудованi першi приклади регулярних графiв,

спектр яких є множиною Кантора [25]. Реалiзацiя автоматом групи блимаючих лампочок [69] та дослiдження спектральних властивостей вiдповiдних графiв [67] привело до конструкцiї 7-вимiрного замкненого многовиду

з не цiлим третiм числом L

2

-Беттi [68], який став першим контрприкладом

до сильної гiпотези Ат’ї. В роботi [61] побудовано автомати, якi моделюють

вiдому гру “Ханойськi вежi”, що дозволило обчислити спектр ханойських

графiв.

Фундаментальний зв’язок був знайдений В. В. Некрашевичем [96] мiж

автоматними групами, фрактальною геометрiєю та комплексною динамiкою. З автоматною групою асоцiюється граничний простiр, який часто має

фрактальну структуру, а графи дiї автомата вiдображають топологiю простору, та гранична динамiчна система. В комплекснiй динамiцi автоматнi

групи виникають як групи iтерованих монодромiй рацiональних функцiй.

При цьому гранична динамiчна система спряжена з дiєю функцiї на її множинi Жулiа. Цей зв’язок був використаний в роботi [27] для розв’язання проблеми Хаббарда про топологiчний тип розгалужених самонакриттiв

сфери. Стало зрозумiло, що автоматнi групи не тiльки мають унiкальнi

властивостi, а i природно виникають в рiзних роздiлах математики.

11

Все вищесказане свiдчить про актуальнiсть дослiдження властивостей

автоматiв, а також груп, графiв та динамiчних систем, асоцiйованих з автоматами, якому i присвячено дану дисертацiйну роботу.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертацiйнi дослiдження проводилися на кафедрi алгебри та математичної логiки механiко-математичного факультету Київського нацiонального

унiверситету iменi Тараса Шевченка як частина науково-дослiдної теми

«Застосування алгебро-геометричних методiв в теорiях груп, напiвгруп,

кiлець, зображень, до задач прикладної алгебри та захисту iнформацiї»

(номер державної реєстрацiї 0111U005264, 2011 – 2015 рр.). Також дисертацiйнi дослiдження виконувалися в рамках науково-дослiдної теми «Автоматнi групи: алгебраїчнi, алгоритмiчнi та комбiнаторнi проблеми» (номер

державної реєстрацiї 0115U000164, 2015 р.), що виконувалася при науководослiднiй лабораторiї «Диференцiальних рiвнянь та їх застосувань у механiцi» Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка.

Мета i задачi дослiдження

Метою дослiдження є вивчення алгоритмiчних, геометричних та алгебраїчних властивостей скiнченних оборотних автоматiв, автоматних та самоподiбних груп, графiв дiї автоматiв та графiв Шрайєра самоподiбних груп,

а також динамiчних систем, асоцiйованих з автоматами.

Об’єктом дослiдження є оборотнi автомати i групи, графи та динамiчнi системи, асоцiйованi з автоматами.

Предметом дослiдження є властивостi оборотних автоматiв, автоматних та самоподiбних груп, графiв дiї автоматiв та динамiчних систем,

12

асоцiйованих з автоматами, застосування автоматiв.

Методи дослiдження

У роботi використовуються методи теорiї автоматiв, геометричної та комбiнаторної теорiї груп, динамiчних систем, теорiї графiв, лiнiйної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатiв

В дисертацiї автором отримано такi новi результати:

1. Доведено, що проблема слiв в автоматних групах, породжених полiномiальними та ханойськими автоматами, розв’язується за субекспоненцiйний час.

2. Доведено, що проблема спряженостi в групi обмежених автоматiв є алгоритмiчно розв’язною. Доведено, що проблема скiнченностi в класi

груп, породжених обмеженими автоматами без нетривiальних фiнiтарних станiв, є алгоритмiчно розв’язною.

3. Встановлено алгоритмiчний критерiй, коли два стискуючих автоморфiзми регулярного кореневого дерева зi скiнченною кiлькiстю орбiтальних станiв є спряженими в групi скiнченно станових автоморфiзмiв

цього дерева.

4. Вперше визначено самоподiбнi мiри на граничних просторах самоподiбних стискуючих груп. Доведено, що гранична динамiчна система

для самоподiбних стискуючих груп є спряженою з одностороннiм зсувом Бернуллi. Винайдено алгоритмiчний метод для знаходження мiри

Лебега цiлих самоафiнних множин та мiри плиток самоподiбних груп.

13

5. Узагальнено основнi результати з теорiї невiд’ємних матриць на певнi

кусково-лiнiйнi вiдображення, заданi скiнченними множинами невiд’-

ємних матриць. Зокрема, доведено iснування спецiальних невiд’ємних

кореневих векторiв для цих вiдображень, встановлено критерiй iснування додатнього власного вектора та знайдено метод для знаходження

асимптотичної поведiнки iтерацiї таких вiдображень.

6. Винайдено метод для знаходження росту дiаметрiв графiв дiї обмежених автоматiв.

7. Доведено гiпотезу В. В. Некрашевича про те, що орбiтальнi графи дiї

полiномiальних автоматiв мають субекспоненцiйний рiст. Цей результат узагальнено на широкий клас груп, зроблено оцiнку зверху на рiст

i застосовано до ω-перiодичних та ханойських графiв. Побудовано клас

автоматних груп, для яких всi орбiтальнi графи дiї мають промiжний

рiст мiж полiномiальним та експоненцiйним.

8. Встановлено критерiй топологiчної скiнченної породженостi iтерованих

вiнцевих добуткiв груп пiдстановок з рiвномiрно обмеженою кiлькiстю

твiрних.

9. Побудовано приклади скiнченно породжених гiллястих автоматних груп

з максимальними пiдгрупами нескiнченного iндексу, що вiдповiло на

питання з Коурiвського зошита.

10. Доведено, що p-групи Сущанського мають промiжний рiст мiж полiномiальним та експоненцiйним.

11. Знайдено критерiй iснування скiнченно станової самоподiбної дiї для

скiнченно породжених нiльпотентних груп без скруту iз заданим вiртуальним ендоморфiзмом.

14

Практичне значення одержаних результатiв

Робота має теоретичний характер. Розробленi в дисертацiйнiй роботi методи можуть використовуватися для подальшого дослiдження автоматiв, а

також груп, графiв та динамiчних систем, якi визначаються автоматами.

Результати дисертацiйної роботи можуть стати математичної основою

для рiзноманiтних розробок в галузi iнформацiйних технологiй. Графи дiї

автоматiв, властивостi яких дослiджуються в дисертацiї, можуть утворювати послiдовностi графiв-експандерiв, якi використовуються в теорiї кодування, при проектуваннi комп’ютерних мереж, теорiї складностi. Алгоритмiчний метод для знаходження порядкiв обмежених автоморфiзмiв, розроблений в дисертацiї, був впроваджений у програмному пакетi AutomGrp

для системи комп’ютерної алгебри GAP.

Дисертацiя може бути використана для читання спецкурсiв з теорiї

автоматiв та теорiї груп на механiко-математичних факультетах унiверситетiв.

Особистий внесок автора

Основнi результати дисертацiї, якi виносяться на захист, отриманi автором

особисто. У роботах, опублiкованих у спiвавторствi, особистий внесок здобувача полягає в наступному: у роботах [1,5,6,8] — опис автоматних груп,

породжених деякими автоматами з трьома станами над бiнарним алфавiтом, та встановлення властивостей для частини автоматних груп; [4] — переведення оригiнального означення груп Сущанського з мови таблиць Калужнiна на мову скiнченних автоматiв та встановлення оцiнок на функцiї

росту цих груп; [10] — визначення самоподiбних мiр на граничних просторах самоподiбних стискуючих груп та опис вiдповiдних динамiчних систем,

15

алгоритмiчний метод для знаходження мiри плиток самоподiбних груп; [11]

— алгоритмiчний метод для знаходження мiри Лебега цiлих самоафiнних

множин; [13] — опис груп автоморфiзмiв для графiв, якi вводяться в роботi,

та оцiнки на функцiї росту цих графiв; [15] — критерiй iснування скiнченно станової самоподiбної дiї для скiнченно породжених нiльпотентних груп

без скруту iз заданим вiртуальним ендоморфiзмом; [17] — опис самоподiбних груп скiнченного типу через граф шаблонiв, алгоритмiчний метод

для перевiрки транзитивностi дiї цих груп та деякi необхiднi умови їхньої

топологiчної скiнченної породженостi; [18] — введене поняття орбiтальних

станiв для автоморфiзмiв кореневих дерев, алгоритмiчний критерiй, коли

два скiнченно станових автоморфiзми iз скiнченною кiлькiстю орбiтальний

станiв є спряженими в групi скiнченних автоматiв, розв’язання проблеми

спряженостi в групi обмежених автоматiв; [19] — опис стабiлiзаторiв точок

для однiєї самоподiбної дiї дискретної групи Гейзенберга.

Апробацiя результатiв дисертацiї

Результати дисертацiї доповiдалися i обговорювалися на:

1. Workshop «Analysis on Graphs and Fractals» (Cardiff, United Kingdom,

2007);

2. Шостiй Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi (Кам’янецьПодiльський, 2007);

3. Сьомiй Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi (Харкiв, 2009);

4. International Conference of Humboldt-Kolleg Series «Humboldt Cosmos:

Science and Society» (Київ, 2009);

5. Spring school «Geometry, Topology and Computation in Groups» (Les Diablerets, Switzerland, 2010);

16

6. Восьмiй Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi (Луганськ,

2011);

7. Мiжнароднiй математичнiй конференцiї, присвяченiй 70-рiччю професора Володимира Кириченка (Миколаїв, 2012);

8. Чотирнадцятiй Мiжнароднiй науковiй конференцiї, iменi академiка

М. Кравчука (Київ, 2012);

9. Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї, присвяченiй 100-рiччю вiд дня

народження С. М. Чернiкова (Київ, 2012);

10. Дев’ятiй Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї в Українi (Львiв, 2013);

11. П’ятiй Мiжнароднiй конференцiї з аналiтичної теорiї чисел i просторових мозаїк (Київ, 2013);

12. Мiжнароднiй алгебраїчнiй конференцiї, присвяченiй 100-рiччю вiд дня

народження Л. А. Калужнiна (Київ, 2014),

а також на семiнарах у Київському нацiональному унiверситетi iменi Тараса Шевченка, Iнститутi математики Нацiональної Академiї Наук України, Женевському унiверситетi (Швейцарiя, 2009 i 2010), Техаському A&M

Унiверситетi (США, 2007 i 2015), Технiчному унiверситетi Граца (Австрiя,

2014), Унiверситетi Пiвденної Флориди (США, 2015).

Публiкацiї

Результати дисертацiї опублiковано у 21 науковiй публiкацiї [2–4, 33–50], у

тому числi 10 статей у наукових фахових виданнях України, серед них 2

статтi у виданнях, якi включенi до мiжнародних наукометричних баз, та

11 статей у закордонних перiодичних виданнях.

17

Структура та обсяг дисертацiї

Дисертацiйна робота складається зi вступу, семи роздiлiв, висновкiв та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертацiї становить 312 сторiнок

друкованого тексту, з яких 298 сторiнок основного тексту. Дисертацiя мiстить 18 рисункiв. Список використаних джерел обсягом 14 сторiнок налiчує 116 найменувань.

Автор висловлює подяку своєму науковому консультанту, професору

Вiталiю Iвановичу Сущанському та професору Ростиславу Iвановичу Григорчуку за пiдтримку в роботi.

Змiст роботи

У першому роздiлi дисертацiї вводяться основнi необхiднi означення i наводяться вiдомi результати, якi використовуються далi в дисертацiї. В тому

числi, розглядаються простори слiв X∗

, Xω

та X−ω над алфавiтом X, групи

автоморфiзмiв регулярних кореневих дерев, автомати та автоматнi групи,

самоподiбнi групи та самоподiбнi дiї груп.

Розглядаються автомати-транслятори, якi є автоматами Мiлi з однаковими вхiдним та вихiдним алфавiтами (далi просто автомати). Кожен

автомат A над алфавiтом X визначається набором (S, π, λ), де S — множина станiв автомата, π : S × X → S — функцiя переходiв автомата, а

λ : S × X → X — функцiя виходiв. Скiнченний автомат A можна ототожнювати iз помiченим орiєнтованим графом ΓA, вершинами якого є стани

автомата, а орiєнтованими ребрами (стрiлками) є s → π(s, x) з мiткою

x|λ(s, x) для всiх s ∈ A i x ∈ X.

Кожен стан автомата s ∈ A визначає вiдображення на просторi X∗

всiх скiнченних слiв над алфавiтом X та на просторi Xω

всiх нескiнченних

18

вправо послiдовностей над X. В термiнах графiчного зображення автоматiв рiвнiсть s(x1x2 . . . xn) = y1y2 . . . yn означає, що в автоматi A iснує шлях,

який починається у станi s i помiчений послiдовно парами x1|y1, x2|y2, . . . ,

xn|yn. Автомат називається оборотним, якщо всi його стани визначають

оборотнi перетворення простору слiв. Для скiнченного оборотного автомата A група, породжена вiдображеннями, якi задаються станами автомата,

вiдносно композицiї вiдображень, називається автоматною групою GA, породженою автоматом A.

Множину слiв X∗ можна розглядати як множину вершин регулярного

кореневого дерева T, коренем якого є порожнє слово i ребрами є (v, vx)

для v ∈ X∗

, x ∈ X. Перетворення простору X∗

, заданi станами оборотних автоматiв, є автоморфiзмами дерева T. Тому кожна автоматна група

є пiдгрупою групи автоморфiзмiв дерева Aut(T). Множина всiх автоморфiзмiв, заданих станами скiнченних оборотних автоматiв, утворюють пiдгрупу в Aut(T), яка називається групою скiнченно станових автоморфiзмiв

FAut(T).

Цикл в автоматi називається тривiальним, якщо вiн є петлею у станi,

який задає тотожне перетворення. Скiнченний оборотний автомат називається обмеженим (в термiнах С. Сiдкi), якщо довiльнi два нетривiальнi

цикли в автоматi є диз’юнктними i не з’єднанi шляхом, i називається полiномiальним, якщо довiльнi два нетривiальнi цикли в автоматi є диз’юнктними. Множина всiх автоморфiзмiв дерева, заданих обмеженими автоматами, утворює групу Pol(0), яка називається групою обмежених автоматiв.

Множина всiх автоморфiзмiв, заданих полiномiальними автоматами, утворює групу Pol(∞) полiномiальних автоматiв. Також визначається степiнь

полiномiального автомата i розглядаються групи Pol(n) полiномiальних автоматiв степеня не бiльше n.

19

В другому роздiлi «Алгоритмiчнi властивостi автоматних груп» розглядаються алгоритмiчнi проблеми в групах, породжених автоматами, групах Aut(T), FAut(T) та групi функцiйно рекурсивних автоморфiзмiв RAut(T).

В пiдроздiлi 2.1 розглядається проблема слiв в автоматних групах. Для

оцiнки складностi проблеми слiв введено функцiю глибини для скiнченних

автоматiв. Основним результатом є верхня оцiнка на функцiю глибини для

полiномiальних автоматiв:

Теорема 2.11. Нехай A — полiномiальний автомат степеня m. Функцiя

глибини автомата A задовольняє dA(n) = O((log n)

m+1) (n → ∞).

Звiдси виводиться

Теорема 2.13. Нехай A — полiномiальний автомат степеня m. Проблема слiв в групi, породженiй автоматом A, розв’язується за субекспоненцiйний час exp(O((log n)

m+1)) (n → ∞).

Аналогiчнi результати також доводяться для ханойських автоматiв

(теорема 2.7) та класу автоматних груп, який одночасно узагальнює стискуючi самоподiбнi групи i групи, породженi полiномiальними автоматами

(теорема 2.17).

В пiдроздiлi 2.2 розглядається проблема порядку в групах автоморфiзмiв регулярних кореневих дерев. Вводиться поняття орбiтальних станiв

автоморфiзмiв. Показується, що порядок автоморфiзма iз скiнченною кiлькiстю орбiтальних станiв можна знайти за допомогою спецiального скiнченного графа, який алгоритмiчно будується за даним автоморфiзмом. Звiдси

випливає

Наслiдок 2.23. Проблема порядку для скiнченно станових автоморфiзмiв iз скiнченною кiлькiстю орбiтальних станiв є алгоритмiчно розв’язною.

20

Доводиться, що обмеженi автоморфiзми мають скiнченну кiлькiсть орбiтальних станiв. Отже, проблема порядку для обмежених автоморфiзмiв

є алгоритмiчно розв’язною (наслiдок 2.25).

В пiдроздiлi 2.3 розглядається проблема спряженостi в групах автоморфiзмiв Aut(T), RAut(T), FAut(T) та групах полiномiальних автоматiв

Pol(n), n ≥ 0. З кожною парою автоморфiзмiв a, b ∈ Aut(T) асоцiюється

граф спряженостi CΓ(a, b), який будується алгоритмiчно, якщо a, b є скiнченно становими i мають скiнченну кiлькiсть орбiтальних станiв. Доводяться такi результати:

Теорема 2.29. Нехай a, b ∈ FAut(T) мають скiнченну кiлькiсть орбiтальних станiв i CΓ(a, b) — граф спряженостi для пари (a, b). Наступнi

умови рiвносильнi:

1. a i b спряженi в групi Aut(T);

2. a i b спряженi в групi RAut(T);

3. граф CΓ(a, b) непорожнiй.

Проблема одночасної спряженостi в групах формулюється так: для

заданих наборiв елементiв групи a1, . . . , ak i b1, . . . , bk перевiрити, чи iснує

елемент h такий, що h

−1aih = bi для i = 1, . . . , k.

Теорема 2.30. Проблема (одночасної) спряженостi для скiнченно станових автоморфiзмiв зi скiнченною кiлькiстю орбiтальних станiв в групах

Aut(T) та RAut(T) є алгоритмiчно розв’язною.

Зокрема, проблема (одночасної) спряженостi для обмежених автоморфiзмiв в групах Aut(T) та RAut(T) є алгоритмiчно розв’язною.

Теорема 2.32. Два стискуючих автоморфiзми a, b ∈ Aut(T) зi скiнченною кiлькiстю орбiтальних станiв спряженi в групi Aut(T) тодi i лише

тодi, коли вони спряженi в групi FAut(T).

21

Наступним основним результатом цього пiдроздiлу є

Теорема 2.43. Проблема (одночасної) спряженостi в групi обмежених

автоматiв Pol(0) є алгоритмiчно розв’язною.

Доведення теореми конструктивне. Запропоновано два алгоритмiчних

методи для розв’язання проблеми спряженостi в Pol(0), якi також знаходять спрягаючий елемент, якщо заданi елементи є спряженими.

Доводиться, що два обмежених автоморфiзми спряженi в групi Pol(∞)

полiномiальних автоматiв тодi i лише тодi, коли вони спряженi в групi

Pol(0). Звiдси отримується наступний результат:

Наслiдок 2.45. Проблема спряженостi для обмежених автоморфiзмiв

в групах Pol(n), n ∈ N, є алгоритмiчно розв’язною.

В пiдроздiлi 2.4 доводиться, що проблема скiнченностi в класi груп,

породжених обмеженими автоматами без нетривiальних фiнiтарних станiв,

є алгоритмiчно розв’язною.

Третiй роздiл «Самоподiбнi мiри на граничних просторах самоподiбних груп» присвячено побудовi теорiї мiри на граничних просторах самоподiбних груп.

У пiдроздiлi 3.1 розглядаються властивостi мiри Бернуллi на софiчних

зсувах. Нехай Γ – скiнченний орiєнтований граф, ребра якого помiченi лiтерами з алфавiту X. Для кожної вершини v ∈ Γ позначимо через Fv ⊂ X−ω

множину всiх нескiнченних влiво послiдовностей, якi читаються вздовж

орiєнтованих шляхiв, що закiнчуються у вершинi v. Для мiри Бернуллi

µp на просторi X−ω розглядаються µp(Fv), а число κ(Γ) = P

v∈Γ µp(Fv)

називається кратнiстю графа Γ. Винаходяться алгоритмiчнi методи для

знаходження чисел κ(Γ) та µp(Fv) для всiх v ∈ Γ.

ВИСНОВКИ

Вдисертацїдослджуютьсяалгоритмчнгеометричнтаалгебраїчнвластивостсамоподбнихтаавтоматнихгрупатакожграфвграничнихпросторвтадинамчнихсистемасоцйованихзавтоматами

Доведенощопроблемаслввгрупахпородженихполномальнимита

ханойськимиавтоматамирозв’язуєтьсязасубекспоненцйнийчасВизначенопоняттяорбтальнихстанвавтоморфзмвкореневихдеревпоказано

щопроблемапорядкуєалгоритмчнорозв’язноюдляскнченостановихавтоморфзмвякмаютьскнченнуклькстьорбтальнихстанвДоведено

щопроблемаспряженостдляскнченностановихавтоморфзмвзскнченноюклькстюорбтальнихстанввгрупахвсхавтоморфзмвдерева

тагрупфункцйнорекурсивнихавтоморфзмвєалгоритмчнорозв’язною

Показанощодвастискуючихавтоморфзмизскнченноюклькстюорбтальнихстанвспряженвгрупвсхавтоморфзмвдереватодлишетод

коливониспряженвгрупскнченностановихавтоморфзмвДоведенощопроблемаспряженоствгрупобмеженихавтоматвєалгоритмчно

розв’язноюПоказанощопроблемаспряженостдляобмеженихавтоморфзмввгрупахполномальнихавтоморфзмвєалгоритмчнорозв’язною

Винайденоалгоритмчнийметодякийдлязаданогообмеженогоавтомата

безнетривальнихфнтарнихстанвперевряєчивнпороджуєскнченну

групу



Вводятьсятадослджуютьсясамоподбнмринаграничнихпросторах

самоподбнихгрупПоказанощовведенмривизначаютьсяоднозначно

групоютаїївртуальнимендоморфзмомДоведенощограничнадинамчнасистемадлястискуючоїсамоподбноїгруписпряженазодностороннм

зсувомБернуллОтриманрезультатизастосованодознаходженнямри

ЛебегасамоафннихмножинРозглянутозамощенняграничногопростору

плиткамигрупи

Розглянутовдображеннявигляду∈∈

де

—скнченнамножинаквадратнихневд’ємнихматрицьрозмрноста

“”означаєпокоординатниймнмумЗнайденокритерйснуваннядодатньоговласноговекторадлявдображеньДоведеноснуванняневд’

ємнихкореневихвекторвдляуякихспецальнкоординатиєдодатнмиЦедозволилодатиметоддлязнаходженняасимптотичноїповеднки

терацй



де—додатнйвектор

ДослджуютьсяграфиΓдїскнченнихавтоматвнасловахдовжинитаграфиΓдїавтоматвнаорбтнескнченноїпослдовност

ВтермнахтеорїгрупцграфиєграфамиШрайєраавтоматноїгрупиДля

обмеженихавтоматввинайденорекурсивнийметодпобудовиграфвΓ

щодозволилоасоцюватизкожнимобмеженимавтоматомкусковолнйне

вдображеннявигляду∈ВикористовуючитерацїтакихвдображеньвинайденометоддлязнаходженняасимптотичноїповеднкидаметрвграфвΓДоведенагпотезаВВНекрашевичапроте

щоорбтальнграфиШрайєраΓдляполномальнихавтоматвстепенямаютьсубекспоненцйнийрстобмеженийзверху



→∞НаведеноконструкцюполномальнихавтоматвдляякихпопередняоцнкаєточноюДляханойськихавтоматвдоведенощографи

Γмаютьпромжнийрстекввалентний

−

→∞



Побудованосм’юнескнченнихрегулярнихграфвдля∈

ω



якузагальнюютьωперодичнграфиОписанопроблемузоморфзмута

локальногозоморфзмудляцихграфввизначеноїхнгрупиавтоморфзмвтадоведенощовонимаютьпромжнийрст

ДоведенорядрезультатвпрорзналгебраїчнвластивостсамоподбнихтаавтоматнихгрупДоведенощодляскнченнихтранзитивних

группдстановок≥зобмеженоюмнмальноюклькстю

тврнихнескнченнотерованийвнцевийдобуток≀≥будетопологчно

скнченнопородженимтодлишетодколипроскнченнаабелевагрупа



≥єтопологчноскнченнопородженоюЯкнаслдокпобудованоприкладискнченнопородженихгллястихавтоматнихгрупяк

мстятьмаксимальнпдгрупинескнченногондексуЦедаловдповдьна

питаннязКоурвськогозошитаЗнайденокритерйтогоколисамоподбна

групаскнченноготипуєтопологчноскнченнопородженоюатакожкльканеобхднихтадостатнхумовПоказанощофункцяростуспряженост

длягллястихгрупнеобмежуєтьсязверхуполномомОригнальневизначеннягрупСущанськогопереведенозмовитаблицьКалужннанамову

скнченнихавтоматвЦедозволилодовестирядвластивостейгрупСущанськогозокремащовсвонимаютьпромжнийрстОхарактеризовано

скнченностановсамоподбндїнльпотентнихгрупОписаноавтоматн

групиасоцйованзЦаппаЗепдобуткамигруп

Наведенорезультатипокласифкацїгруппородженихавтоматамиз

трьомастанаминадбнарнималфавтомОписаногрупипородженвибранимиавтоматами