Козлова Надія Олександрівна, аспірант кафедри інте&shy;гральних та диференціальних рівнянь Київського національ&shy;ного університету імені Тараса Шевченка: &laquo;Нетерові крайові задачі для інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь&raquo; (01.01.02 - диференціальні рівняння). Спецрада Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевчен&shy;ка

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка

Мiнiстерство освiти i науки України

Квалiфiкацiйна наукова

праця на правах рукопису

КОЗЛОВА НАДIЯ ОЛЕКСАНДРIВНА

УДК 517.968

ДИСЕРТАЦIЯ

НЕТЕРОВI КРАЙОВI ЗАДАЧI ДЛЯ IНТЕГРАЛЬНИХ

ТА IНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦIАЛЬНИХ РIВНЯНЬ

01.01.02 – диференцiальнi рiвняння

Подається на здобуття наукового ступеня

кандидата фiзико-математичних наук

Дисертацiя мiстить результати власних дослiджень. Використання iдей,

результатiв i текстiв iнших авторiв мають посилання на вiдповiдне джерело.

Н.О. Козлова

Науковий керiвник Бойчук Олександр Андрiйович

член-кореспондент НАН України,

доктор фiзико-математичних наук,

професор

Київ – 2017

ЗМIСТ

ВСТУП 12

РОЗДIЛ 1. ОГЛЯД ЛIТЕРАТУРИ 32

1.1 Необхiднi вiдомостi з лiнiйної алгебри та теорiї псевдообернених операторiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 32

1.2 Вiдомi факти з теорiї iнтегральних рiвнянь. . . . . . . . . . . . . . . . 35

1.3 Огляд дослiджень нетерових крайових задач для iнтегральних та

iнтегро-диференцiальних рiвнянь . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 38

РОЗДIЛ 2. ЛIНIЙНI IНТЕГРАЛЬНI РIВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА 43

2.1 Крайовi задачi для лiнiйних iнтегральних рiвнянь типу Фредгольма . 43

2.1.1 Критерiй розв’язностi лiнiйної неоднорiдної крайової задачi. . . . . . 51

2.1.2 Крайова задача для рiвняння з симетричним оператором. . . . . . . 52

2.2 Слабкозбуренi лiнiйнi iнтегральнi рiвняння типу Фредгольма . . . . . 55

2.2.1 Загальний вигляд розв’язку слабкозбуреного iнтегрального рiвняння. 57

2.2.2 Приклад. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

2.3 Бiфуркацiя розв’язкiв лiнiйних крайових задач для iнтегральних рiвнянь типу Фредгольма . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65

2.3.1 Метод Вiшика-Люстерника для побудови розв’язкiв слабкозбуреної

крайової задачi. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 68

Висновки до роздiлу 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75

РОЗДIЛ 3. СЛАБКОНЕЛIНIЙНI IНТЕГРАЛЬНI РIВНЯННЯ ТИПУ ГАМЕРШТЕЙНА ТА СИСТЕМИ IНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦIАЛЬНИХ РIВНЯНЬ З IМПУЛЬСНОЮ ДIЄЮ 76

3.1 Слабконелiнiйнi iнтегральнi рiвняння типу Гамерштейна . . . . . . . . 76

3.1.1 Необхiдна умова iснування розв’язку. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 78

11

3.1.2 Достатня умова iснування розв’язку. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 80

3.1.3 Приклад. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

3.2 Слабконелiнiйнi крайовi задачi для iнтегральних рiвнянь типу Гамерштейна . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 92

3.2.1 Рiвняння для породжуючих констант. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95

3.2.2 Достатня умова iснування розв’язку. Метод простих iтерацiй. . . . . 97

3.3 Слабконелiнiйнi крайовi задачi для систем iнтегро-диференцiальних

рiвнянь з iмпульсним впливом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 106

3.3.1 Необхiдна умова iснування розв’язку. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110

3.3.2 Достатня умова iснування розв’язку. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 112

Висновки до роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 123

РОЗДIЛ 4. ЛIНIЙНI IНТЕГРАЛЬНI РIВНЯННЯ ТИПУ ФРЕДГОЛЬМА З

КЕРУВАННЯМ 124

4.1 Iнтегральнi рiвняння типу Фредгольма зi сталим керуванням . . . . . 124

4.1.1 Загальний вигляд розв’язку iнтегрального рiвняння. . . . . . . . . . 124

4.1.2 Приклад. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 129

4.1.3 Критерiй розв’язностi крайової задачi. . . . . . . . . . . . . . . . . . 134

4.2 Iнтегральнi рiвняння типу Фредгольма зi змiнним керуванням . . . . . 139

4.2.1 Умови розв’язностi iнтегрального рiвняння. . . . . . . . . . . . . . . 139

4.2.2 Приклад. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 143

4.2.3 Необхiднi та достатнi умови iснування розв’язку крайової задачi. . . 146

Висновки до роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152

ВИСНОВКИ 153

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 154

ДОДАТОК Список опублiкованих праць за темою дисертацiї 167

12

ВСТУП

Актуальнiсть теми. Дисертацiйна робота присвячена знаходженню умов

iснування та побудовi розв’язкiв нетерових крайових задач для лiнiйних та слабконелiнiйних iнтегральних рiвнянь та нетерових крайових задач для слабконелiнiйних систем iнтегро-диференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю. Проблеми

побудови конструктивних методiв аналiзу лiнiйних та слабконелiнiйних крайових задач для широкого класу систем функцiонально-диференцiальних рiвнянь,

якi традицiйно займають одне з центральних мiсць у якiснiй теорiї диференцiальних рiвнянь, ґрунтовно вивчалися у роботах М.В. Азбелєва, О.А. Бойчука,

А.М. Самойленка, В.П. Журавльова, Б. Ван-дер-Поля, В. Вольтерра, А.М. Ляпунова, I.Г. Малкiна, М.О. Перестюка, М.Й. Ронто, Ю.О. Рябова. Дослiдженню

нелiнiйних та сингулярних рiвнянь присвячено також роботи М.О. Красносельського, Г.М. Вайнiкко, П.П. Забрейка, Т. Карлемана, С.Г. Мiхлiна, М.I. Шкiля,

П.Ф. Самусенка. Iнтерес до таких задач зумовлений, перш за все, важливiстю

практичного застосування теорiї крайових задач у рiзних областях знань: теорiї нелiнiйних коливань, теорiї стiйкостi руху, теорiї керування; низки радiотехнiчних, механiчних та бiологiчних задач. Специфiка дослiдження крайових задач

для iнтегральних рiвнянь полягає в тому, що у бiльшостi випадкiв їх лiнiйна частина є оператором, який у вiдповiдних просторах не має оберненого, що не дозволяє

безпосередньо застосовувати традицiйнi методи дослiдження крайових задач, якi

базуються на використаннi принципу нерухомої точки. Цей факт суттєво ускладнює дослiдження таких задач, у зв’язку з чим вони є маловивченими.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертацiйна робота виконана на кафедрi iнтегральних та диференцiальних рiвнянь Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка згiдно iз

загальним планом дослiджень у рамках держбюджетних науково-дослiдних тем

№11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методiв моделювання, аналiзу

та побудови керувань для нелiнiйних еволюцiйних систем зi складною динамi-

13

кою"(номер державної реєстрацiї №0111U006677), №16БФ038-01 "Якiсний аналiз та керування еволюцiйними системами складної структури"(номер державної

реєстрацiї №0116U004752).

Мета i завдання дослiдження. Метою дисертацiйної роботи є дослiдження

умов iснування та побудови розв’язкiв нетерових крайових задач для iнтегральних

рiвнянь та систем iнтегро-диференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю.

Основними завданнями дослiдження є:

• встановлення необхiдних та достатнiх умов iснування розв’язкiв нетерових

крайових задач для лiнiйних та слабконелiнiйних iнтегральних рiвнянь; вiдшукання умов бiфуркацiї та розгалуження розв’язкiв для таких задач;

• знаходження умов розв’язностi слабконелiнiйної системи iнтегро-диференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю;

• встановлення критерiю розв’язностi крайових задач для лiнiйних iнтегральних рiвнянь з керуванням.

Об’єктом дослiдження є iнтегральнi рiвняння i системи iнтегро-диференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю та крайовi задачi для них.

Предметом дослiдження є необхiднi та достатнi умови iснування та конструктивнi методи побудови розв’язкiв крайових задач для лiнiйних i слабконелiнiйних iнтегральних рiвнянь та слабконелiнiйних систем iнтегро-диференцiальних

рiвнянь з iмпульсною дiєю у фiксованi моменти часу.

Методи дослiдження. У роботi суттєво використовується апарат теорiї псевдообернених за Муром-Пенроузом операторiв, метод Вiшика-Люстерника, розвинений для лiнiйних задач у роботах В.С. Королюка, А.Ф. Турбiна, А.М. Самойленка, О.А. Бойчука, а також методи функцiонального аналiзу.

Наукова новизна отриманих результатiв. Основнi результати, якi визначають наукову новизну i виносяться на захист, такi:

1. встановлено критерiї iснування розв’язкiв нетерових крайових задач для лiнiйного iнтегрального рiвняння та лiнiйного слабкозбуреного iнтегрального

рiвняння типу Фредгольма, ядра яких є невиродженими;

14

2. побудовано загальний вигляд розв’язку у виглядi частини степеневого ряду

з сингулярнiсю за параметром, який збiгається при фiксованому, достатньо

малому параметрi для лiнiйної слабкозбуреної крайової задачi, в припущеннi, що породжуюча задача є нерозв’язною;

3. встановлено необхiднi та достатнi умови iснування розв’язкiв нетерової крайової задачi для слабконелiнiйного iнтегрального рiвняння типу Гамерштейна, побудовано рiвняння для породжуючих констант, яке дає необхiдну умову iснування розв’язку, встановлено зв’язок мiж необхiдними та достатнiми

умовами, запропоновано iтерацiйнi схеми побудови її наближених розв’язкiв;

4. дослiджено нетерову крайову задачу для слабконелiнiйної системи iнтегродиференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю у фiксованi моменти часу, знайдено необхiднi та достатнi умови iснування розв’язкiв поставленої задачi,

встановлено зв’язок мiж цими умовами;

5. дослiджено крайову задачу для лiнiйного iнтегрального рiвняння типу

Фредгольма з керуванням у випадку, коли породжуюча крайова задача без

керування є нерозв’язною; встановлено умови, при яких вводячи керування

в праву частину породжуючої задачi, отримана крайова задача стає розв’язною; знайдено явний вигляд керування.

Практичне значення одержаних результатiв. Дисертацiйна робота носить теоретичний характер. Результати роботи, а також методика їх отримання сприяють подальшому розвитку теорiї крайових задач для iнтегральних та

iнтегро-диференцiальних рiвнянь, що використовуються при моделюваннi та дослiдженнi фiзичних, економiчних та бiологiчних процесiв.

Особистий внесок здобувача. Всi результати дисертацiї, якi виносяться на

захист одержанi автором самостiйно. Визначення загального плану дослiдження

належить науковому керiвнику – О.А. Бойчуку. У спiльних роботах спiвавторам

належать обговорення та аналiз отриманих результатiв.

15

Апробацiя результатiв дисертацiї. Результати дисертацiйного дослiдження доповiдались та обговорювались на конференцiях та наукових семiнарах:

1. Мiжнародна конференцiя "The nonlinear analysis and application 2015"(Київ,

1-3 квiтня 2015 р.);

2. ХVII Мiжнародна конференцiя "Dynamical system modelling and stability

investigation"(Київ, 27-29 травня 2015 р.);

3. Мiжнародна конференцiя молодих математикiв (Київ, 3-6 червня 2015 р.);

4. VII Мiжнародна конференцiя "Mathematical Analysis, Differential Equations and their Applications"(MADEA-7) (Баку, Азербайджан, 8-13 вересня

2015 р.);

5. VII Мiжнародна наукова конференцiя "Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры"(Актобе, Республiка Казахстан, 8-9 жовтня

2015 р.);

6. Мiжнародна наукова конференцiя "Математический анализ, дифференциальные уравнения и теория чисел"(Душанбе, Республiка Таджикiстан,

29-30 жовтня 2015 р.);

7. ХVII Мiжнародна наукова конференцiя iм. акад. М. Кравчука (Київ,

19-20 травня 2016 р.);

8. Мiжнародна наукова конференцiя "Диференцiальнi рiвняння та їх застосування"(Ужгород, 19-21 травня 2016 р.);

9. Конференцiя молодих учених "Пiдстригачiвськi читання – 2016"(Львiв,

25-27 травня 2016 р.);

10. Мiжнародна конференцiя "International conference on Differential equations"(Львiв, 20-24 вересня 2016 р.);

11. Мiжнародна наукова конференцiя "Диференцiально - функцiональнi рiвняння та їх застосування"(Чернiвцi, 28-30 вересня 2016 р.);

12. Мiжнародна конференцiя "Диференцiальнi рiвняння та їх застосування"(Кам’янець-Подiльський, 19-21 травня 2017 р.);

16

13. XVIII Мiжнародна конференцiя "Dynamical system modeling and stability

investigation"(Київ, 24-26 травня 2017 р.);

14. Мiжнародна конференцiя "Теорiя наближення функцiй та її застосування"(Слов’янськ, 28 травня - 3 червня 2017 р.);

15. Мiжнародна конференцiя молодих математикiв (Київ, 7-10 червня 2017 р.);

16. Засiдання наукового семiнару лабораторiї крайових задач Iнституту математики НАН України пiд керiвництвом доктора фiз.-мат. наук, професора,

члена-кореспондента НАН України О.А. Бойчука (Київ, 2017);

17. Засiдання наукового семiнару кафедри iнтегральних та диференцiальних

рiвнянь механiко-математичного факультету Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка пiд керiвництвом доктора фiз.-мат. наук,

професора, академiка НАН України А.М. Самойленка та доктора фiз.-мат.

наук, професора, академiка НАН України М.О. Перестюка (Київ, 2017).

Публiкацiї. За темою дисертацiї опублiковано 20 наукових публiкацiй. З них

• 5 статей [11, 40, 44, 48, 99] у фахових виданнях, серед яких 2 статтi [11, 44],

надрукованi у журналi, переклад якого включений до наукометричної бази

Scopus, 2 статтi [40, 48] у наукових фахових виданнях України та 1 статтю

[99] у фаховому iноземному журналi, який включено до наукометричної бази

Scopus;

• 15 тез доповiдей на наукових конференцiях [17, 41–43, 45–47, 49–52, 106–109].

Структура дисертацiї. Дисертацiйна робота складається iз анотацiї, вступу, чотирьох роздiлiв, висновкiв та списку використаних джерел, що мiстить 116

найменувань, та додатку. Повний обсяг складає 170 сторiнок друкованого тексту.

Автор висловлює щиру подяку науковому керiвнику – члену-кореспонденту

НАН України, доктору фiз.-мат. наук, професору О.А. Бойчуку за постановку

задачi, постiйну увагу до роботи й обговорення отриманих результатiв.

ВИСНОВКИ

Удисертацйнйроботодержанотакосновнрезультати

•Знайденоумовиснуваннятазагальнийвиглядрозв’язкулнйноїнетерової

крайовоїзадачдлянтегральногорвняннятипуФредгольмаядроякогоє

невиродженимВстановленокритерйрозв’язностслабкозбуреноїкрайової

задачдлялнйногонтегральногорвняннятипуФредгольмауприпущеннщовдповднапороджуючазадачаєнерозв’язноюПобудованозагальний

виглядрозв’язкутакоїзадачувиглядчастинирядузсингулярнстюякий

збгаєтьсяприфксованомудостаньомаломупараметр

•Встановленонеобхднтадостатнумовиснуваннярозв’язквнетеровихкрайовихзадачдляслабконелнйнихнтегральнихрвняньтипуГамерштейна

тасистемнтегродиференцальнихрвняньзмпульсноюдєюуфксован

моментичасуПобудованорвняннядляпороджуючихконстанттавстановленозв’язокмжнеобхдноютадостатньоюумовамиЗапропонованотерацйнсхемипобудовинаближенихрозв’язквДлянтегральногорвняння

типуГамерштейнароглянутовипадокневиродженогонтегральногооператора

•Знайденонеобхднтадостатнумовиснуваннярозв’язкунетеровоїкрайовоїзадачдлялнйногонтегральногорвняннятипуФредгольмазкеруваннямзаумовищозадачабезкеруванняєнерозв’язноюРозглянутовипадки

змнноготасталогокерувань