Мартинюк Ольга Василівна, доцент кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича: &laquo;Задача Коші та нелокальні багато- точкові задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною&raquo; (01.01.02 - диференціальні рівняння). Спецрада Д 26.001.37 у Київському національному універ&shy;ситеті імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

на правах рукопису

Мартинюк Ольга Василівна

УДК 517.956

Задача Коші та нелокальні багатоточкові задачі

для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою

змінною

01.01.02 – диференціальні рівняння

дисертація на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

Науковий консультант –

доктор фізико-математичних наук,

професор Городецький Василь Васильович

Чернівці – 2017

Змiст

Вступ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 5

Роздiл 1. Огляд лiтератури . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.1. Задача Кошi та крайовi задачi для сингулярних параболiчних

рiвнянь i систем . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.2. Задача Кошi для абстрактних диференцiально-операторних рiвнянь . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

1.3. Задача Кошi для псевдодиференцiальних рiвнянь i систем . . . 28

1.4. Задача Кошi для рiвнянь з частинними похiдними нескiнченного

порядку . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 35

1.5. Нелокальнi задачi для диференцiально-операторних рiвнянь та

рiвнянь з частинними похiдними . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

Роздiл 2. Огляд результатiв дисертацiї . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51

Роздiл 3. Задача Кошi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь . . . . . . . 58

3.1. Простори основних та узагальнених функцiй . . . . . . . . . . . 58

3.1.1. Простiр θM,ρ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

3.1.2. Перетворення Бесселя функцiй з простору θM,ρ. Простiр

Φ

ν

β,γ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69

3.1.3. Оператор узагальненого зсуву аргументу в просторi Φ

ν

β,γ 84

3.1.4. Простiр узагальнених функцiй (Φν

β,γ)

′

. Перетворення Бесселя узагальнених функцiй з простору (Φν

β,γ)

′

. . . . . . . 89

3.1.5. Абстрактнi функцiї . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

3.2. Задача Кошi для еволюцiйних рiвнянь з оператором, побудованим за сталим символом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 97

3.2.1. Властивостi фундаментального розв’язку задачi Кошi . . 97

3.2.2. Коректна розв’язнiсть задачi Кошi. Властивiсть локалiзацiї108

3.2.3. Сингулярнi еволюцiйнi рiвняння з необмеженими за часом коефiцiєнтами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116

3.3. Задача Кошi для еволюцiйних рiвнянь iз псевдобесселевими операторами нескiнченного порядку . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119

3.3.1. Псевдобесселевi оператори нескiнченного порядку . . . . 119

2

3.3.2. Задача Кошi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 127

3.4. Еволюцiйнi рiвняння з псевдобесселевими операторами, побудованими за змiнними символами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

3.4.1. Попереднi вiдомостi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135

3.4.2. Побудова фундаментального розв’язку. Задача Кошi . . 152

3.5. Еволюцiйнi рiвняння з показником однорiдностi γ ∈ (0, 1) та γ ∈ N159

3.6. n-вимiрний випадок . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163

Висновки до роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 168

Роздiл 4. Нелокальнi задачi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь . . . 170

4.1. Нелокальна m-точкова задача для сингулярних еволюцiйних рiвнянь зi сталими символами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 170

4.1.1. Структура та властивостi фундаментального розв’язку . 170

4.1.2. Коректна розв’язнiсть нелокальної m-точкової задачi.

Властивiсть локалiзацiї розв’язкiв . . . . . . . . . . . . . 184

4.2. Нелокальнi задачi для сингулярних еволюцiйних рiвнянь з псевдодиференцiальними умовами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190

4.3. Нелокальнi задачi для еволюцiйних рiвнянь iз псевдобесселевими

операторами нескiнченного порядку . . . . . . . . . . . . . . . . 205

4.4. Нелокальна багатоточкова задача для еволюцiйних рiвнянь iз

псевдобесселевими операторами, побудованими за змiнними символами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209

4.5. n-вимiрний випадок. Еволюцiйнi рiвняння iз псевдодиференцiальними операторами мiшаного типу . . . . . . . . . . . . . . 222

Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 225

Роздiл 5. Еволюцiйнi рiвняння з операторами узагальненого диференцiювання . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 227

5.1. Простори типу S . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228

5.1.1. Простори S

mn

. Топологiчна структура . . . . . . . . . . . 228

5.1.2. Основнi операцiї в просторi S

n!ρn

. . . . . . . . . . . . . . 236

5.1.3. Простори Slk

. Основнi операцiї в просторах Slk

. . . . . . 243

5.1.4. Простори S

mn

lk

та S

mn

lk

(C) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249

5.1.5. Простiр узагальнених функцiй (S

mn

lk

)

′

. . . . . . . . . . . 254

3

5.2. Оператори узагальненого диференцiювання ГельфондаЛеонтьєва у просторах типу S . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 256

5.3. Оператори узагальненого диференцiювання нескiнченного порядку265

5.4. Задача Кошi та нелокальна двоточкова за часом задача для еволюцiйних рiвнянь з операторами узагальненого диференцiювання Гельфонда-Леонтьєва . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 269

5.4.1. Задача Кошi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 269

5.4.2. Нелокальна двоточкова задача . . . . . . . . . . . . . . . 272

Висновки до роздiлу 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 283

Роздiл 6. Нелокальнi задачi для еволюцiйних рiвнянь з невiд’ємними самоспряженими операторами в гiльбертовому просторi . . . . . . 284

6.1. Нелокальнi багатоточковi задачi для еволюцiйних рiвнянь з операторами, спектри яких суто дискретнi . . . . . . . . . . . . . . 284

6.1.1. Простори основних та узагальнених елементiв. Формальнi ряди Фур’є . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 284

6.1.2. Невiд’ємнi самоспряженi оператори як оператори згортки 288

6.1.3. Нелокальна m-точкова задача (m ≥ 1) . . . . . . . . . . . 295

6.2. Диференцiально-операторнi рiвняння з невiд’ємними самоспряженими операторами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 312

6.2.1. Попереднi вiдомостi та позначення . . . . . . . . . . . . . 312

6.2.2. Основнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 317

Висновки до роздiлу 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 325

ВИСНОВКИ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 326

Список використаної лiтератури . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 329

4

Вступ

При розв’язуваннi задач математичної фiзики, квантової механiки, газової

динамiки, теорiї теплопровiдностi, тепломасопереносу, кристалографiї, задач

про взаємодiю тiл, при математичному моделюваннi дифузiйних процесiв у

анiзотропних середовищах та iнших реальних процесiв виникає необхiднiсть

дослiдження крайових задач (зокрема, задачi Кошi) для рiвнянь з частинними похiдними як скiнченного, так i нескiнченного порядкiв, рiвнянь iз зростаючими при |x| → ∞ коефiцiєнтами, еволюцiйних рiвнянь з операторами

узагальненого диференцiювання, операторами, якi вироджуються за певними просторовими змiнними (наприклад, з оператором Бесселя) i т.iн. Багато

таких задач мають природну постановку i в рiзних просторах узагальнених

функцiй, оскiльки часто функцiї, за допомогою яких задають крайовi умови,

мають особливостi в деяких точках межi або дiлянках межi. Такi функцiї можуть допускати регуляризацiю у просторах узагальнених функцiй скiнченного

порядку типу розподiлiв Соболєва-Шварца, або ж є узагальненими функцiями нескiнченного порядку (ультрарозподiлами, гiперфункцiями тощо), якщо

порядок особливостей вищий за степеневий.

Досить широкий клас диференцiальних рiвнянь з частинними похiдними

охоплюють параболiчнi та B-параболiчнi рiвняння, теорiя яких бере свiй початок з дослiдження класичного рiвняння теплопровiдностi. Iнтенсивний розвиток теорiї параболiчних рiвнянь розпочався з 40-х рокiв минулого столiття

завдяки фундаментальнiй працi I.Г. Петровського. Вагомий внесок у розвиток теорiї задачi Кошi (ЗК) для рiвнянь i систем рiвнянь параболiчного типу зробили I.Г. Петровський, С.Д. Ейдельман, С.Д. Iвасишен, А. Фрiдман,

Л.Н. Слободецький, С. Теклiнд, В.О. Солонников, М.Л. Горбачук, М.I. Матiйчук, В.В. Городецький, В.А. Лiтовченко та iн. Вони одержали ряд важливих

результатiв, пов’язаних з коректною розв’язнiстю ЗК у рiзних функцiональних

просторах, iнтегральним зображенням розв’язку, знаходженням класiв коректностi та єдиностi, довели теореми про iснування граничних значень розв’язку

в рiзних просторах, дослiдили якiснi властивостi розв’язкiв тощо.

М.I. Матiйчук та В.В. Крехiвський у 1968 роцi ввели означення B5

параболiчної системи рiвнянь, якi мiстять оператор Бесселя, що дiє за однiєю

iз просторових змiнних. Класична теорiя задачi Кошi та крайових задач для

таких рiвнянь та систем побудована в працях М.I. Матiйчука, В.В. Крехiвського, С.Д. Iвасишена, I.А. Кiпрiянова, В.В. Катрахова, В.П. Лавренчука, I.I. Веренич та iн. Задача Кошi з початковими даними iз просторiв узагальнених

функцiй типу розподiлiв та ультрарозподiлiв для вказаних рiвнянь вивчалася

Я.I. Житомирським, В.В. Городецьким, I.В, Житарюком, В.П. Лавренчуком,

О.В. Мартинюк, В.А. Лiтовченком, I.С. Тупкалом та iн.

Формальним розширенням класу рiвнянь параболiчного типу є еволюцiйнi рiвняння з псевдодиференцiальними операторами (ПДО), якi можна подати у виглядi A = F

−1

σ→x

[a(t, x; σ)Fx→σ], {x, σ} ⊂ R

n

, t > 0, де a – функцiя

(символ), що задовольняє певнi умови, F, F

−1

– пряме та обернене перетворення Фур’є. До ПДО належать диференцiальнi оператори, оператори дробового диференцiювання та iнтегрування, оператори згортки тощо. На сьогоднi

у теорiї задачi Кошi для еволюцiйних псевдодиференцiальних рiвнянь досягнуто значних результатiв. Це коректна розв’язнiсть задачi Кошi в просторах

Соболєва та їх аналогах для псевдодиференцiальних рiвнянь з аналiтичними

символами (Ю.А. Дубiнський), теорiя елiптичних рiвнянь у згортках у просторах Соболєва-Слободецького та її застосування до дослiдження загальних

мiшаних задач у цилiндричних областях для параболiчних рiвнянь i систем

рiвнянь iз частинними похiдними (М.С. Агранович, М.Й. Вiшик, Г.I. Ескiн),

класи єдиностi задачi Кошi для систем рiвнянь у згортках, якi є псевдодиференцiальними системами з аналiтичними символами (Б.I. Гуревич), теореми

про коректну розв’язнiсть задачi Кошi для рiвнянь та систем рiвнянь з ПДО,

символами яких є степеневi функцiї, з початковими даними з просторiв Лебега

(M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi) та iн.

Важливий клас псевдодиференцiальних рiвнянь утворюють еволюцiйнi рiвняння з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорiдними символами,

якi задовольняють умову ”параболiчностi” (у цьому випадку псевдодиференцiальний оператор називається параболiчним псевдодиференцiальним оператором (ППДО)). Випадок однорiдних символiв має застосування в теорiї випадкових процесiв, зокрема, при побудовi розривних процесiв Маркова за твiр6

ними iнтегро-диференцiальними операторами, якi належать до ПДО, у сучаснiй теорiї фракталiв, яка останнiм часом iнтенсивно розвивається. У теорiї задачi Кошi для параболiчних псевдодиференцiальних рiвнянь (ППДР) iз зазначеними ППДО вiдомi результати про структуру та оцiнки фундаментального

розв’язку задачi Кошi (ФРЗК), зображення розв’язку задачi Кошi у виглядi

iнтеграла Пуассона, дослiдженi якiснi властивостi розв’язкiв ППДР та систем

таких рiвнянь. Вiдзначимо при цьому, що асимптотика ФРЗК для таких рiвнянь вже не є експоненцiйною, як у випадку параболiчних рiвнянь з частинними похiдними, а степеневою. Якщо символ ППДО не залежить вiд просторових

координат, то задача Кошi для ППДР коректно розв’язна в просторi узагальнених функцiй типу розподiлiв, при цьому розв’язок подається у виглядi згортки

ФРЗК з початковою узагальненою функцiєю. Цi результати є науковим надбанням ряду вiтчизняних та закордонних математикiв, зокрема, С.Д. Ейдельмана i Я.М. Дрiня (якi першими визначили ППДО з негладкими символами i

розпочали дослiдження задачi Кошi для вiдповiдних ППДР), М.В. Федорюка,

А.Н. Кочубея, В.В. Городецького, В.А. Лiтовченка та iн.

До ПДО слiд вiднести i оператори F

−1

Bν

[a(t, x; σ)FBν

], породженi перетвореннями Бесселя FBν

, F

−1

Bν

. Якщо символ a є цiлою функцiєю аргументу σ, то

еволюцiйнi рiвняння вигляду ∂u/∂t + Au = 0 iз вказаним оператором мiстять

сингулярнi диференцiальнi рiвняння (тобто рiвняння, серед коефiцiєнтiв яких

є такi, що необмеженi в певнiй областi з R

n

), зокрема, рiвняння з оператором Бесселя Bν = d

2/dx2 + (2ν + 1)x

−1d/dx, ν > −1/2, який має у своїй

структурi вираз 1/x i формально зображається у виглядi Bν = F

−1

Bν

[−σ

2FBν

].

Якщо a(t, x; σ) = P(t, x; σ), де P – полiном змiнної σ при фiксованих t, x,

що задовольняє певну умову ”параболiчностi”, то таке рiвняння належить до

B-параболiчних рiвнянь, якi вироджуються на межi областi й за внутрiшнiми

властивостями є близькими до рiвномiрно параболiчних рiвнянь. Еволюцiйнi

рiвняння з оператором φ(Bν) = ∑

∞

k=0

ck(t)B

k

ν дослiджували В.В. Городецький,

О.В. Мартинюк, С.С. Дрiнь. З’ясовано, що такий оператор можна розумiти

як ПДО вигляду F

−1

Bν

[a(t, σ)FBν

] з певним символом a(t, σ) як цiлою функцiєю

змiнної σ. Встановлено коректну розв’язнiсть задачi Кошi у випадку, коли по7

чаткова функцiя є аналiтичним функцiоналом iз простору типу W′

. В.А. Лiтовченком побудовано клас псевдодиференцiальних сингулярних систем iз цiлими

аналiтичними символами a = a(t, σ), не залежними вiд просторових змiнних,

який мiстить у собi −→

2B-параболiчнi системи диференцiальних рiвнянь.

Якщо a(t, x; σ) – однорiдна негладка у точцi σ = 0 функцiя, що задовольняє

певнi умови, то оператор A, побудований за таким символом за допомогою перетворення Бесселя, надалi називатимемо псевдобесселевим оператором. Еволюцiйнi рiвняння iз псевдобесселевими операторами зi сталими символами розпочали дослiджувати В.В. Городецький та О.М. Ленюк (якщо функцiя a не

залежить вiд t та x, тобто a = a(σ), то такий символ називається ”сталим”).

Вони довели коректну розв’язнiсть задачi Кошi для еволюцiйних рiвнянь з

такими операторами та початковими даними, якi є узагальненими функцiями

типу розподiлiв. Аналогiчнi результати для еволюцiйних рiвнянь з оператором

φ(A) = ∑

∞

k=0

ckA

k

, A = F

−1

Bν

[a(σ)FBν

] (псевдобесселевим оператором нескiнченного порядку) отриманi Н.М. Шевчук. Задачу Кошi для еволюцiйних рiвнянь

iз псевдобесселевими операторами зi змiнними символами та початковими даними з класу обмежених неперервних парних на R функцiй вивчали В.В. Городецький та Д.I. Спiжавка.

Для подальшого розвитку теорiї еволюцiйних псевдодиференцiальних рiвнянь актуальним є: а) побудова нових класiв псевдодиференцiальних операторiв, якi б мiстили в собi клас псевдобесселевих операторiв зi сталими та змiнними символами; б) розвинення теорiї задачi Кошi для еволюцiйних рiвнянь

з такими операторами та початковими функцiями з рiзних функцiональних

просторiв.

Важливий клас операторiв узагальненого диференцiювання утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва, введенi в серединi XX сторiччя при вивченнi розкладiв цiлих функцiй в узагальненi ряди Фур’є, якi позначаються символами

Dn

(F, ·), n ∈ N. До таких операторiв належать оператори диференцiювання

d/dx = D1

(e

x

, ·) та оператори вигляду

A =

∑

mp

k=m

ckx

k−md

k

/dxk

, m ∈ N, p ∈ {2, 3, . . . }, x ∈ R.

8

Властивостi операторiв узагальненого диференцiювання дослiджували i продовжують дослiджувати математики в просторi A∞ однозначних i цiлих функцiй

з топологiєю компактної збiжностi (Ж. Дельсарт, Ж.-Л. Лiонс, Ю.Ф. Коробейник, М.I. Нагнибiда, В.В. Напалков, В.П. Подпорiн, В.А. Ткаченко, С.С.

Лiнчук та iн.). Зокрема, вивчалося питання про зображення лiнiйних неперервних вiдображень у виглядi операторiв узагальненого диференцiювання та

iнтегрування, диференцiальних або iнтегральних операторiв нескiнченного порядку. A∞ не є нормованим простором, але у той же час A∞ – простiр Фреше.

Прикладами iнших просторiв, елементами яких є цiлi функцiї i якi використовуються при дослiдженнi проблеми про класи єдиностi та класи коректностi

задачi Кошi для рiвнянь з частинними похiдними зi сталими (або залежними

лише вiд t) коефiцiєнтами є простори типу S, введенi I.М. Гельфандом та Г.Є.

Шиловим. Функцiї з таких просторiв на дiйснiй осi разом з усiма своїми похiдними при |x| → ∞ спадають швидше, нiж exp(−a|x|), a > 0, x ∈ R. Топологiя

таких просторiв вiдмiнна вiд топологiї простору A∞. У працях Горбачука М.Л.,

Горбачук В.I., Кашпiровського О.I., Дуднiкова П.I., Городецького В.В., Андросової Л.I., Возняк О.Г., Лiтовченка В.А. та iн. встановлено, що простори типу

S та топологiчно спряженi до них простори типу S

′

є природними множинами

початкових даних задачi Кошi для широких класiв рiвнянь з частинними похiдними скiнченного та нескiнченного порядкiв, при яких розв’язки є цiлими

функцiями за просторовими змiнними. У зв’язку з цим актуальним є питання про дослiдження задачi Кошi у просторах, якi є узагальненнями просторiв

типу S, а також у просторах, топологiчно спряжених до них, для еволюцiйних

рiвнянь з операторами узагальненого диференцiювання Гельфонда-Леонтьєва

як скiнченного, так i нескiнченного порядкiв.

Узагальненням задачi Кошi є нелокальна багатоточкова за часом задача,

коли початкова умова u(t, ·)|t=0 = f замiнюється умовою ∑

m

k=0

αku(t, ·)|t=tk = f,

де t0 = 0, {t1, . . . , tm} ⊂ (0, T], {α0, α1, . . . , αm} ⊂ R, m ∈ N – фiксованi

числа (якщо α0 = 1, α1 = α2 = · · · = αm = 0, то маємо, очевидно, задачу

Кошi). Нелокальнi за часом задачi належать до нелокальних крайових задач

для рiвнянь з частинними похiдними. Такi задачi виникають при моделюваннi

9

багатьох процесiв i задач практики крайовими задачами для рiвнянь з частинними похiдними з нелокальними умовами (теорiя фiзики плазми, ядернi реакцiї, процеси вологоперенесення у капiлярно-пористих середовищах, дифузiї та

поширення електромагнiтних хвиль, демографiчнi дослiдження, задачi математичної бiологiї). Такi задачi виникають також при описуванi всiх коректних

задач для конкретного оператора, при побудовi загальної теорiї крайових задач.

Дослiдженням нелокальних крайових задач у рiзних аспектах займалося

багато математикiв, використовуючи при цьому рiзнi методи та пiдходи (О.О.

Дезiн, В.К. Романко, С.Г. Крейн, В.М. Борок, М.Л. Горбачук, А.Н. Нахушев,

А.Х. Мамян, Б.Й. Пташник, В.С. Iлькiв, В.I. Чесалiн, А.Л. Скубачевський та

iн.). Одержанi важливi результати щодо постановки, коректної розв’язностi та

побудови розв’язкiв, дослiдженi питання залежностi характеру розв’язностi

задач вiд поведiнки символiв операцiй, сформульованi умови регулярностi

та нерегулярностi крайових умов для важливих випадкiв диференцiальнооператорних рiвнянь.

Нелокальну m-точкову за часом задачу для еволюцiйних рiвнянь з псевдодиференцiальними операторами, побудованими за точково-негладкими однорiдними символами, незалежними вiд просторових змiнних та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцiєю скiнченного порядку, дослiджували Я.М. Дрiнь, В.В. Городецький та М.М. Дрiнь. Двоточкову за часом

задачу для рiвняння теплопровiдностi та B-параболiчного рiвняння зi сталими

коефiцiєнтами вивчав М.I. Матiйчук. Знайденi функцiї Грiна вказаних задач,

за допомогою яких розв’язки зображаються у виглядi об’ємних потенцiалiв.

Двоточкову та m-точкову (m ≥ 2) за часом задачу для еволюцiйного

рiвняння з псевдобесселевим оператором, побудованим за сталим символом,

вивчали В.В. Городецький, О.М. Ленюк та Д.I. Спiжавка. Встановлено коректну розв’язнiсть задачi у випадку, коли гранична функцiя є узагальненою

функцiєю типу розподiлiв Соболєва-Шварца, знайдено зображення розв’язку

у виглядi згортки фундаментального розв’язку з граничною функцiєю.

На сьогоднi актуальними є: 1) побудова теорiї нелокальної багатоточкової

10

за часом задачi для еволюцiйних рiвнянь вигляду

∂u(t, x)

∂t + φ(A)u(t, x) = 0, t ∈ (0, T], x ∈ R

n

, (0.1)

де φ(A) – цiла функцiя вiд оператора A, зокрема, φ(A) = A, A – псевдобесселевий оператор, побудований як за сталим, там i змiнним символом,

негладким у точцi σ = 0, з класу, який мiстить символи, що задовольняють умову ”параболiчностi”, або A – оператор узагальненого диференцiювання Гельфонда-Леонтьєва, або A – невiд’ємний самоспряжений оператор у сепарабельному гiльбертовому просторi; φ(A) розглядається у рiзних злiченнонормованих просторах нескiнченно диференцiйовних функцiй (чи їх проективних або iндуктивних границях); умова

∑

m

k=0

αku(t, ·)|t=tk = f (0.2)

трактується в класичному розумiннi або в слабкому сенсi, якщо f – узагальнена функцiя типу розподiлiв або ультрарозподiлiв, тобто як граничне спiввiдношення

∑

m

k=0

αk lim

t→tk

⟨u(t, ·), φ⟩ = ⟨f, φ⟩

для довiльної функцiї φ з основного простору (тут ⟨f, ·⟩ позначає дiю функцiоналу f на основну функцiю);

2) розвинення методики дослiдження ФРБЗ – фундаментального розв’язку

задачi (0.1), (0.2).

Дисертацiйна робота присвячена вирiшенню наведених вище питань.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацiя виконана в рамках наукової кафедральної теми ”Дослiдження крайових

задач для рiвнянь з частинними похiдними та задач оптимального керування”

(державний реєстрацiйний номер 0113U003171) кафедри диференцiальних рiвнянь Чернiвецького нацiонального унiверситету iменi Юрiя Федьковича та

держбюджетних науково-дослiдних робiт ”Дослiдження крайових задач для

диференцiальних i псевдодиференцiальних рiвнянь параболiчного i елiптичного типу та їх застосування” (державний реєстрацiйний номер 0112U002339)

та ”Аналiтичнi та наближенi методи дослiдження нових класiв еволюцiйних

11

неперервних i дискретних систем” (державний реєстрацiйний 0115U003230)

Чернiвецького нацiонального унiверситету iменi Юрiя Федьковича

ВИСНОВКИ

Удисертацїпобудованотеорюкоректноїрозв’язностзадачКоштанелокальноїбагатоточковоїзачасомзадачдляеволюцйнихрвняньвигляду

∂∂φдеφ–цлафункцявдоператоразокремаφ

–псевдобесселевийоператорпобудованийякзасталимтакзазмннимсимволомнегладкимуточцσзкласуякиймститьсимволищо

задовольняютьумову”параболчност”або–операторузагальненогодиференцюванняГельфондаЛеонтьєваφрозглядаєтьсяурзнихзлченнонормованихпросторахнескнченнодиференцйованихфункцйчиїхпроективнихабондуктивнихграницяхДослджентакожеволюцйнрвняння

вказаноговиглядузневд’ємнимисамоспряженимиоператорамивабстрактномугльбертовомупростор

Длярозглянутогорвнянняставитьсяумова∑





·



якатрактуєтьсяукласичномурозумннабовслабкомусенсякщо–узагальнена

функцятипурозподлвабоультрарозподлвтобтоякграничнеспввдношення∑







→

⟨·φ⟩⟨φ⟩длядовльноїфункцїφзосновногопростору

Приодержаннрезультатврозвиненаметодикадослдженняфундаментальногорозв’язкунелокальноїбагатоточковоїзадачдлявказанихеволюцйнихрвняньвстановленоструктурутавивченовластивостфундаментальних

розв’язквзадачКоштанелокальноїбагатоточковоїзадачЗнайденоумови

коректноївизначеностоператораφурзнихпросторахнескнченнодиференцйовнихфункцйтаупросторахформальнихрядвФур’євигляду∑

∞





де≥–ортонормованийбазиссепарабельногогльбертовогопростору

Побудованоновкласисталихтазмннихсимволвнедиференцйовниху

точцякмстятьвдомийклассимволвщозадовольняютьумову”параболчност”атакожзаїхдопомогоюновкласипсевдодиференцальнихоператорвскнченногонескнченногопорядкв

Побудованопросториосновнихфункцйуякихвказаноператориєнеперервнимидослдженотопологчнуструктуруцихпросторвтаїхобразвпри

вдображеннБесселяВивченовластивостперетворенняБесселяузагальне

нихфункцйзпросторвякєтопологчноспряженимидопросторвосновних

функцйатакожвластивостзгортокзгортувачвтамультиплкаторвяквикористовувалисяпризнаходженнаналтичногозображеннярозв’язквзадач

КоштанелокальноїбагатоточковоїзадачдлявказанихрвняньДоведенокоректнурозв’язнстьзадачКоштанелокальноїбагатоточковоїзачасомзадач

увипадкуколипочатковфункцїтафункцїзадопомогоюякихзадається

нелокальнабагатоточковазадачаєелементамиширокихкласвгладкихфункцйтатопологчноспряженихдонихпросторв

Дослдженавластивстьлокалзацїрозв’язквзазначенихзадачвстановленощоякщопочатковаузагальненафункцяабоузагальненаграничнафункцязбгаєтьсянавдкритймножин⊂знеперервноюфункцєютона

довльномукомпакт⊂граничнеспввдношення



→

−

∑







→

⊂

справджуєтьсярвномрноабопоточкововдносно∈

Дослдженотопологчнуструктурупросторв





≥≥

–монотоннозростаючпослдовностдодатнихчиселякзадовольняютьпевн

умовиякєузагальненнямивдомихпросторв

β

α

введенихМГельфандом

таГЄШиловимДоведенощоупросторах





визначенєнеперервними

операцїдиференцюваннязсувуаргументумноженнянанескнченнодиференцйовнфункцїякзадовольняютьпевнумовиОбґрунтованощовцих

просторахвизначенєнеперервниминелишеоператориузагальненогодиференцюванняГельфондаЛеонтьєва

·∈айоператори

φ∑

∞





яктрактуютьсяякоператориузагальненогодиференцюваннянескнченногопорядку

ДослдженозадачуКоштанелокальнудвоточковузачасомзадачу

дляеволюцйнихрвняньзвказанимиоператорамидоведеноїхкоректну

розв’язнстьЗнайденоаналтичнезображеннярозв’язкввказанихзадачувипадкахколи∈





та∈







′



Упросторахузагальненихелементвякототожнюютьсязформальними

рядамиФур’євведенооперацю”абстрактноїзгортки”Задопомогоюцєїопе

рацїневд’ємнсамоспряженоператоризсутодискретнимиспектрамитрактуютьсяякоператоризгорткиТакийпдхддозволиввстановитидляширокогокласудиференцальнооператорнихрвнянькоректнурозв’язнстьнелокальноїбагатоточковоїзадач

Знайденоаструктуруфундаментальногорозв’язку∈тавивченойоговластивостбзображеннярозв’язкуувиглядзгортки∗

деграничнийелементєлнйнимнеперервнимфункцоналомнапевному

пдпросторосновнихелементв⊂⊂′

–гльбертвпрострВстановленощо∈⊂–сильнодиференцйовнана

функцяяказадовольняєграничнуумовуупростор′



Дляеволюцйнихрвняньзневд’ємнимисамоспряженимиоператорамив

гльбертовомупросторзнайдено”максимальний”прострелементвдляпостановкинелокальноїбагатоточковоїзадачзаякимирозв’язокоднозначно

вдновлюєтьсяволодєнеобхднимивластивостями

РезультатиякнаведенудисертацйнйроботодержанупроцесдослдженьзвикористаннямкласичнихметодвтеорїзадачКошдлялнйнихпараболчнихпараболчнихрвняньтасистемметодвтеорїпросторвосновнихтаузагальненихфункцйтеорїсамоспряженихоператорвугльбертовомупросторметодвтеорїформальнихрядвФур’єтатеорїграничних

значеньрозв’язквдиференцальнооператорнихрвнянь

Результатиможутьзнайтизастосуванняутеорїсингулярнихпараболчних

рвняньпараболчнихпсевдодиференцальнихрвняньрвняньзчастинними

похдниминескнченногопорядкутатеорїузагальненихфункцй