

**ФГБОУ ВО**  
**«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»**  
**Механико–математический факультет**

На правах рукописи

**Коновалов Александр Юрьевич**

**КОНСТРУКТИВНЫЕ СЕМАНТИКИ ЛОГИЧЕСКИХ ЯЗЫКОВ,  
ОСНОВАННЫЕ НА ОБОБЩЕННОЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ**

Специальность **01.01.06** —  
«математическая логика, алгебра и теория чисел»

**Автореферат**  
диссертации на соискание учёной степени  
кандидата **физико-математических наук**

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук,  
доцент **Валерий Егорович Плиско**

**Москва — 2017**

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Научный руководитель: **Плиско Валерий Егорович**, кандидат физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Кановей Владимир Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, и.о. главного научного сотрудника;

**Одинцов Сергей Павлович**, доктор физико-математических наук, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, ведущий научный сотрудник;

**Чернов Алексей Вячеславович**, кандидат физико-математических наук, School of Computing, Engineering and Mathematics, University of Brighton, Senior Lecturer.

Защита состоится 16 февраля 2018 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: [msu.01.17@mail.ru](mailto:msu.01.17@mail.ru)

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале отдела диссертаций Фундаментальной библиотеки ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» по адресу: Ломоносовский проспект, д. 27 и на сайте ИАС «Истина»: <https://istina.msu.ru/dissertations/89175564>

Автореферат разослан 16 января 2018 года.

Ученый секретарь диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ, доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН

Шафаревич А. И.

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Диссертация посвящена исследованию некоторых вопросов конструктивной математической логики.

В начале XX века в математике возникло интуиционистское направление как положительный аспект предпринятой Брауэром<sup>1</sup> критики классической математики в связи с обнаружением в последней теоретико-множественных парадоксов. Интуиционистская критика затронула и классическую логику. Начиная с работ А. Н. Колмогорова, Гейтинга, В. И. Гливленко, относящихся к концу 20-х — началу 30-х годов, большое внимание уделяется построению и исследованию логических систем, корректных с точки зрения интуиционизма. По мере развития математики и математической логики исследования по интуиционистской логике не только не утратили свою актуальность, но, напротив, наполнялись новым содержанием. Так, еще в 30-е годы А. Н. Колмогоров<sup>2</sup> показал, что интуиционистская логика имеет реальный смысл, не связанный с философскими установками Брауэра, если рассматривать ее как логику решения задач. В 40-е годы американский математик С. К. Клини<sup>3</sup> предложил интерпретацию ряда специфических интуиционистских понятий на основе разработанных к тому времени концепций теории алгоритмов. В частности, Клини ввел понятие рекурсивной реализуемости для формул языка арифметики первого порядка с целью уточнения интуиционистского смысла арифметических суждений на основе теории рекурсивных функций (см. <sup>4</sup>, § 82). Это понятие послужило отправной точкой для разработки конструктивной семантики математических утверждений, использованной в рамках конструктивного подхода к математике в работах А. А. Маркова и его школы<sup>5</sup>.

Развитие конструктивной математики в свою очередь вызвало необходимость исследования соответствующей ей конструктивной логики. В математической логике логические законы выражаются посредством предикатных формул. Имеются различные варианты понятия реализуемости для таких формул<sup>6</sup>. Семантика предикатных формул, основанная на понятии рекурсивной реализуемости, предполагает, что вместо предикатных переменных подставляются формулы языка формальной арифметики. Од-

---

<sup>1</sup>L. E. J. Brouwer. *De onbetrouwbaarheid der logische principes* (Недовершенство принципов логики). Tijdschrift voor wijsbegeerte. 1908, **2**, 152—158.

<sup>2</sup>А. Н. Колмогоров. *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*. Math. Z. 1932, **35**, 58—65.

<sup>3</sup>S. K. Kleene. *On the interpretation of intuitionistic number theory*. Journ. Symbolic Logic. 1945, **10**, 109—124.

<sup>4</sup>С. К. Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.

<sup>5</sup>Н. А. Шанин. *О некоторых логических проблемах арифметики*. Тр. МИАН, 1955, т. 43, стр. 1—112.

<sup>6</sup>В. Е. Плиско. *Обзор предикатной логики реализуемости*. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, М.: МАИК «НАУКА/ИНТЕРПЕРИОДИКА», 2011, т. 274, стр. 222—251.

нако было доказано<sup>7</sup>, что при расширении языка арифметики за счет предиката истинности для него класс реализуемых предикатных формул сужается. Попытки решения проблемы выработки адекватного понятия реализуемости для предикатных формул, независимого от языка, в котором формулируются предикаты, подставляемые вместо предикатных переменных, привели к понятию абсолютно реализуемой предикатной формулы<sup>8</sup>. Оказалось, что множество всех абсолютно реализуемых предикатных формул является  $\Pi_1^1$ -полным.  $\Pi_1^1$ -множества соответствуют перечислимым множествам в контексте так называемой гиперарифметической вычислимости. Как отмечается в § 16.5 книги<sup>9</sup>, гиперарифметическая вычислимость может служить фундаментом для естественного расширения конструктивной точки зрения. Поэтому представляет интерес рассмотрение конструктивных семантик, основанных на различных видах обобщенной вычислимости.

Интуиционистская критика классической математики затронула и понятие множества. С точки зрения интуиционизма приемлемы следующие два способа определения множества: 1) посредством задания способа порождения его элементов; 2) посредством указания свойства, которое характеризует элементы множества. Если множество определяется посредством указания свойства, характеризующего элементы этого множества, то соответствующее свойство называется видом, а всякий объект, обладающий этим свойством, называется членом данного вида. В связи с построением конструктивной математики представляет интерес рассмотрение конструктивных семантик для теории множеств, основанных на видах, разрешимых с точки зрения обобщенной вычислимости.

### **Цели и задачи работы.**

Определить и исследовать понятие реализуемости для формул языка арифметики и его расширений, основанное на использовании вычислимых в обобщенном смысле функций как конструктивного способа получения одних реализаций из других. Определить и исследовать понятие реализуемости предикатных формул, основанное на обобщенной вычислимости. Определить и исследовать понятие реализуемости формул языка теории множеств, основанное на гиперарифметических предикатах.

### **Основные результаты.**

Для уточнения понятия (обобщенной) вычислимости в диссертации фигурируют следующие классы функций:

— PR — класс всех примитивно рекурсивных функций;

<sup>7</sup>В. Е. Плиско. *Рекурсивная реализуемость и конструктивная логика предикатов*. ДАН, 1974, т. 214, № 3, стр. 520—523.

<sup>8</sup>В. Е. Плиско. *Абсолютная реализуемость предикатных формул*. Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983, т. 47, № 2, стр. 315—334.

<sup>9</sup>Х. Роджерс. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. М.: «Мир», 1972.

- $R$  — класс всех частично-рекурсивных функций;
- $R[f]$  — класс всех функций, частично-рекурсивных относительно  $f$ , где  $f$  — произвольная всюду определенная функция типа  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ;
- $A$  — класс всех арифметических функций;
- $A[X]$  — класс всех функций, определимых в формальной арифметике, расширенной при помощи предиката  $P_X(x) \equiv x \in X$ , где  $X$  — произвольное подмножество  $\mathbb{N}$ .
- $H$  — класс всех гиперарифметических функций.

Для каждого такого класса функций  $V$  фиксируется гёделева нумерация и вводятся обозначения:  $I_n^V$  — множество всех гёделевых номеров всех  $n$ -местных функций из класса  $V$ ,  $\varphi_z^{V,n}$  —  $n$ -местная функция из класса  $V$  с гёделевым номером  $z$ . Для каждого класса  $W \in \{A, H\} \cup \{A[X] \mid X \subseteq \mathbb{N}\}$  определяется расширение  $L_W$  языка формальной арифметики, в котором выразимыми оказываются в точности функции из класса  $W$ . По аналогии с клиниевской реализуемостью<sup>10</sup> определяется условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует замкнутую формулу  $\Phi$  языка  $L_W$ », обозначаемое так:  $e \mathbf{r}_W^V \Phi$ . При этом случай, когда формула  $\Phi$  является импликацией или начинается с квантора всеобщности, разбирается в духе PR-реализуемости Салехи<sup>11</sup>:

- $e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \equiv$   
 $[e \in I_{n+1}^V \text{ и для всех натуральных чисел } s \text{ и } a_1, \dots, a_n^{12}, \text{ если}$

$$s \mathbf{r}_W^V \Phi(a_1, \dots, a_n),$$

то определено  $\varphi_e^{V,n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$  и имеет место

$$\varphi_e^{V,n+1}(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_W^V \Psi(a_1, \dots, a_n)],$$

если  $n \geq 0$ ;

- $e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n \Phi \equiv [e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)]$ , если  $n > 0$ , формула  $\Phi$  не начинается с квантора  $\forall$ , и логическая связка  $\rightarrow$  не является главной в  $\Phi$ .

Понятие  $V$ -реализуемости распространяется на предикатные формулы. Замкнутая предикатная формула называется  *$V$ -реализуемой относительно  $W$ -оценок*, если любой ее замкнутый пример в языке  $L_W$  оказывается  $V$ -реализуем. По аналогии с абсолютной рекурсивной реализуемостью<sup>13</sup> определяется абсолютная  $V$ -реализуемость. Зафиксируем  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{N}$  и временно обогатим язык логики предикатов константами из множества  $M$ .

<sup>10</sup>S. K. Kleene. *On the interpretation of intuitionistic number theory*. Journ. Symbolic Logic. 1945, **10**, 109—124.

<sup>11</sup>S. Salehi. *Primitive recursive realizability and basic arithmetic*. Bull. Symbol. Logic. 2001, **7**, N 1, 147—148.

<sup>12</sup>Здесь и далее предполагается, что  $a_i = a_j$ , если  $x_i$  и  $x_j$  — одна и та же переменная.

<sup>13</sup>В. Е. Плиско. *Абсолютная реализуемость предикатных формул*. Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983, т. 47, № 2, стр. 315—334.

Пусть задано условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует формулу  $\Phi$ » для всех атомарных высказываний  $\Phi$  языка логики предикатов. Тогда, полагая областью значений связанных переменных множество  $M$ , это условие распространяется на остальные высказывания  $\Phi$  языка логики предикатов по аналогии с определением  $V$ -реализуемости для арифметических формул. Замкнутая предикатная формула называется *абсолютно  $V$ -реализуемой в области  $M$* , если она оказывается  $V$ -реализуемой независимо от того, как была задана  $V$ -реализуемость для атомарных высказываний при обогащении языка логики предикатов константами из  $M$ . Замкнутая предикатная формула называется *абсолютно  $V$ -реализуемой*, если она абсолютно  $V$ -реализуема в любой области. Абсолютно  $V$ -реализуемая (в области  $M$ ) предикатная формула называется *равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой* (в области  $M$ ), если существует единая реализация этой формулы для всех способов задания  $V$ -реализуемости на атомарных высказываниях при обогащения языка логики предикатов константами (из  $M$ ).

Понятие  $V$ -реализуемости распространяется на формулы языка теории множеств. Определяется множество  $\Delta \subseteq \mathbb{N}$ , называемое универсумом, которое обладает следующими свойствами:

- все элементы  $\Delta$  суть гиперарифметические индексы двухместных отношений;
- если  $z$  — гиперарифметический индекс отношения  $D(s, x)$ , то имеет место  $z \in \Delta$  тогда и только тогда, когда все натуральные числа  $x$ , удовлетворяющие условию  $\exists s D(s, x)$ , принадлежат  $\Delta$ .

Язык теории множеств обогащается константами из  $\Delta$  и для атомарных высказываний  $\Phi$  этого языка определяется условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует  $\Phi$  в универсуме  $\Delta$ »:

- $e \mathbf{r}_{\Delta}^V(a = b) \Leftrightarrow [a = b]$ ;
- $e \mathbf{r}_{\Delta}^V(a \in b) \Leftrightarrow D_b(e, a)$ ,

где  $D_z(s, x)$  — гиперарифметическое отношение, гиперарифметический индекс которого есть  $z$ . Полагая областью значений связанных переменных множество  $\Delta$ , это условие распространяется на остальные высказывания  $\Phi$  языка теории множеств по аналогии с определением  $V$ -реализуемости для арифметических формул.

Базисная логика предикатов BQC определяется в <sup>14</sup>. Конструктивная теория множеств CZF описана в <sup>15</sup>. Интуиционистская теория  $\text{CZF}^-$  определяется как CZF без аксиомы объемности. Модификацию теории  $\text{CZF}^-$ , в которой вместо интуиционистской логики используется базисная, обозначим  $\text{CZF}_B^-$ .

Результаты диссертации состоят в следующем:

<sup>14</sup>W. Ruitenburg. *Basic predicate calculus*. Notre Dame J. Formal Logic. 1998, **39**, N 1. 18–46.

<sup>15</sup>P. Aczel. *The type theoretic interpretation of constructive set theory* Log. Coll. 1978, **77**, 55–66.

1. Пусть  $W$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ , а  $V$  есть или  $A$ , или  $A[Y]$  для некоторого  $Y$ , или  $H$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , и при этом класс  $V$  содержит все функции из класса  $W$ . Тогда для расширения арифметики  $L_W$  семантика  $V$ -реализуемости совпадает с классической семантикой (теорема 2).
2. Пусть  $W$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ , а  $V$  есть или  $A$ , или  $A[Y]$  для некоторого  $Y$ , или  $H$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , и при этом класс  $V$  содержит все функции из класса  $W$ . Произвольная замкнутая предикатная формула является  $V$ -реализуемой относительно  $W$ -оценок тогда и только тогда, когда она выводится в классическом исчислении предикатов (теорема 3).
3. Пусть  $V$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ , или  $R[f]$  для такой функции  $f$ , что класс  $R[f]$  содержит все арифметические функции. Тогда всякая (равномерно) абсолютно  $V$ -реализуемая (в области  $\mathbb{N}$ ) предикатная формула выводится в классическом исчислении предикатов (теорема 4). Отметим, что в случае обычной рекурсивной реализуемости это не так (см. <sup>16</sup> и <sup>17</sup>, теорема 3).
4. Существует  $PR$ -реализуемая относительно  $A$ -оценок предикатная формула, которая не выводится в классическом исчислении предикатов (теорема 5).
5. Пусть  $V$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  (для некоторого  $X$ ), или  $H$ . Тогда высказывание  $\forall x ((\top \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x))$  не является абсолютно  $V$ -реализуемым в области  $\mathbb{N}$  (теорема 6). Это означает, что интуиционистское исчисление предикатов некорректно относительно абсолютной  $V$ -реализуемости (теорема 7).
6. Пусть  $V$  есть или  $PR$ , или  $R$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ . Тогда принцип Маркова в форме

$$\forall x (\top \rightarrow P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

является абсолютно  $V$ -реализуемым (теорема 8), и не является равномерно абсолютно  $V$ -реализуемым (теорема 9).

7. Пусть  $V$  есть или  $R$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ . Тогда принцип Маркова в форме

$$\forall x (\top \rightarrow P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

является равномерно абсолютно  $V$ -реализуемым в области  $\mathbb{N}$  (теорема 10). Это означает, что существует такая замкнутая преди-

---

<sup>16</sup>В. П. Оревков. *Связь конструктивной общезначимости с выводимостью в классическом исчислении предикатов*. Всесоюзный симпозиум по матем. логике (тезисы докладов), Алма-Ата, 1969, стр. 35.

<sup>17</sup>В. Е. Плиско. *Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул*. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1977, т. 41, № 3, стр. 483—502.

катная формула, которая не выводима в интуиционистском исчислении предикатов, однако, является абсолютно  $V$ -реализуемой и равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой в области  $\mathbb{N}$  (теорема 11).

8. Пусть  $V$  есть или  $R$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ . Всякая замкнутая предикатная формула, выводимая в базисной логике предикатов  $BQC$ , является равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой (теорема 12).
9. Пусть  $V$  есть или  $R$ , или  $R[f]$  для некоторой гиперарифметической функции  $f$ . Тогда всякая замкнутая формула языка теории множеств, выводимая в теории  $CZF^-$ , является  $V$ -реализуемой в универсуме  $\Delta$  (теорема 19).
10. Пусть  $V$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого гиперарифметического множества  $X$ . Найдется замкнутая формула языка теории множеств, выводимая в теории  $CZF^-$ , которая не является  $V$ -реализуемой в универсуме  $\Delta$  (теорема 20).
11. Пусть  $V$  есть или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого гиперарифметического множества  $X$ . Тогда всякая замкнутая формула языка теории множеств, выводимая в теории  $CZF_B$ , является  $V$ -реализуемой в универсуме  $\Delta$  (теорема 18).
12. Пусть  $V$  есть или  $PR$ , или  $R$ , или  $R[f]$  для некоторого  $f$ , или  $A$ , или  $A[X]$  для некоторого  $X$ , или  $H$ . Тогда высказывания  $\forall x, y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$  (аксиома объемности) и  $\forall y \exists z \forall x (x \in z \leftrightarrow \forall u (u \in x \rightarrow u \in y))$  (аксиома степени) не являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta$  (теорема 16).

### **Основные методы исследования.**

В работе использовались методы конструктивной логики и теории рекурсивных функций.

### **Теоретическая и практическая ценность.**

Работа имеет теоретический характер и представляет научный интерес для занимающихся неклассическими логиками и вопросами реализуемости. Техника, разработанная автором, может быть использована и в других аналогичных случаях.

### **Апробация работы и публикации автора.**

Основные результаты работы докладывались на международных конференциях «Восьмые Смирновские чтения по логике» (Москва, июнь 2013 г.), «Конструктивная теория доказательств» (Москва, февраль 2014 г.), «Десятые Смирновские чтения по логике» (Москва, июнь 2017 г.) и на семинарах «Научно-исследовательский семинар по математической логике», «Вычислимость и неклассические логики» (Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова).



Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [1, 2, 3, 4, 5, 6], 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [2, 3, 4, 5], 2 — в тезисах докладов [1, 6].

### Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, указателя обозначений и списка литературы из 25 наименований, включая 6 работ автора. Общий объем диссертации составляет 137 страниц, включая 131 страницу основного текста.

## Основное содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы основные результаты и практическая значимость представляемой работы.

В главе 1 излагаются известные и широко используемые понятия и факты, необходимые для дальнейшего. Прimitивно рекурсивные (частично-рекурсивные) функции сокращенно называются PR-функциями (R-функциями), а функции, частично-рекурсивные относительно некоторой функции  $f \in \mathcal{F}$ , где  $\mathcal{F}$  — множество всех всюду определенных функций типа  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , называются— R[f]-функциями.

Для каждого  $V \in \mathcal{C}_R = \{\text{PR}, \text{R}\} \cup \{\text{R}[f] \mid f \in \mathcal{F}\}$  фиксируется гёделева нумерация класса всех  $V$ -функций и вводятся следующие обозначения:  $I_n^V$  — множество всех гёделевых номеров всех  $n$ -местных  $V$ -функций,  $\varphi_z^{V,n}$  —  $n$ -местная  $V$ -функция с гёделевым номером  $z$ .

Раздел 1.1 посвящен гиперарифметическим отношениям, т. е. отношениям, принадлежащим классу  $\Delta_1^1 = \Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$  аналитической иерархии (см. <sup>18</sup>, глава 16). Вводится понятие  $\Delta_1^1$ -индекса гиперарифметического отношения. Приводится спецификация алгоритма Тарского — Куратовского (см. <sup>18</sup>, §§14.3, 15.1, 15.2, 16.1) применительно к гиперарифметическим отношениям. Описывается иерархия гиперарифметических множеств  $\{H(n)\}_{n \in \mathcal{O}}$  (см. <sup>18</sup>, § 16.8), где  $\mathcal{O}$  — система обозначений для конструктивных ординалов из <sup>18</sup>, § 11.7. Каждое гиперарифметическое отношение 1-сводится к некоторому множеству  $H(m)$ , причем натуральное число  $m$  и сводящая функция могут быть построены эффективно по  $\Delta_1^1$ -индексу гиперарифметического отношения.

В разделе 1.2 определяются языки логики предикатов  $\text{LP}$  и формальной арифметики  $\text{L}_A$ . Формулы языков  $\text{LP}$  и  $\text{L}_A$  строятся по стандартным правилам из атомов при помощи логических констант  $\perp$ ,  $\top$ , логических связок  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и кванторов  $\forall$ ,  $\exists$ .

<sup>18</sup>Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: «Мир», 1972.

Для каждого  $W \in \mathcal{C}_L = \{A, H\} \cup \{A[X] \mid X \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{H_n \mid n \in O\}$  определяются язык  $L_W$  и интерпретация  $\mathcal{N}_W$  этого языка.  $\mathcal{N}_A \equiv$  стандартная интерпретация языка  $L_A$ . Для каждого  $n \in O$  язык  $L_{H_n}$  получается из языка  $L_A$  добавлением одноместного предикатного символа  $H_n$ . Стандартная интерпретация языка  $L_A$  может быть продолжена до интерпретации  $\mathcal{N}_{H_n}$  языка  $L_{H_n}$ , если предикатному символу  $H_n$  сопоставить отношение  $x \in H(n)$ . Язык  $L_H$  получается из языка  $L_A$  добавлением одноместных предикатных символов  $H_n$  для каждого  $n \in O$ . Стандартная интерпретация языка  $L_A$  может быть продолжена до интерпретации  $\mathcal{N}_H$  языка  $L_H$ , если каждому предикатному символу  $H_n$  ( $n \in O$ ) сопоставить отношение  $x \in H(n)$ . Для каждого  $X \subseteq \mathbb{N}$  язык  $L_{A[X]}$  получается из языка  $L_A$  добавлением одноместного предикатного символа  $X$ . Стандартная интерпретация языка  $L_A$  может быть продолжена до интерпретации  $\mathcal{N}_{A[X]}$  языка  $L_{A[X]}$ , если предикатному символу  $X$  сопоставить отношение  $x \in X$ .

В разделе 1.3 приводятся аксиоматики интуиционистского исчисления предикатов IPC, классического исчисления предикатов CPC, формальной арифметики PA.

В разделе 1.4 исследуется выразительная сила рассматриваемых расширений языка  $L_A$ . В частности, доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Произвольное отношение  $Q(x_1, \dots, x_n)$  является гиперарифметическим тогда и только тогда, когда оно определимо в языке  $L_H$ .*

Для каждого  $V \in \mathcal{C}_L$  функции, определяемые в языке  $L_V$ , называются  $V$ -функциями. Для всех  $V \in \mathcal{C}_L$  фиксируются гёделевы нумерации класса всех  $V$ -функций и вводятся обозначения:  $I_n^V$  — множество всех гёделевых номеров всех  $n$ -местных  $V$ -функций,  $\varphi_z^{V,n}$  —  $n$ -местная  $V$ -функция с гёделевым номером  $z$ . На множестве метаобозначений  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \cup \mathcal{C}_L$  следующим образом определяются двухместные отношения  $\preceq$  и  $\ll$ :  $V \preceq W \equiv$  каждая  $V$ -функция является  $W$ -функцией,  $V \ll W \equiv$  для всех натуральных чисел  $n$  универсальная функция для класса всех  $n$ -местных  $V$ -функций является  $W$ -функцией. Доказывается, что для всех  $V \in \mathcal{C}$  следующие утверждения эквивалентны:

- (1)  $V \ll H$ ;
- (2)  $V \preceq H$  и  $V \neq H$ ;
- (3)  $V$  есть или PR, или R, или  $R[f]$  для некоторой гиперарифметической функции  $f$ , или A, или  $A[X]$  для некоторого гиперарифметического множества  $X$ , или  $H_n$  для некоторого  $n \in O$ .

**Глава 2** посвящена понятию обобщенной реализуемости для языка формальной арифметики и его расширений. Для всех  $V \in \mathcal{C}$ ,  $W \in \mathcal{C}_L$  индукцией по количеству логических символов в замкнутой формуле  $\Phi$  языка  $L_W$  определяется условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует  $\Phi$  в  $\mathcal{N}_W$ » (обозначение:  $e \mathbf{r}_W^V \Phi$ ):

–  $e \mathbf{r}_W^V \Phi \equiv \mathcal{N}_W \models \Phi$ , если  $\Phi$  — атомарная формула;

- $e \mathbf{r}_W^V (\Phi \wedge \Psi) \Rightarrow [\mathbf{p}_1 e \mathbf{r}_W^V \Phi \text{ и } \mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_W^V \Psi];$
- $e \mathbf{r}_W^V (\Phi \vee \Psi) \Rightarrow [(\mathbf{p}_1 e = 0 \text{ и } \mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_W^V \Phi) \text{ или } (\mathbf{p}_1 e = 1 \text{ и } \mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_W^V \Psi)];$
- $e \mathbf{r}_W^V \exists x \Phi(x) \Rightarrow \mathbf{p}_2 e \mathbf{r}_W^V \Phi(\mathbf{p}_1 e);$
- $e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow$   
 $[e \in \mathbb{I}_{n+1}^V \text{ и для всех натуральных чисел } s \text{ и } a_1, \dots, a_n, \text{ если}$

$$s \mathbf{r}_W^V \Phi(a_1, \dots, a_n),$$

то определено  $\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$  и имеет место

$$\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_W^V \Psi(a_1, \dots, a_n)],$$

если  $n \geq 0$ ;

- $e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n \Phi \Rightarrow [e \mathbf{r}_W^V \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)],$  если  $n > 0$ ,  
 формула  $\Phi$  не начинается с квантора  $\forall$ , и логическая связка  $\rightarrow$  не  
 является главной в  $\Phi$ .

Здесь  $\mathbf{p}_1(x)$  и  $\mathbf{p}_2(x)$  — примитивно рекурсивные функции, дающие соответственно первую и вторую компоненту пары с номером  $x$  в фиксированной примитивно рекурсивной нумерации множества  $\mathbb{N}^2$ .

Замкнутая формула  $\Phi$  языка  $\mathbf{L}_W$  называется *V-реализуемой* в  $\mathcal{N}_W$ , если существует натуральное число, которое *V-реализует*  $\Phi$  в  $\mathcal{N}_W$ . Этот факт обозначается так:  $\mathbf{r}_W^V \Phi$ .

Основным результатов второй главы является следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$ ,  $W \in \mathcal{C}_L$  и  $V \succcurlyeq W$ . Тогда имеет место

$$\mathbf{r}_W^V \Phi \Longleftrightarrow \mathcal{N}_W \models \Phi$$

для всех высказываний  $\Phi$  языка  $\mathbf{L}_W$ .

**Глава 3** посвящена исследованию понятия реализуемости для формул языка логики предикатов  $\mathbf{LP}$ .

В разделе 3.1 приводятся различные варианты определения этого понятия. Пусть  $V \in \mathcal{C}$ ,  $W \in \mathcal{C}_L$ . Замкнутая предикатная формула  $A$  называется *V-реализуемой относительно W-оценок* (обозначение:  $\mathbf{r}_W^V A$ ), если любой ее замкнутый  $\mathbf{L}_W$ -пример *V-реализуем* в  $\mathcal{N}_W$ . Следуя<sup>19</sup>, *n-местным обобщенным предикатом* на множестве  $M$  ( $n \geq 1$ ) называется всякая тотальная функция типа  $M^n \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , где  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  — множество всех подмножеств натурального ряда. Для каждого непустого множества  $M \subseteq \mathbb{N}$  *обобщенной M-оценкой* называется произвольное отображение, которое каждому *n-местному* ( $n \geq 1$ ) предикатному символу языка  $\mathbf{LP}$  ставит в соответствие *n-местный обобщенный предикат* на множестве  $M$ . Для каждого  $V \in \mathcal{C}$ , непустого множества  $M \subseteq \mathbb{N}$  и обобщенной *M-оценки*  $f$  индукцией

<sup>19</sup>В. Е. Плиско. Абсолютная реализуемость предикатных формул. Изв. АН СССР, Сер. матем. 1983, т. 47, № 2, стр. 315–334.

по количеству логических символов в замкнутой формуле  $\Phi$  языка LP, расширенного константами из  $M$ , определяется условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует  $\Phi$  относительно  $f$ » (обозначение:  $e \mathbf{r}_f^V \Phi$ ):

- неверно  $e \mathbf{r}_f^V \perp$ ;
- верно  $e \mathbf{r}_f^V \top$ ;
- $e \mathbf{r}_f^V P(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow e \in f(P)(a_1, \dots, a_n)$ ;
- $e \mathbf{r}_f^V (\Phi \wedge \Psi) \Rightarrow [p_1 e \mathbf{r}_f^V \Phi \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^V \Psi]$ ;
- $e \mathbf{r}_f^V (\Phi \vee \Psi) \Rightarrow [(p_1 e = 0 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^V \Phi) \text{ или } (p_1 e = 1 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^V \Psi)]$ ;
- $e \mathbf{r}_f^V \exists x \Phi(x) \Rightarrow p_1 e \in M \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_f^V \Phi(p_1 e)$ ;
- $e \mathbf{r}_f^V \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \Rightarrow$   
 $[e \in l_{n+1}^V \text{ и для всех натуральных чисел } s \text{ и } a_1, \dots, a_n \in M, \text{ если}$

$$s \mathbf{r}_f^V \Phi(a_1, \dots, a_n),$$

то определено  $\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$  и имеет место

$$\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_f^V \Psi(a_1, \dots, a_n)],$$

если  $n \geq 0$ ;

- $e \mathbf{r}_f^V \forall x_1, \dots, x_n \Phi \Rightarrow [e \mathbf{r}_f^V \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)]$ , если  $n > 0$ , формула  $\Phi$  не начинается с квантора  $\forall$ , и логическая связка  $\rightarrow$  не является главной в  $\Phi$ .

Замкнутая формула  $\Phi$  языка LP называется *V-реализуемой* относительно обобщенной  $M$ -оценки  $f$  (обозначение:  $\mathbf{r}_f^V \Phi$ ), если имеет место  $e \mathbf{r}_f^V \Phi$  для некоторого натурального числа  $e$ . Высказывание  $\Phi$  языка LP называется *абсолютно V-реализуемым* (обозначение:  $\mathbf{r}^V \Phi$ ), если для всех  $M \subseteq \mathbb{N}$  для любой обобщенной  $M$ -оценки  $f$  имеет место  $\mathbf{r}_f^V \Phi$ . Замкнутая формула  $\Phi$  языка LP называется *равномерно абсолютно V-реализуемой* (обозначение:  $\mathbf{ur}^V \Phi$ ), если найдется такое натуральное число  $e$ , что имеет место  $e \mathbf{r}_f^V \Phi$  для всех  $M \subseteq \mathbb{N}$  для любой обобщенной  $M$ -оценки  $f$ . Высказывание  $\Phi$  языка LP называется *абсолютно V-реализуемым в области  $M$*  (обозначение:  $\mathbf{r}_M^V \Phi$ ), если имеет место  $\mathbf{r}_f^V \Phi$  для любой обобщенной  $M$ -оценки  $f$ . Замкнутая формула  $\Phi$  языка LP называется *равномерно абсолютно V-реализуемой в области  $M$*  (обозначение:  $\mathbf{ur}_M^V \Phi$ ), если найдется такое натуральное число  $e$ , что имеет место  $e \mathbf{r}_f^V \Phi$  для любой обобщенной  $M$ -оценки  $f$ .

В разделе 3.2 доказываются следующие теоремы.

**Теорема 3.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$ ,  $W \in \mathcal{C}_L$  и  $V \succcurlyeq W$ . Тогда для всех высказываний  $A$  языка LP имеет место

$$\mathbf{r}_W^V A \iff \text{CPC} \vdash A.$$

**Теорема 4.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \succcurlyeq A$ . Тогда для всех высказываний  $A$  языка  $LP$  справедливо:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_N^V A &\Longrightarrow \text{CPC} \vdash A; \\ \mathbf{r}^V A &\Longrightarrow \text{CPC} \vdash A; \\ \mathbf{ur}_N^V A &\Longrightarrow \text{CPC} \vdash A; \\ \mathbf{ur}^V A &\Longrightarrow \text{CPC} \vdash A. \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Существует  $PR$ -реализуемое относительно  $A$ -оценок высказывание языка  $LP$ , которое не выводимо в исчислении  $CPC$ .

В разделе 3.3 исследуется вопрос о соотношении между выводимостью в интуиционистском исчислении предикатов  $IPC$  и введенными выше семантиками реализуемости.

**Теорема 6.** Пусть  $V \in \mathcal{C}_L$ . Тогда высказывание

$$\forall x ((\top \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x))$$

не является абсолютно  $V$ -реализуемым в области  $N$ .

**Теорема 7.** Пусть  $V \in \mathcal{C}_L$ . Тогда найдется такое выводимое в исчислении  $IPC$  высказывание языка  $LP$ , которое не является (равномерно) абсолютно  $V$ -реализуемым (в области  $N$ ).

Исследуется вопрос о корректности принципа Маркова относительно введенных семантик реализуемости.

**Теорема 8.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$ . Тогда высказывание

$$\forall x (\top \rightarrow P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

является абсолютно  $V$ -реализуемым.

**Теорема 9.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$ . Тогда высказывание

$$\forall x (\top \rightarrow P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

не является равномерно абсолютно  $V$ -реализуемым.

**Теорема 10.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \neq PR$ . Тогда высказывание

$$\forall x (\top \rightarrow P(x) \vee \neg P(x)) \rightarrow (\neg \neg \exists x P(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

равномерно абсолютно  $V$ -реализуемо в области  $N$ .

Теоремы 8, 10 дают следующий результат.

**Теорема 11.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \neq \text{PR}$ . Существует такое высказывание языка  $\text{LP}$ , которое не выводимо в исчислении  $\text{IPC}$ , однако является абсолютно  $V$ -реализуемым и равномерно абсолютно  $V$ -реализуемым в области  $\mathbb{N}$ .

В разделе 3.5 приводится аксиоматика так называемой базисной логики, более слабой, чем изучавшиеся ранее конструктивные логики. Базисная логика введена в работах А. Виссера<sup>20</sup>, В. Руйтенбурга<sup>21</sup> и М. Ардешира<sup>22</sup>. По сравнению с интуиционистской логикой, в базисной логике ослабляется правило вывода  $\text{Modus Ponens}$  (в частности, в базисной логике из  $\top \rightarrow A$  не выводится  $A$ ).

Раздел 3.6 посвящен доказательству следующей теоремы.

**Теорема 12.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \neq \text{PR}$ . Всякая замкнутая формула языка  $\text{LP}$ , выводимая в исчислении  $\text{BQC}$ , является равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой.

**Глава 4** посвящена исследованию понятия реализуемости для формул языка теории множеств.

В разделе 4.1 определяется язык теории множеств  $\text{LS}$ . Формулы этого языка строятся обычным образом из атомов и логических констант  $\perp$ ,  $\top$  при помощи логических связок  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  и кванторов  $\forall$ ,  $\exists$ .

В разделе 4.2 определяется множество  $\Delta \subseteq \mathbb{N}$ , называемое универсумом. Вводятся обозначения:  $J_{0,2} \rightleftharpoons$  множество всех  $\Delta_1^1$ -индексов всех двухместных гиперарифметических отношений,  $D_z(x_1, x_2) \rightleftharpoons$  гиперарифметическое отношение,  $\Delta_1^1$ -индекс которого есть  $z$ . Посредством трансфинитной индукции для каждого ординала  $\alpha$  определяется множество  $\Delta_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha &\rightleftharpoons \{z \in J_{0,2} \mid \neg \exists s \exists x D_z(s, x)\}, \text{ если } \alpha = 0; \\ \Delta_\alpha &\rightleftharpoons \{z \in J_{0,2} \mid \forall s, x (D_z(s, x) \rightarrow x \in \Delta_\beta)\}, \text{ если } \alpha = \beta + 1; \\ \Delta_\alpha &\rightleftharpoons \bigcup_{\beta < \alpha} \Delta_\beta, \text{ если } \alpha \text{ — предельный ординал.} \end{aligned}$$

Множество  $\Delta$  есть объединение всех множеств  $\Delta_\alpha$ , для которых ординал  $\alpha$  конечен либо счетен.

В разделе 4.3 для всех  $V \in \mathcal{C}$  индукцией по количеству логических символов в замкнутой формуле  $\Phi$  языка теории множеств, расширенного константами из  $\Delta$ , определяется условие «натуральное число  $e$   $V$ -реализует  $\Phi$  в универсуме  $\Delta$ » (обозначение:  $e \mathbf{r}_\Delta^V \Phi$ ):

<sup>20</sup>A. Visser, *A propositional logic with explicit fixed points*. Studia Logica, 1981, 40, p. 155 — 175.

<sup>21</sup>W. Ruitenburg, *Basic Logic and Fregean set theory*. H. Barendregt, M. Bezem, J. W. Klop (eds.), Dirk Van Dalen Festschrift, Quaestiones Infinityae, Department of Philosophy, Utrecht University, 1993, vol.5, p. 121 — 142.

<sup>22</sup>M. Ardeschir, *A Translation of Intuitionistic Predicate Logic into Basic Predicate Logic*. Studia Logica, 1999, 62, p. 341 — 352.

- неверно  $e \mathbf{r}_\Delta^V \perp$ ;
- верно  $e \mathbf{r}_\Delta^V \top$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V (a = b) \Leftrightarrow [a = b]$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V (a \in b) \Leftrightarrow D_b(e, a)$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V (\Phi \wedge \Psi) \Leftrightarrow [p_1 e \mathbf{r}_\Delta^V \Phi \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_\Delta^V \Psi]$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V (\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow [(p_1 e = 0 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_\Delta^V \Phi) \text{ или } (p_1 e = 1 \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_\Delta^V \Psi)]$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V \exists x \Phi(x) \Leftrightarrow [p_1 e \in \Delta \text{ и } p_2 e \mathbf{r}_\Delta^V \Phi(p_1 e)]$ ;
- $e \mathbf{r}_\Delta^V \forall x_1, \dots, x_n (\Phi(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \Psi(x_1, \dots, x_n)) \Leftrightarrow$   
 $[e \in l_{n+1}^V \text{ и для всех натуральных чисел } s \text{ и } a_1, \dots, a_n \in \Delta, \text{ если}$

$$s \mathbf{r}_\Delta^V \Phi(a_1, \dots, a_n),$$

то определено  $\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s)$  и имеет место

$$\varphi_e^{V, n+1}(a_1, \dots, a_n, s) \mathbf{r}_\Delta^V \Psi(a_1, \dots, a_n)],$$

если  $n \geq 0$ ;

- $e \mathbf{r}_\Delta^V \forall x_1, \dots, x_n \Phi \Leftrightarrow [e \mathbf{r}_\Delta^V \forall x_1, \dots, x_n (\top \rightarrow \Phi)]$ , если  $n > 0$ , формула  $\Phi$  не начинается с квантора  $\forall$ , и логическая связка  $\rightarrow$  не является главной в  $\Phi$ .

Замкнутая формула  $\Phi$  языка теории множеств называется  $V$ -реализуемой в универсуме  $\Delta$  (обозначение:  $\mathbf{r}_\Delta^V \Phi$ ), если имеет место  $e \mathbf{r}_\Delta^V \Phi$  для некоторого натурального числа  $e$ .

В разделе 4.4 описываются аксиоматические теории множеств ZF, IZF, CZF. Аксиоматика ZF содержит все аксиомы и правила вывода классического исчисления предикатов с равенством, а также следующие аксиомы: объемности (Ext), пустого множества ( $\emptyset$ ), бесконечности (Inf), пары (Pair), суммы (Un), степени (Pow), регулярности (Reg), и схемы аксиом: свёртывания ( $\text{Sep}_\Phi$ ) и замещения ( $\text{Rep}_\Phi$ ).

Интуиционистская теория множеств IZF<sup>23</sup> получается из ZF заменой классической логики на интуиционистскую, аксиомы регулярности (Reg) на схему аксиом трансфинитной индукции ( $\text{Ind}_\Phi$ ), и схемы аксиом замещения ( $\text{Rep}_\Phi$ ) на схему аксиом собирания ( $\text{Coll}_\Phi$ ).

Конструктивная теория множеств CZF введена в работе <sup>24</sup>. Теория CZF отличается от IZF тем, что в CZF аксиома (Pow) ослабляется до схемы аксиом ( $\text{SubsetColl}_\Phi$ ), схема аксиом ( $\text{Coll}_\Phi$ ) усиливается до схемы аксиом ( $\text{StrColl}_\Phi$ ), а схему аксиом ( $\text{Sep}_\Phi$ ) разрешается использовать только для формул  $\Phi$  с ограниченными кванторами.

Теория CZF<sup>-</sup> определяется как CZF без аксиомы (Ext). Модификация теории CZF<sup>-</sup>, в которой вместо интуиционистской логики используется базисная, обозначается так: CZF<sub>B</sub><sup>-</sup>.

<sup>23</sup>Н. Friedman. *The consistency of classical set theory relative to a set theory with intuitionistic logic*. Journal of Symbolic Logic, 1973, **38**, 315–319.

<sup>24</sup>Р. Aczel. *The type theoretic interpretation of constructive set theory*. Log. Coll. 1978, **77**, 55–66.

В разделе 4.5 исследуется вопрос о корректности аксиом теории ZF относительно реализуемости.

**Теорема 13.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \neq \text{PR}$ . Тогда следующие аксиомы теории ZF являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta: (\emptyset), (\text{Inf}), (\text{Pair}), (\text{Un})$ .

**Теорема 14.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $V \preceq \mathbb{N}$ . Тогда следующие аксиомы теории ZF не являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta: (\text{Ext}), (\text{Pow}), (\text{Reg})$ .

В разделе 4.6 исследуется вопрос о корректности аксиом теории IZF относительно реализуемости.

**Теорема 15.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $\mathbb{R} \preceq V \preceq \mathbb{N}$ . Следующие аксиомы и схемы аксиом теории IZF являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta: (\emptyset), (\text{Inf}), (\text{Pair}), (\text{Un}), (\text{Coll}_\Phi), (\text{Ind}_\Phi)$ .

**Теорема 16.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$ . Следующие аксиомы теории IZF не являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta: (\text{Ext}), (\text{Pow})$ .

В разделе 4.7 исследуется вопрос о корректности теорий  $\text{CZF}^-$  и  $\text{CZF}_B^-$  относительно реализуемости.

**Теорема 17.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $\mathbb{R} \preceq V \ll \mathbb{N}$ . Все теоретико-множественные аксиомы теории  $\text{CZF}^-$  являются  $V$ -реализуемыми в универсуме  $\Delta$ .

**Теорема 18.** Пусть  $V \in \mathcal{C}$  и  $\mathbb{R} \preceq V \ll \mathbb{N}$ . Всякое высказывание языка  $\text{LS}$ , выводимое в теории  $\text{CZF}_B^-$ , является  $V$ -реализуемым в универсуме  $\Delta$ .

**Теорема 19.** Пусть  $V \in \mathcal{C}_\mathbb{R}$  и  $\mathbb{R} \preceq V \ll \mathbb{N}$ . Всякое высказывание языка  $\text{LS}$ , выводимое в теории  $\text{CZF}^-$ , является  $V$ -реализуемым в универсуме  $\Delta$ .

**Теорема 20.** Пусть  $V \in \mathcal{C}_\mathbb{L}$  и  $V \ll \mathbb{N}$ . Найдется выводимое в теории  $\text{CZF}^-$  высказывание языка  $\text{LS}$ , которое не является  $V$ -реализуемым в универсуме  $\Delta$ .

## Заключение

В этом разделе мы опишем возможные обобщения основных результатов диссертации и пути дальнейшего исследования.

В диссертации установлена корректность базисной логики относительно равномерной абсолютной  $V$ -реализуемости, когда  $V \in \mathcal{C} \setminus \{\text{PR}\}$ . Интересно получить аналогичный результат для случая  $V = \text{PR}$ .

В диссертации для каждого  $V \in \mathcal{C} \setminus \{\text{PR}\}$  приводится пример предикатной формулы, которая не выводится в базисной логике, однако является абсолютно  $V$ -реализуемой и равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой в области  $\mathbb{N}$ . Интересно найти предикатную формулу, которая дополнительно к этому была бы равномерно абсолютно  $V$ -реализуемой.



В диссертации доказано, что при некотором условии на  $V$ , если формула  $\Phi(x)$  языка теории множеств есть формула с ограниченными кванторами, то высказывание  $(\text{Ser}_\Phi)$  является  $V$ -реализуемым в универсуме  $\Delta$ . Интересно показать, что высказывание  $(\text{Ser}_\Phi)$  не обязано быть  $V$ -реализуемым, если  $\Phi(x)$  не есть формула с ограниченными кванторами.

Наряду с универсумом  $\Delta$  может быть дано общее определение универсума. А именно, *универсумом* назовем непустое множество  $\Omega \subseteq \mathbb{N}$  вместе с отношением  $E^\Omega$  на  $\mathbb{N} \times \Omega \times \Omega$ . При таком подходе отношение  $E^\Delta$  определяется так:  $E^\Delta(s, x, y) \equiv D_y(s, x)$ . По аналогии с  $V$ -реализуемостью в универсуме  $\Delta$  можно определить  $V$ -реализуемость в произвольном универсуме  $\Omega$ , положив  $e \text{ r}_\Omega^V (a \in b) \equiv E^\Omega(e, a, b)$ . В диссертации доказано, что при определенных условиях на  $V$  конструктивная теория множеств без аксиомы объемности корректна относительно  $V$ -реализуемости в универсуме  $\Delta$ . Интересен поиск других универсумов  $\Omega$ , для которых некоторые из известных теоретико-множественных аксиоматических систем были бы корректны относительно  $V$ -реализуемости в универсуме  $\Omega$ .

## Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Валерию Егоровичу Плиско за постановку задачи, постоянное внимание, поддержку в работе, обсуждения и ценные советы.

Автор благодарен В. Б. Шехтману, В. Н. Крупскому, Л. Д. Беклемишеву, Т. Л. Яворской и другим сотрудникам кафедры математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за преподавание основ математической логики и стимулирующее общение.

Автор благодарен всему составу Механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за создание плодотворной обстановки для учебной и научной деятельности.

Автор выражает благодарность своему школьному учителю математики Лилии Николаевне Пановой, которая пробудила в нем интерес к занятию математической логикой.

Автор благодарен протоиерею Сергию Правдолюбову, иерею Владимиру Мандзюк-Ильницкому, иерею Максиму Крижевскому и всему приходу Храма Живоначальной Троицы в Троице-Голенищеве за поддержку.

## Публикации автора по теме диссертации

- [1] А. Ю. Коновалов. *Понятие арифметической реализуемости*. Восьмые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф., Москва, 19-21 июня 2013 г.
- [2] А. Ю. Коновалов, В. Е. Плиско. *О гиперарифметической реализуемости*. Матем. заметки, 2015, т. 98, № 5, стр. 725—746. (основные результаты принадлежат лично А. Ю. Коновалову; постановка задачи и определения принадлежат В. Е. Плиско.) [DOI:10.4213/mzm10735](https://doi.org/10.4213/mzm10735).
- [3] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и базисная логика*. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2016, № 1, стр. 52–56. [DOI:10.3103/S0027132216010071](https://doi.org/10.3103/S0027132216010071).
- [4] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и примитивно-рекурсивная реализуемость*. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2016, № 4, стр. 60–64. [DOI:10.3103/S0027132216040069](https://doi.org/10.3103/S0027132216040069).
- [5] А. Ю. Коновалов. *Семантика реализуемости для конструктивной теории множеств, основанная на гиперарифметический предикатах*. Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., 2017, № 3, стр. 59–62. [DOI:10.3103/S0027132217030068](https://doi.org/10.3103/S0027132217030068).
- [6] A. Yu. Konovalov, V. E. Plisko. *Realizability Semantics for the Predicate Formulas Based on Generalized Computability*. Десятые Смирновские чтения: материалы Междунар. науч. конф., Москва, 15-17 июня 2017 г.