

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Колмаков Евгений Александрович

Предикаты доказуемости и  
связанные с ними алгебры

Специальность 01.01.06 —  
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научный руководитель: **Беклемишев Лев Дмитриевич**,  
доктор физико-математических наук, академик РАН

Официальные оппоненты: **Калимуллин Искандер Шагитович**,  
доктор физико-математических наук, доцент, ФГАУО ВО  
Казанский (Приволжский) федеральный университет, ин-  
ститут математики и механики им. Н. И. Лобачевского,  
НОМЦ ПФО, главный научный сотрудник

**Одинцов Сергей Павлович**,  
доктор физико-математических наук, ФГБУН Институт  
математики им. С. Л. Соболева СО РАН, лаборатория ло-  
гических систем, ведущий научный сотрудник

**Кудинов Андрей Валерьевич**,  
кандидат физико-математических наук, ФГБУН Институт  
проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,  
Лаборатория №13 «Алгебра и теория чисел», старший на-  
учный сотрудник

Защита состоится 19 ноября 2021 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08, 13-24.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме защиты можно ознакомиться на сайте ИАС «Истина»:

<https://istina.msu.ru/dissertations/393170120>

Автореферат разослан 19 октября 2021 года.

Ученый секретарь диссертационного  
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ  
д.ф.-м.н., доцент

Чирский Владимир Григорьевич

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы и степень её разработанности

Изучение понятия доказуемости в формальных теориях является одной из центральных задач такой области математической логики, как теория доказательств. Фундаментальная работа<sup>1</sup> К. Гёделя, содержащая знаменитые теоремы о неполноте формальных систем, оказала колоссальное влияние на математическую логику в целом и, в частности, послужила отправной точкой для исследований самого понятия доказуемости. Уже в небольшой заметке<sup>2</sup> Гёделя прослеживается аксиоматический подход к этой проблеме. Доказательства первой и, в особенности, второй теорем Гёделя о неполноте базируются на использовании некоторых свойств предиката доказуемости, т. е. конкретной формулы, выражающей понятие доказуемости в формальной теории в её собственном языке, которые могут быть доказаны в рамках рассматриваемой формальной системы. Многие из этих свойств могут быть естественным образом выражены с использованием языка пропозициональной модальной логики, который расширяет язык обычной пропозициональной логики дополнительной унарной связкой  $\Box$ , а формула  $\Box\varphi$  интерпретируется как формализация утверждения о доказуемости формулы  $\varphi$  в рассматриваемой формальной системе. При таком прочтении, например, модальная формула  $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$  является выражением логического правила *modus ponens*: если доказуема импликация  $\varphi \rightarrow \psi$  и её посылка  $\varphi$ , то доказуемо и заключение  $\psi$ .

Указанный подход, заключающийся в применении методов модальной логики для изучения понятия доказуемости, оказался крайне плодотворным и привёл к возникновению такой области теории доказательств, как логика доказуемости. Первым важным шагом в исследовании понятия доказуемости модальными средствами была формулировка Д. Гильбертом и П. Бернайсом<sup>3</sup> набора условий на предикат доказуемости для формальной теории  $T$ , достаточных для того, чтобы для  $T$  были бы верны теоремы Гёделя о неполно-

---

<sup>1</sup> Gödel K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I // Monatsh. Math. Phys. — 1931. — V. 38. — № 1. — P. 173–198.

<sup>2</sup> Gödel K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls // Ergebnisse Math. Kolloq. — 1933. — V. 4. — P. 39–40. English translation in: S. Feferman et al., editors. Kurt Gödel Collected Works. Oxford University Press, Oxford, Clarendon Press, New York. — 1986. — V. 1. — P. 301–303.

<sup>3</sup> Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik, Vols. I and II, 2d ed. — Springer-Verlag, Berlin, 1968.

те. Однако не все из предложенных условий укладывались в рамки модального подхода. Впоследствии М. Лёб<sup>4</sup>, переформулировав условия Гильберта и Бернайса, получил более естественный достаточный набор требований к предикату доказуемости, известных как условия Гильберта–Бернайса–Лёба, которые по существу были переводами некоторых модальных формул (одна из них была упомянута выше и соответствует правилу *modus ponens*), а также обнаружил новый арифметически корректный модальный принцип  $\Box(\Box\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \Box\varphi$ . Модальная логика, аксиоматизируемая этим набором принципов, называется логикой Гёделя–Лёба и обозначается **GL**. Одним из центральных результатов в логике доказуемости является знаменитая теорема Р. Соловея об арифметической полноте<sup>5</sup>, которая устанавливает тот факт, что для любой формальной теории  $T$  (из достаточно широкого класса теорий) набор выразимых (в указанном выше смысле) модальными формулами принципов о предикате доказуемости теории  $T$ , доказуемых средствами самой теории  $T$ , в точности задаётся модальной логикой **GL**. Результаты Соловея естественным образом привели к изучению так называемых пропозициональных логик доказуемости, соответствующих набору принципов о предикате доказуемости одной теории  $U$ , которые могут быть установлены средствами другой теории  $T$ , а предложенная им техника, в итоге, позволила получить полную классификацию таких логик<sup>6</sup>.

Естественным продолжением исследований в этом направлении является изучение других предикатов доказуемости. Во-первых, нестандартных предикатов доказуемости, которые получаются при использовании “патологических” аксиоматизаций различных теорий или нестандартных способах построения формулы, выражающей понятие доказуемости. Среди таких пре-

---

<sup>4</sup> Löb M. H. Solution of a problem of Leon Henkin // The Journal of Symbolic Logic. — 1955. — V. 20. — P. 115–118.

<sup>5</sup> Solovay R. M. Provability interpretations of modal logic // Israel Journal of Mathematics — 1976. — V. 25. — P. 287–304.

<sup>6</sup> Беклемишев Л. Д. О классификации пропозициональных логик доказуемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1989. — Т. 53 — № 5. — С. 915–943.

дикатов можно выделить предикаты Россера<sup>7,8,9</sup>, Фефермана<sup>10,11,12</sup>, Париха<sup>13,14</sup>, предикаты замедленной доказуемости<sup>15,16,17</sup> и другие. Во-вторых, так называемых сильных предикатов доказуемости<sup>18</sup>, которые выражают доказуемость в теории, расширенной некоторым, вообще говоря, неперечислимым множеством истинных утверждений<sup>8</sup> или некоторыми (недопустимыми) правилами вывода<sup>19,20,21,22</sup> (например,  $\omega$ -правилом). Соловеем также рассматривались теоретико-множественные интерпретации  $\Box\varphi$ , связанные с пониманием доказуемости, как истинности  $\varphi$  в определенном классе внутренних моделей теории множеств<sup>20</sup>.

Многие недавние результаты в логике доказуемости и их применения для анализа арифметических теорий связаны с понятием  $n$ -доказуемости для  $n \in \mathbb{N}$ . Формула  $\varphi$  называется *1-доказуемой* в формальной арифметической теории  $T$ , если  $\varphi$  выводима из множества аксиом теории  $T$ , расширенного множеством всех истинных арифметических  $\Pi_1$ -предложений, т. е. предложений вида  $\forall x \delta(x)$ , где все вхождения кванторов в формулу  $\delta(x)$  являются ограниченными. Аналогично, используя более широкий класс  $\Pi_n$ -формул, вводится понятие  $n$ -доказуемости, которое может быть выражено арифме-

---

<sup>7</sup> Rosser J. B. Extensions of some theorems of Gödel and Church // The Journal of Symbolic Logic. — 1936. — V. 1. — P. 87–91.

<sup>8</sup> C. Smoryński. Self-Reference and Modal Logic. — Springer-Verlag, Berlin, 1985.

<sup>9</sup> Shavrukov V. Yu. On Rosser's provability predicate // Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math. — 1991. — V. 37. — P. 317–330.

<sup>10</sup> Feferman S. Arithmetization of metamathematics in a general setting // Fundamenta Mathematicae. — 1960. — V. 49. — P. 35–92.

<sup>11</sup> Visser A. Peano's smart children. A provability logical study of systems with built-in consistency // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1989. — V. 30. — P. 161–196.

<sup>12</sup> Shavrukov V. Yu. A smart child of Peano's // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1994. — V. 35. — P. 161–185.

<sup>13</sup> Parikh R. Existence and feasibility in arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. — 1971. — V. 36. — P. 494–508.

<sup>14</sup> Lindström P. The modal logic of Parikh provability // Tech. Rep. Filosofiska Meddelanden, Gröna Serien 5. — Univ. Göteborg. — 1994.

<sup>15</sup> Friedman S. D., Rathjen M., Weiermann A. Slow consistency // Annals of Pure and Applied Logic. — 2013. — V. 164. — № 3. — P. 382–393.

<sup>16</sup> Visser A. The second incompleteness theorem and bounded interpretations // Studia Logica. — 2012. — V. 100. — № 1–2. — P. 399–418.

<sup>17</sup> Henk P., Pakhomov F. Slow and ordinary provability for Peano arithmetic // arXiv:1602.01822. — 2016.

<sup>18</sup> Ignatiev K. N.. On strong provability predicates and the associated modal logics // The Journal of Symbolic Logic. — 1993. — V. 58. — P. 249–290.

<sup>19</sup> Boolos G. Omega-consistency and the diamond // Studia Logica. — 1980. — V. 39. — P. 237–243.

<sup>20</sup> Boolos G. The Logic of Provability. — Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

<sup>21</sup> Джапаридзе Г. К. Модально-логические средства исследования доказуемости. — Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ, 1986.

<sup>22</sup> Джапаридзе Г. К. Полимодальная логика доказуемости // Интенциональные логики и логическая структура теорий. — Тбилиси, Мецниереба. — 1988. — С. 16–48.

тической формулой, обычно обозначаемой  $[n]_T$ . Эта формула обладает основными свойствами стандартного гёделевского предиката доказуемости, то есть удовлетворяет условиям выводимости Гильберта–Бернаиса–Лёба, поэтому стандартное доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте также проходит для  $n$ -доказуемости. Таким образом, если теория  $T$  является  $n$ -непротиворечивой, то её  $n$ -непротиворечивость не является  $n$ -доказуемой в  $T$ .

Известно также, что предложение, выражающее  $n$ -непротиворечивость теории  $T$ , может быть выражено в терминах так называемых схем рефлексии, выражающих различные формы корректности формальной теории. Это связывает изучение понятия  $n$ -доказуемости с теорией трансфинитных рекурсивных прогрессий аксиоматических систем, основанных на итерации схем рефлексии, которая возникла в работах А. Тьюринга<sup>23</sup> и С. Фефермана<sup>24</sup>.

В логике доказуемости понятие  $n$ -доказуемости появилось в работе К. Сморолинского<sup>8</sup>, в которой он охарактеризовал логику Гёделя–Лёба **GL** как логику предиката  $n$ -доказуемости. Таким образом, обычная и сильная доказуемость обладают одним и тем же набором универсальных принципов, доказуемых в рассматриваемой формальной системе. К. Н. Игнатьев<sup>18</sup> вслед за Г. К. Джапаридзе<sup>21</sup> аксиоматизировал полимодальную логику предикатов  $n$ -доказуемости одновременно для всех  $n \in \mathbb{N}$ , обозначаемую **GLP**.

Понятие  $n$ -доказуемости впоследствии нашло несколько интересных приложений для изучения фрагментов арифметики Пеано **PA**. Оно было использовано<sup>25</sup> для характеристики фрагментов арифметики, определяемых беспараметрической индукцией, и для изучения сложности их аксиоматизации, классов доказуемо тотальных вычислимых функций и других свойств. Понятие  $n$ -доказуемости и модальная логика **GLP** также играют значительную роль в подходе к ординальному анализу арифметических систем на основе алгебр доказуемости<sup>26,27</sup>.

Хотя множество всех  $n$ -доказуемых формул (для  $n > 0$ ), вообще гово-

<sup>23</sup> Turing A. M. System of logics based on ordinals // Proc. London Math. Soc., ser. 2. — 1939. — V. 45. — P. 161–228.

<sup>24</sup> Feferman S. Transfinite recursive progressions of axiomatic theories // The Journal of Symbolic Logic. — 1962. — V. 27. — P. 259–316.

<sup>25</sup> Beklemishev L. D. Parameter free induction and provably total computable functions // Theoretical Computer Science. — 1999. — V. 224. — № 1–2. — P. 13–33.

<sup>26</sup> Beklemishev L. D. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I // Annals of Pure and Applied Logic. — 2004. — V. 128. — P. 103–123.

<sup>27</sup> Беклемишев Л. Д. Схемы рефлексии и алгебры доказуемости в формальной арифметике // УМН. — 2005. — Т. 60. — № 2. — С. 3–78.

ря, не является рекурсивно аксиоматизируемым, множество всех формул  $\varphi$ , для которых предложение  $[n]_S\varphi$  доказуемо в обычном смысле в заданной рекурсивно перечислимой метатеории  $T$ , является рекурсивно перечислимым. Это множество дедуктивно замкнуто и будет, в общем случае, расширением теории  $S$ , что вытекает из известного результата Феффермана<sup>24</sup> о том, что схема локальной рефлексии для теории  $S$  является 1-доказуемой в  $S$  (и его аналога для произвольного  $n > 1$ ). Отметим, что близкое, но более общее понятие возникало в работе М. Каи<sup>28</sup> в связи с исследованием так называемых степеней доказуемости, введённых в работах<sup>29,30</sup>. В работе подробно изучаются описанные множества доказуемо  $n$ -доказуемых формул и их свойства, а также находятся их описания в терминах известных схем.

Как отмечалось выше, понятие  $n$ -доказуемости тесно связано со *схемами рефлексии* — принципами, выражающими различные формы корректности формальной теории. Обычно, они имеют следующий вид: если формула  $\varphi$  доказуема в теории  $T$ , то она истинна (что неформально соответствует модальной формуле  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ ). При этом различные ограничения, налагаемые на синтаксическую структуру формулы  $\varphi$ , наличие в ней параметров, а также на само понятие доказуемости в  $T$ , приводят к различным принципам. Схемы рефлексии являются естественными обобщениями гёделевской формулы непротиворечивости и играют важную роль в применении логики доказуемости к анализу формальных теорий. Во-первых, с их помощью можно выразить многие другие естественные схемы такие, как различные формы индукции<sup>31,32,25</sup> и непротиворечивости<sup>33</sup>, что сводит анализ последних к анализу более близких к логике доказуемости схем рефлексии. Во-вторых, как было показано Г. Крайзелем и А. Леви<sup>34</sup>, они позволяют получать оценки на сложность аксиоматизации одних теорий над другими. Кроме того,

---

<sup>28</sup> Cai M. Higher unprovability. — 2015.

<sup>29</sup> Andrews U., Cai M., Diamondstone D., Lempp S., Miller J.S. On the structure of the degrees of relative provability // Israel Journal of Mathematics. — 2015. — V. 207. — P. 449–478.

<sup>30</sup> Cai M. Degrees of Relative Provability // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 2012. — V. 53. — № 4. — P. 479–489.

<sup>31</sup> Leivant D. The optimality of induction as an axiomatization of arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. — 1983. — V. 48. — № 1. — P. 182–184.

<sup>32</sup> Ono H. Reflection principles in fragments of Peano Arithmetic // Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math. — 1987. — V. 33. — № 4. — P. 317–333.

<sup>33</sup> Smoryński C.  $\omega$ -consistency and reflection // In Colloque International de Logique (Colloq. Int. CNRS), CNRS Inst. B. Pascal, Paris. — 1977. — P. 167–181.

<sup>34</sup> Kreisel G., Lévy A. Reflection principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems // Zeitschrift f. math. Logik und Grundlagen d. Math. — 1968. — V. 14. — P. 97–142.

схемы рефлексии являются удобным инструментом для изучения вопросов о консервативности между теориями и нахождения различных теоретико-доказательственных характеристик теорий<sup>35,36,27</sup>. Кроме хорошо изученных схем локальной и равномерной рефлексии в литературе также встречаются и другие варианты этих схем<sup>37</sup>, связанные с понятием определимого элемента, а также подобные варианты схем индукции<sup>38</sup>. В работе схемы рефлексии возникают естественным образом при исследовании описанного выше понятия доказуемой  $n$ -доказуемости, а также вводятся и изучаются новые модифицированные схемы рефлексии с определимыми параметрами.

Алгебраический подход к логике доказуемости был предложен Р. Магари<sup>39</sup>. Им был введён эквациональный класс алгебр, называемых *алгебрами Магари*, определимый тождествами, отражающими основные свойства предиката доказуемости данной формальной теории. С любой формальной теорией  $T$  можно связать конкретную алгебру Магари  $\mathfrak{D}_T$ , называемую *алгеброй доказуемости* теории  $T$ . Алгебра  $\mathfrak{D}_T$  определяется как  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$ , где  $\mathfrak{L}_T$  есть алгебра Линденбаума теории  $T$ , а  $\Box_T$  — унарный оператор, индуцируемый фиксированным предикатом доказуемости теории  $T$  естественным образом.

Упомянутая выше теорема Соловея<sup>5</sup> об арифметической полноте может быть переформулирована на алгебраическом языке следующим образом: для любой  $\Sigma_1$ -корректной формальной теории  $T$  эквациональная теория алгебры  $\mathfrak{D}_T$  аксиоматизируется пропозициональной модальной логикой Гёделя-

---

<sup>35</sup> Schmerl U. R. A fine structure generated by reflection formulas over Primitive Recursive Arithmetic // In M. Boffa, D. van Dalen, and K. McAloon, editors, Logic Colloquium'78, North Holland, Amsterdam. — 1979. — P. 335–350.

<sup>36</sup> Beklemishev L. D. Proof-theoretic analysis by iterated reflection // Archive for Mathematical Logic. — 2003. — V. 42. — P. 515–552.

<sup>37</sup> Kaye R., Kotlarski H. On Models Constructed by Means of the Arithmetized Completeness Theorem // Mathematical Logic Quarterly. — 2000. — V. 46. — № 4. — P. 505–516.

<sup>38</sup> Cordon-Franco A., Fernández-Margarit A., Lara-Martín F. F. On the optimality of conservation results for local reflection in arithmetic // The Journal of Symbolic Logic. — 2013. — V. 78. — № 4. — P. 1025–1035.

<sup>39</sup> Magari R. The Diagonalizable Algebras (the Algebraization of the Theories Which Express Theor.: II) // Bollettino della Unione Matematica Italiana — 1975. — Suppl. fasc. 3. — V. 4. — № 12. — P. 117–125.

Лёба GL. Усиленный равномерный вариант этой теоремы<sup>40,41,42,43,44</sup> также имеет краткую алгебраическую формулировку: свободная счётнопорожденная алгебра Магари вкладывается в алгебру доказуемости  $\mathfrak{D}_T$  теории  $T$ .

Наиболее сильные результаты об алгебрах доказуемости формальных теорий были получены В. Ю. Шавруковым<sup>45,46,47,48</sup>. Среди них неарифметичность полной первопорядковой теории алгебры доказуемости любой  $\Sigma_1$ -корректной теории  $T$  и неразрешимость её  $\forall^*\exists^*\forall^*\exists^*$ -фрагмента, полное описание рекурсивно перечислимых подалгебр  $\mathfrak{D}_T$  (впоследствии Д. Замбелла распространил этот результат на произвольные подалгебры), существование нетривиальных автоморфизмов алгебры  $\mathfrak{D}_T$ .

Шавруковым также были получены несколько важных результатов об изоморфизмах алгебр доказуемости<sup>45,47</sup>. Первый<sup>45</sup> из них — это достаточное условие отсутствия элементарной эквивалентности (а, значит, и изоморфизма) алгебр доказуемости двух  $\Sigma_1$ -корректных теорий. Отметим, что в силу результата С. Крипке и М. Пур-Эль<sup>49</sup> для достаточно широкого класса теорий  $T$  и  $S$  алгебры Линденбаума  $\mathfrak{L}_T$  и  $\mathfrak{L}_S$  рекурсивно изоморфны. Второй<sup>47</sup> — это достаточное условие существования (рекурсивного) изоморфизма между алгебрами  $\mathfrak{D}_T$  и  $\mathfrak{D}_S$ . Впоследствии Г. Адамссон<sup>50</sup> усилил результат Шаврукова в двух направлениях. Во-первых, было ослаблено само достаточное условие неизоморфизма, что позволило получить новые примеры пар теорий с неизо-

<sup>40</sup> Montagna F. On the diagonalizable algebra of Peano arithmetic // Bollettino della Unione Matematica Italiana. — 1979. — V. 16-B. — № 5. — P. 795–812.

<sup>41</sup> Artemov S. N. Extensions of arithmetic and modal logics. PhD thesis, Steklov Mathematical Institute, Moscow, 1979. In Russian.

<sup>42</sup> Visser A. Numerations,  $\lambda$ -calculus and arithmetic // In J.P. Seldin and J.R. Hindley, editors, To H.B. Curry. Essays on combinatory logic, lambda-calculus and formalism. Academic Press, London. — 1980. — P. 259–284.

<sup>43</sup> Boolos G. Extremely undecidable sentences // The Journal of Symbolic Logic. — 1982. — V. 47. — P. 191–196.

<sup>44</sup> Avron A. On modal systems having arithmetical interpretations // The Journal of Symbolic Logic. — 1984. — V. 49. — P. 935–942

<sup>45</sup> Shavrukov V. Yu. A note on the diagonalizable algebras of PA and ZF // Annals of Pure and Applied Logic. — 1993. — V. 61. — P. 161–173.

<sup>46</sup> Shavrukov V. Yu. Subalgebras of diagonalizable algebras of theories containing arithmetic // Dissertationes Mathematicae — 1993. — V. 323.

<sup>47</sup> Shavrukov V. Yu. Isomorphisms of diagonalizable algebras // Theoria. — 1997. — V. 63. — № 3. — P. 210–221.

<sup>48</sup> Shavrukov V. Yu. Undecidability in diagonalizable algebras // The Journal of Symbolic Logic. — 1997. — V. 62. — № 1. — P. 79–116.

<sup>49</sup> Pour-El M. B., Kripke S. Deduction-preserving “Recursive Isomorphisms” Between Theories // Fundamenta Mathematicae. — 1967. — V. 61. — P. 141–163.

<sup>50</sup> Adamsson G. Diagonalizable Algebras and the Length of Proofs // Magister-uppsats, Göteborgs universitet/Institutionen för filosofi, lingvistik och vetenskapsteori. — 2011.

морфными алгебрами, не попадающими под действие теоремы Шаврукова, и, во-вторых, показать, что это условие гарантирует отсутствие эпиморфизма из одной алгебры на другую. Стоит отметить, что условие, различающее элементарные теории алгебр доказуемости двух теорий, к которым применима теорема Шаврукова, имеет арифметическую (а не алгебраическую) природу и является переводом некоторого арифметического утверждения на язык модальных алгебр. Существование такого перевода также было установлено Шавруковым<sup>48</sup> и является технически сложным результатом. Обогащая сигнатуру алгебр доказуемости дополнительными операторами, можно ожидать наличия более алгебраического по своей природе свойства, отличающего алгебры различных теорий, и, соответственно, более простого доказательства неизоморфизма. Некоторые результаты такого типа были получены Беклемисевым<sup>51</sup>.

В работе мы продолжаем исследование вопросов изоморфизма алгебр доказуемости и, в частности, получаем дальнейшие усиления упомянутых результатов Шаврукова и Адамссона, строим новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами, а также получаем новые результаты о неизоморфизме бимодальных алгебр доказуемости.

## Цели и задачи работы

Работа нацелена на исследование различных предикатов доказуемости и связанных с ними алгебр доказуемости формальных теорий. Более точно, предполагается изучить свойства связанных с сильными предикатами доказуемости теорий, состоящих из формул, которые доказуемо  $n$ -доказуемы в рамках данной формальной системы, и их связь с известными схемами, расширяющими данную систему, в частности, с различными схемами рефлексии, а также исследовать вопрос о зависимости существования и несуществования изоморфизмов и эпиморфизмов алгебр доказуемости формальных теорий от различных характеристик этих теорий и их соотношений. В том числе планируется изучить аналогичные вопросы для бимодальных алгебр доказуемости.

Для достижения указанных целей в работе поставлены следующие задачи:

---

<sup>51</sup> Beklemishev L. D. Remarks on Magari algebras of PA and  $\text{ID}_0 + \text{EXP}$  // Logic and Algebra, P. Agilano, A. Ursini, eds. Marcel Dekker, New York. — 1996. — P. 317–325.

1. Найти рекурсивные аксиоматизации теорий, состоящих из доказуемо  $n$ -доказуемых формул в различных формальных теориях, в терминах известных схем и использовать полученные аксиоматизации для выяснения некоторых характеристик этих теорий таких, как, например, возможность конечной аксиоматизации, арифметическая сложность аксиоматизации, теоретико-доказательственный ординал и других. В частности, получить описание множества доказуемо  $n$ -доказуемых формул в арифметике Пеано.
2. Предложить новые модифицированные схемы рефлексии, связанные с понятием определимого элемента и изучить их связь с обычными схемами рефлексии.
3. Построить новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами доказуемости и выяснить, какие характеристики формальных теорий влияют на наличие изоморфизма. Исследовать вопрос о возможности усиления и границах применимости результатов Шаврукова об изоморфизмах алгебр доказуемости.
4. Исследовать возможность применения полученных результатов о характеристизации доказуемой 1-доказуемости для построения новых примеров пар теорий с изоморфными алгебрами доказуемости, но неизоморфными бимодальными алгебрами доказуемости.

## **Объект и предмет исследования**

Основным объектом исследования, проводимого в рамках диссертации, являются предикаты доказуемости в арифметических теориях и связанные с ними схемы рефлексии и алгебры доказуемости. В работе изучаются теории, связанные с понятием доказуемой  $n$ -доказуемости, новые варианты схем рефлексии с определимыми параметрами, а также вопросы изоморфизма алгебр доказуемости формальных теорий.

## **Научная новизна**

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены рекурсивные аксиоматизации теорий, состоящих из формул, которые доказуемо  $n$ -доказуемы в различных формальных теориях, в терминах итерированных схем локальной рефлексии для широкого класса арифметических теорий, в частности, для арифметики Пеано. На основе полученной характеристики установлено, что эти теории имеют неограниченную арифметическую сложность аксиоматизации, в частности, не являются конечно аксиоматизируемыми. Показано также, что в ряде случаев естественные аксиоматизации этих теорий приводят к суперэкспоненциальному ускорению доказательств по сравнению с найденными рекурсивными аксиоматизациями.
2. Введены новые варианты схем рефлексии с определимыми параметрами и установлена их связь с релятивизованными схемами локальной рефлексии, а также со схемами индукции с определимыми параметрами. На основе этих схем получено новое доказательство результата о консервативности между схемами равномерной и локальной рефлексии.
3. Найдена характеристика обобщенного варианта теоремы Фефермана (естественно возникающего при изучении понятия доказуемой 1-доказуемости) в терминах схем равномерной рефлексии.
4. Доказан усиленный вариант теоремы Шаврукова–Адамссона о неизоморфизме алгебр доказуемости формальных теорий. На основе полученного усиления построены новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами доказуемости.
5. С использованием полученных результатов о доказуемой 1-доказуемости найдены естественные примеры пар теорий с изоморфными алгебрами доказуемости, но неизоморфными бимодальными алгебрами доказуемости. Также с помощью доказанного усиления теоремы о неизоморфизме построено семейство пар теорий с такими алгебрами.

## **Теоретическая и практическая значимость**

Работа имеет теоретический характер. Полученные в работе результаты представляют интерес для специалистов в таких областях, как теория доказательств, логика доказуемости и формальная арифметика.

## Методы исследования

В работе использованы методы теории доказательств, логики доказуемости, формальной арифметики, теории моделей, теории алгоритмов и алгебры. В частности, при изучении понятия доказуемой  $n$ -доказуемости используется ряд стандартных методов из логики доказуемости таких, как рефлексивная индукция и формализация утверждений о консервативности и дедуктивной эквивалентности теорий, для характеристики схем рефлексии с определимыми элементами используются методы теории моделей арифметики, а при исследовании вопросов неизоморфизма бимодальных алгебр доказуемости применяется в том числе алгебраический аппарат.

## Положения, выносимые на защиту

1. Рекурсивные аксиоматизации теорий, состоящих из доказуемо  $n$ -доказуемых формул, в терминах итерированных схем локальной рефлексии для широкого класса арифметических теорий, в частности, для арифметики Пеано. Суперэкспоненциальное ускорение доказательств для исходных аксиоматизаций по отношению к найденным.
2. Определение частичных схем рефлексии с определимыми параметрами. Эквивалентность этих схем соответствующим вариантам релятивизованных схем локальной рефлексии и схем индукции с определимыми параметрами. Новое теоретико-модельное доказательство результата о консервативности между схемами равномерной и локальной рефлексии.
3. Характеризация обобщенного варианта теоремы Фефермана об 1-доказуемости схемы локальной рефлексии в терминах схемы равномерной  $\Sigma_2$ -рефлексии. Новая аксиоматизация теории  $I\Sigma_1$ .
4. Достаточное условие неизоморфизма алгебр доказуемости арифметических теорий. Новые примеры пар теорий с неизоморфными алгебрами доказуемости.
5. Примеры пар теорий с изоморфными алгебрами доказуемости, но неизоморфными бимодальными алгебрами доказуемости.

## Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты диссертации математически строго доказаны и изложены в 6 публикациях, из которых 4 научные статьи — в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и индексируемых в Web of Science, Scopus и RSCI [1, 2, 3, 4], 2 — в материалах конференций [5, 6]. Результаты работы докладывались на следующих научных семинарах и международных конференциях:

- 4-ая международная конференция по теории доказательств, модальной логике и принципам рефлексии (The 4th Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles, Wormshop 2017), Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия, 17–20 октября 2017 года;
- семинар “Теория доказательств” под руководством академика РАН Л. Д. Беклемишева, отдел математической логики, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 30 октября 2017 года;
- семинар “Алгоритмические вопросы алгебры и логики” под руководством академика РАН С. И. Адяна, механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, 10 апреля, 2018 года;
- XXV международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), 9–13 апреля, 2018 года; выступление отмечено грамотой за лучший доклад в секции “Математика и механика”;
- 1-ая международная летняя школа по теории доказательств (Proof Society Summer School), стендовая сессия, Гент, Бельгия, 2–5 сентября, 2018 года; автор является одним из победителей в номинации “Best poster award”;
- международная конференция по теории доказательств и её приложениям (Workshop on Proof Theory and its Applications), Гент, Бельгия, 6–7 сентября, 2018 года;

- 5-ая международная конференция по теории доказательств, модальной логике и принципам рефлексии (The 5th Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles, Wormshop 2019), Барселона, Испания, 5–8 ноября, 2019 года;
- XXVII международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых “Ломоносов” (секция “Математика и механика”, подсекция “Математическая логика, алгебра и теория чисел”), 10–27 ноября, 2020 года; выступление отмечено грамотой.

## Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём работы составляет 125 страниц. Список литературы содержит 65 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** к диссертации приводится обоснование актуальности темы работы, дается краткий обзор литературы и исследований по данной теме, формулируются постановки задач и основные результаты работы.

**Первая глава** посвящена изучению понятия доказуемой  $n$ -доказуемости. Характеризация теорий, состоящих из формул, утверждение об  $n$ -доказуемости которых в одной теории доказуемо в рамках другой метатеории, в терминах итерированных схем локальной рефлексии составляет основное содержание этой главы. В начале главы изучается случай базовой метатеории, а затем показывается, как распространить полученную характеристику на произвольную метатеорию сначала для  $n = 1$ , а затем и для произвольного  $n > 0$ . Полученные результаты затем используются в последующих главах. Также в первой главе доказывается, что полученные рекурсивные аксиоматизации рассматриваемых теорий приводят к так называемому “ускорению” выводов. Помимо этого, в начале главы вводятся основные понятия и обозначения, используемые в диссертации.

Для натурального числа  $n > 0$  формула  $\varphi$  называется  $n$ -доказуемой в теории  $S$ , если  $\varphi$  доказуема в обычном смысле в теории  $S$ , расширенной множеством всех истинных  $\Pi_n$ -предложений в качестве дополнительных аксиом.

Используя арифметическое определение истинности для класса  $\Pi_n$ -формул, это понятие можно выразить следующей арифметической формулой

$$[n]_S \varphi \Leftrightarrow \exists \pi (\text{Tr}_{\Pi_n}(\pi) \wedge \Box_S (\pi \rightarrow \varphi)),$$

которая называется *предикатом  $n$ -доказуемости* для теории  $S$ . Для заданного натурального числа  $n > 0$  и пары теорий  $T$  и  $S$  определим следующее множество формул

$$C_S^n(T) = \{\varphi \mid T \vdash [n]_S \varphi\},$$

т. е. формул, которые  $T$ -доказуемо  $n$ -доказуемы в  $S$ . Поскольку  $[n]_S$  удовлетворяет условиям Лёба, множество  $C_S^n(T)$  дедуктивно замкнуто и расширяет  $S$ . В частности, в силу так называемой *теоремы Феффермана*<sup>24</sup>, теория  $C_S^{n+1}(T)$  всегда содержит *релятивизованную схему локальной рефлексии* для теории  $S$ ,

$$\text{Rfn}^n(S) \equiv \{[n]_S \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \text{ — предложение}\}.$$

Изучение теорий  $C_S^n(T)$  составляет основное содержание первой главы.

В начале главы рассматривается случай базовой метатеории  $\text{EA}$  и доказывается следующий результат.

**Теорема 1.** *Доказуемо в  $\text{EA}^+$ ,  $C_S^{n+1}(\text{EA}) \equiv S + \text{Rfn}^n(S)$ .*

Затем изучается случай произвольной метатеории  $T$  и  $n = 1$ , т. е. понятие доказуемой 1-доказуемости. Впоследствии полученные результаты переносятся на случай произвольного  $n > 0$ .

Следующая теорема является одним из основных результатов данной главы и даёт естественную рекурсивную аксиоматизацию теорий  $C_S^{n+1}(T)$  в общем случае в терминах итерированных релятивизованных схем локальной рефлексии и так называемого  $\Sigma_{n+2}^0$ -ординала теории  $T$ , который определяется, как  $\sup\{\alpha \in D \mid \text{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}^n(\text{EA})_\alpha \subseteq T\}$ , где  $(D, <)$  есть некоторое фиксированное элементарное вполне упорядочение. Теория  $T$  называется  $\Sigma_{n+2}^0$ -регулярной, если существует ординал  $\alpha \in D$  такой, что теории  $T$  и  $\text{Rfn}_{\Sigma_{n+2}}^n(\text{EA})_\alpha$  доказывают одни и те же  $\Sigma_{n+2}$ -предложения.

**Теорема 2.** *Пусть  $T$  есть  $\Sigma_{n+2}^0$ -регулярная теория и  $|T|_{\Sigma_{n+2}^0} = \alpha$ , тогда  $C_S^{n+1}(T) \equiv \text{Rfn}^n(S)_{1+\alpha}$ .*

Полученная теорема сводит нахождение рекурсивной аксиоматизации теории  $C_S^{n+1}(T)$  к вычислению  $\Sigma_{n+2}^0$ -ординала теории  $T$ . Имеющиеся результаты<sup>52</sup> об этих ординалах для многих стандартных фрагментов арифметики приводят, в частности, к следующим характеристикам.

**Следствие 1.** *Для всех  $0 \leq n < m$ , в теории  $\mathbf{EA}^+$  доказуемы эквивалентности  $C_S^{n+1}(\mathbf{I}\Sigma_m) \equiv \mathbf{Rfn}(S)_{\omega_{m-n}}$  и  $C_S^{n+1}(\mathbf{PA}) \equiv \mathbf{Rfn}^n(S)_{\varepsilon_0}$ .*

Также в первой главе доказывается, что полученные рекурсивные аксиоматизации рассматриваемых теорий, вообще говоря, приводят к увеличению размера доказательств, т. е. доказательство 1-доказуемости формулы может быть существенно короче, чем её вывод с помощью схемы рефлексии. Более точно, мы показываем, что теория  $C_{\mathbf{EA}}(\mathbf{EA})$  имеет *суперэкспоненциальное ускорение* над  $\mathbf{EA} + \mathbf{Rfn}(\mathbf{EA})$ , т. е. существует последовательность предложений  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , элементарная функция  $p(n)$  и константа  $\varepsilon > 0$  такие, что для любого натурального  $n$  существует  $\mathbf{EA}$ -доказательство предложения  $[1]_{\mathbf{EA}}\varphi_n$  размера  $p(n)$ , но при этом не существует  $\mathbf{EA} + \mathbf{Rfn}(\mathbf{EA})$ -доказательства предложения  $\varphi_n$  размера, не превосходящего  $(2_n^1)^\varepsilon$ . В частности, не существует элементарной функции  $f(x)$ , осуществляющей преобразование  $\mathbf{EA}$ -вывода  $p$  формулы  $[1]_{\mathbf{EA}}\varphi$  в  $\mathbf{EA} + \mathbf{Rfn}(\mathbf{EA})$ -вывод  $f(p)$  формулы  $\varphi$ .

**Теорема 3.** *Исходная аксиоматизация теории  $C_{\mathbf{EA}}^1(\mathbf{EA})$  имеет суперэкспоненциальное ускорение над аксиоматизацией  $\mathbf{EA} + \mathbf{Rfn}(\mathbf{EA})$ .*

Во **второй главе** вводятся новые варианты схем рефлексии с определенными параметрами и устанавливается эквивалентность введенных схем, их локальных вариантов, а также соответствующих вариантов схем индукции с определенными параметрами. На этой основе приводится новое достаточно короткое теоретико-модельное доказательство результата о консервативности между схемами равномерной и локальной рефлексии. Используя результаты первой главы, устанавливается эквивалентность между обобщённой версией теоремы Фефермана об 1-доказуемости схемы локальной рефлексии и подходящим вариантом схемы равномерной рефлексии.

Схема равномерной  $\Sigma_k$ -рефлексии  $\mathbf{RFN}_{\Sigma_k}(T)$  состоит из формул вида  $\forall x (\Box_T \varphi(\underline{x}) \rightarrow \varphi(x))$ , где  $\varphi(x)$  есть  $\Sigma_k$ -формула. Если потребовать ограничения области значений параметра  $x$  только стандартными натуральными

<sup>52</sup> Beklemishev L. D., Visser A. On the limit existence principles in elementary arithmetic and  $\Sigma_n^0$ -consequences of theories // Annals of Pure and Applied Logic. — 2005. — V. 136. — № 1–2. — P. 56–74.

числами (т. е. нумералами), то полученная схема будет эквивалентна схеме локальной  $\Sigma_k$ -рефлексии  $\mathbf{Rfn}_{\Sigma_k}(T)$ . Мы изучаем вопрос о том, можно ли расширить область значений параметра  $x$  на нестандартные элементы, чтобы полученная схема рефлексии по-прежнему была эквивалентна локальной?

Формально, определим следующую *схему равномерной  $\Sigma_k$ -рефлексии с  $\Sigma_n$ -определимыми параметрами*  $\mathbf{RFN}_{\Sigma_k}^{K^n}(T)$ :

$$\forall x (\mathbf{Def}_\delta(x) \rightarrow (\Box_T \varphi(\underline{x}) \rightarrow \varphi(x))),$$

для каждой  $\Sigma_n$ -формулы  $\delta(x)$  и  $\Sigma_k$ -формулы  $\varphi(x)$ , где

$$\mathbf{Def}_\delta(x) \Leftrightarrow \delta(x) \wedge \forall y, z (\delta(y) \wedge \delta(z) \rightarrow y = z)$$

есть формула, выражающая тот факт, что элемент  $x$  определяется формулой  $\delta(y)$  (т. е. является единственным элементом, для которого эта формула истинна).

В этой главе мы доказываем эквивалентность введенных схем с определимыми параметрами и их локальных вариантов в следующем виде.

**Теорема 4.** *Для любых  $k > n \geq 0$ , схемы  $\mathbf{Rfn}_{\Sigma_k}^n(T)$  и  $\mathbf{RFN}_{\Sigma_k}^{K^{n+1}}(T)$  эквивалентны над теорией  $\mathbf{EA} + \mathbf{IS}_n^-$ .*

В частности, отсюда вытекает, что для каждого  $k > 0$  схема локальной  $\Sigma_k$ -рефлексии эквивалентна над  $\mathbf{EA}$  схеме  $\Sigma_k$ -рефлексии с  $\Sigma_1$ -определимыми параметрами.

Введенные варианты схем рефлексии и доказанная эквивалентность позволяют нам получить новое достаточно короткое теоретико-модельное доказательство следующей теоремы, которая является следствием так называемого *свойства редукции*, доказываемого в работе<sup>36</sup> с помощью синтаксического анализа выводов.

**Теорема 5.** *Если  $U$  есть  $\Pi_{n+2}$ -аксиоматизируемое расширение  $\mathbf{EA}$ , то*

$$U + \mathbf{RFN}_{\Sigma_{n+1}}(T) \equiv_{\Sigma_{n+2}} U + \mathbf{Rfn}_{\Sigma_{n+1}}^n(T).$$

Из доказанной в теореме 4 эквивалентности вытекает также эквивалентность введенной нами схемы равномерной  $\Sigma_{n+2}$ -рефлексии с  $\Sigma_{n+1}$ -опреде-

лимыми параметрами и схемы  $\Sigma_{n+1}$ -индукции с  $\Sigma_{n+1}$ -определимыми параметрами, введённой в работе<sup>38</sup>. Полученная эквивалентность является аналогом известных характеристиксхем индукции с параметрами<sup>31</sup> и без них<sup>25</sup> в терминах схем равномерной и локальной рефлексии.

В конце второй главы также устанавливается следующий результат, дающий характеристику схемы равномерной  $\Sigma_2$ -рефлексии  $\mathbf{RFN}_{\Sigma_2}(T)$  в терминах обобщённой версии теоремы Фефермана об 1-доказуемости локальной рефлексии. В доказательстве существенно используются найденные в первой главе аксиоматизации теорий  $C_S^1(T)$ .

**Теорема 6.** *Для любой  $\mathbf{EA}^+$ -доказуемо  $\Sigma_2^0$ -регулярной теории  $T$  с  $\Sigma_2^0$ -ординалом  $\alpha$ ,*

- (i)  $\mathbf{EA} + \mathbf{RFN}_{\Sigma_2}(T) \vdash \forall \varphi (\Box_{\mathbf{Rfn}(S)_{1+\alpha}} \varphi \rightarrow [1]_S \varphi),$
- (ii)  $\mathbf{EA} + \mathbf{B}\Sigma_1 + \neg[1]_S \perp + \forall \varphi (\Box_{\mathbf{Rfn}(S)_{1+\alpha}} \varphi \rightarrow [1]_S \varphi) \vdash \mathbf{RFN}_{\Sigma_2}(T).$

В частности, доказанная теорема позволяет получить альтернативную аксиоматизацию теории  $\mathbf{I}\Sigma_1$  в терминах теоремы Фефермана для теории  $\mathbf{EA}$ .

**Следствие 2.** *Следующие теории дедуктивно эквивалентны*

- (i)  $\mathbf{I}\Sigma_1,$
- (ii)  $\mathbf{EA} + \mathbf{RFN}_{\Sigma_2}(\mathbf{EA}),$
- (iii)  $\mathbf{EA}^+ + \mathbf{B}\Sigma_1 + \forall \varphi (\Box_{\mathbf{EA}+\mathbf{Rfn}(\mathbf{EA})} \varphi \rightarrow [1]_{\mathbf{EA}} \varphi).$

В **третьей главе** рассматриваются вопросы изоморфизма алгебр доказуемости. Основным результатом этой главы является усиленный вариант теоремы Шаврукова-Адамссона о неизоморфизме алгебр доказуемости формальных теорий. Рассматривается ряд примеров применения полученного усиленного результата к различным парам теорий, что позволяет получить новые примеры неизоморфизма. В конце главы изучаются вопросы изоморфизма бимодальных алгебр доказуемости формальных теорий. Строится несколько примеров пар теорий с изоморфными алгебрами доказуемости, но не изоморфными бимодальными алгебрами доказуемости.

С данной формальной теорией  $T$  можно связать так называемую *алгебру доказуемости*  $\mathfrak{D}_T$  теории  $T$ , которая устроена следующим образом. Пусть  $\mathfrak{L}_T$

есть алгебра Линденбаума теории  $T$ , её носителем является множество всех классов доказуемой эквивалентности в  $T$ , а булевы операции индуцируются с помощью соответствующих пропозициональных логических связок. Алгебра  $\mathfrak{D}_T$  определяется как  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$ , где  $\Box_T$  есть унарный оператор, индуцируемый предикатом доказуемости  $\text{Pr}_T(x)$  в теории  $T$ , т. е. формулой в языке теории  $T$ , выражающей, что формула с гёделевым номером  $x$  является теоремой теории  $T$ , следующим образом  $\Box_T[\varphi]_{\sim_T} = [\text{Pr}_T(\ulcorner \varphi \urcorner)]_{\sim_T}$ .

В этой главе мы получаем усиление результатов Шаврукова<sup>45</sup> и Адамссона<sup>50</sup> о неизоморфизме алгебр доказуемости, упомянутых во введении. В работе<sup>50</sup> вводится несколько функций, связанных с понятием “ускорения” доказательств при добавлении к теории  $T$  различных правил вывода (и других принципов), например, *правила Париха* (из  $\Box_T \psi$  вывести  $\psi$ ), и доказывается, что они имеют одинаковую скорость роста. Достаточное условие неизоморфизма, полученное Адамссоном<sup>50</sup>, формулируется в терминах так называемой *функции Париха* формальной теории. Мы рассматриваем тесно связанную с ней *функцию  $\Sigma_1$ -рефлексии*  $\mathcal{R}_T(x)$  теории  $T$ , также введенную в работе<sup>50</sup>, значение  $\mathcal{R}_T(x)$  которой есть наименьшая верхняя граница для минимальных свидетелей  $\Sigma_1$ -предложений, которые доказуемы в  $T$  доказательствами с гёделевыми номерами, не превосходящими  $x$ . Как отмечается в работе<sup>50</sup>, функция  $\mathcal{R}_T(x)$  близка к тому, чтобы быть доказуемо тотальной вычислимой функцией теории  $T$ , хотя и не является таковой.

В начале главы вводятся классы функций  $\mathcal{F}_T^k(U)$ , определение которых базируется на упомянутом наблюдении о функции  $\mathcal{R}_T(x)$ . Обозначим через  $\mathcal{F}_T(U)$  класс всех функций  $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  таких, что

$$U \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \Box_T (\exists y \psi_f(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n, y)),$$

для некоторой  $\Sigma_1$ -формулы  $\psi_f(x_1, \dots, x_n, y)$ , определяющей график функции  $f$  в стандартной модели. Аналогично определяются классы  $\mathcal{F}_T^k(U)$  и для произвольного  $k \geq 1$ , где используется итерированный предикат доказуемости  $\Box_T^{(k)}$  вместо  $\Box_T$ . Также естественно определить  $\mathcal{F}_T^0(U)$  как  $\mathcal{F}(U)$ .

Доказываются некоторые базовые свойства этих классов и их связь с функцией рефлексии  $\mathcal{R}_T(x)$ , которые играют важную роль в доказательстве следующей теоремы, являющейся центральным результатом этой главы. Эта теорема является усиленным вариантом результатов Шаврукова и Адамссона

о неформализме, а также имеет более общую формулировку, что достигается за счёт использования введенных выше классов  $\mathcal{F}_T^k(U)$ .

**Теорема 7.** Пусть  $T$  и  $S$  — теории со стандартными предикатами доказуемости  $\Box_T$  и  $\Box_S$ . Если существует эпиморфизм из алгебры  $\mathfrak{D}_T$  на алгебру  $\mathfrak{D}_S$ , то для каждого натурального  $k \in \mathbb{N}$  существует функция  $G(x) \in \mathcal{F}_S^{k+1}(\mathbf{EA})$ , которая не мажорируется никакой функцией  $F(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$ . Более точно, существует элементарная функция  $q(x)$  такая, что для каждого  $k \in \mathbb{N}$  и любой функции  $F(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$  следующее неравенство  $F(n) \leq \mathcal{R}_S^{(k+1)}(q(n))$  выполнено для бесконечно многих  $n \in \mathbb{N}$ .

Теорема 7 даёт несколько достаточных условий неформализма алгебр доказуемости, которые приводятся ниже.

**Следствие 3.** Каждое из следующих условий влечёт отсутствие эпиморфизмов из алгебры  $\mathfrak{D}_T$  на алгебру  $\mathfrak{D}_S$ ,

- (i)  $\mathcal{R}_S^{(k+1)}(x) \in \mathcal{F}_T^k(T)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\mathcal{F}_S^{k+1}(\mathbf{EA}) \subseteq \mathcal{F}_T^k(T)$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ ;
- (iii)  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1 (\Box_S \sigma \rightarrow \text{Tr}_{\Sigma_1}(\sigma))$  или  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1 \left( \Box_S^{(k+1)} \sigma \rightarrow \Box_T^{(k)} \sigma \right)$  для некоторого  $k \geq 1$ .

В главе рассматривается несколько примеров применения полученного усиленного результата к различным парам теорий. В частности, доказывається следующий результат.

**Следствие 4.** Для любых натуральных  $n > m \geq 1$  не существует эпиморфизма из алгебры  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T^{(n)})$  на алгебру  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T^{(m)})$ .

При  $n = 2$  и  $m = 1$  мы получаем, что не существует эпиморфизма из алгебры  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T \Box_T)$  на алгебру  $(\mathfrak{L}_T, \Box_T)$ , что подтверждает гипотезу из работы<sup>50</sup>. Кроме того, рассматриваются примеры теорий с неформальными алгебрами, которые, тем не менее близки, в частности, имеют одинаковые классы доказуемо тотальных вычислимых функций и доказуемо  $\Pi_1$ -эквивалентны. Также из теоремы 7 выводится следующая форма достаточного условия, которое, в отличие от условия Адамсона, имеет теоретико-доказательственную форму и является непосредственным обобщением условия Шаврукова.

**Теорема 8.** Если  $T \vdash \text{Rfn}_{\Sigma_1}(S)$ , и этот факт формализуется в следующем виде  $T \vdash \forall \sigma \in \Sigma_1 \square_T (\square_S \sigma \rightarrow \sigma)$ , то не существует эпиморфизма из алгебры  $\mathfrak{D}_T$  на алгебру  $\mathfrak{D}_S$ .

В конце главы рассматриваются вопросы изоморфизма бимодальных алгебр доказуемости формальных теорий. т.е. алгебр доказуемости, обогащенных дополнительным унарным оператором, индуцируемым на алгебре Линденбаума  $\mathfrak{L}_T$  теории  $T$  предикатом 1-доказуемости  $[1]_T$  по аналогии с  $\square_T$ . Обогащение сигнатуры естественным образом приводит к возможности различить между собой теории, не отличимые на уровне алгебр доказуемости, поэтому интерес представляют теории с изоморфными алгебрами доказуемости, но не изоморфными бимодальными алгебрами доказуемости.

Характеризации множеств доказуемо 1-доказуемых предложений для различных фрагментов арифметики, полученные в первой главе, позволяют получить следующий пример.

**Утверждение 1.** Бимодальные алгебры  $(\mathfrak{D}_{\text{IS}_1}, [1]_{\text{IS}_1})$  и  $(\mathfrak{D}_{\text{PRA}}, [1]_{\text{PRA}})$  неизоморфны, а их редукты  $\mathfrak{D}_{\text{IS}_1}$  и  $\mathfrak{D}_{\text{PRA}}$  изоморфны.

Обозначим через  $\mathcal{C}_T$  теорию  $\mathcal{C}_T(T)$ , состоящую из  $T$ -доказуемо 1-доказуемых в  $T$  предложений. Существенным моментом в доказательстве предыдущего утверждения является тот факт, что  $\mathcal{C}_{\text{PRA}}$  порождается однократной локальной рефлексией  $\text{Rfn}(\text{PRA})$ , а не какой-то её итерацией. Тем не менее, используя теорему 8 доказанную ранее в этой главе, мы обобщаем приведенный пример на случай, когда множество  $\mathcal{C}_S$  содержит итерацию схемы локальной рефлексии  $\text{Rfn}(S)$ , что приводит к следующему важному результату этой главы.

**Теорема 9.** Пусть для теорий  $T$  и  $S$  включение  $\text{Rfn}_{\Sigma_1}(\mathcal{C}_S) \subseteq \mathcal{C}_T$  имеет место доказуемо в  $\mathcal{C}_T$ . Тогда не существует эпиморфизма из  $(\mathfrak{D}_T, [1]_T)$  на  $(\mathfrak{D}_S, [1]_S)$ .

Из этой теоремы выводится упомянутое обобщение примера, приведенного в утверждении 1.

**Следствие 5.** Пусть  $T = U + \text{Rfn}_{\Sigma_2}(U)$  и  $S = U + \text{Rfn}_{\Sigma_1}(U)$  для некоторой теории  $U$ . Тогда не существует эпиморфизма из  $(\mathfrak{D}_T, [1]_T)$  на  $(\mathfrak{D}_S, [1]_S)$ , но  $\mathfrak{D}_T \cong \mathfrak{D}_S$ .

В **заключении** обсуждаются основные полученные в работе результаты и некоторые вопросы для дальнейших исследований, связанные с темой работы.

## Заключение

Несмотря на то что прошло достаточно много времени с момента обнаружения К. Гёделем феномена неполноты формальных систем — одного из центральных открытий в области математической логики и, в частности, теории доказательств, в результате которого возникла область логики доказуемости — изучение различных аспектов понятия доказуемости по-прежнему остается центральной задачей теории доказательств. В настоящей работе были затронуты лишь некоторые стороны этого многогранного и сложного понятия. Более точно, было изучено понятие доказуемой  $n$ -доказуемости, введены и исследованы новые варианты схем рефлексии, найдена новая характеристика схемы равномерной  $\Sigma_2$ -рефлексии в терминах обобщённой теоремы Фефермана, а также исследованы возможности усиления и границы применимости имеющихся на сегодняшний момент результатов об изоморфизмах алгебр доказуемости, в частности, построен ряд новых примеров, а также получены новые результаты о бимодальных алгебрах доказуемости.

Исследование, проведенное в рамках данной работы, и полученные результаты в очередной раз демонстрируют очень тесную связь и взаимодействие между различными вариантами понятия доказуемости и формами схем рефлексии, а также возможность применения этой связи в контексте алгебр доказуемости. Однако множество вопросов по-прежнему остаются открытыми и являются предметом для дальнейшего изучения. Среди них мы выделим лишь два вопроса, имеющие отношение к некоторым темам, затронутым в рамках данной работы. Первый из них — это вопрос о существовании вариантов схем рефлексии, эквивалентных над **EA** схемам коллекции, и более глобальная задача о нахождении и исследовании новых форм рефлексии и их связи с другими принципами и утверждениями. Второй вопрос представляет собой одну из наиболее известных открытых проблем в области логики доказуемости: изоморфны ли алгебры доказуемости теорий **PA** и **PA + Con(PA)**? В более общем виде этот вопрос касается нахождения новых методов доказательства изоморфизма и неизоморфизма алгебр доказуемости формальных

теорий, в частности, для случаев, когда одна теория является строгим  $\Pi_1$ -расширением другой.

## **Благодарности**

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику РАН Льву Дмитриевичу Беклемишеву за постановку задач, конструктивную критику, плодотворные обсуждения, всестороннюю поддержку и внимание к работе.

Автор благодарен Владимиру Юрьевичу Шаврукову за постановку некоторых вопросов, рассматриваемых в работе, а также ценные комментарии и замечания по математическому содержанию работы.

Автор также благодарен своим предыдущим научным руководителям Сергею Исаевичу Гурову (в бакалавриате) и Сергею Серафимовичу Марченкову (в магистратуре) за знакомство с теорией решёток и теорией алгоритмов, что впоследствии пробудило в нём интерес к занятию математической логикой.

Наконец, автор глубоко признателен своим родителям Ольге Васильевне и Александру Владимировичу за постоянную поддержку и создание комфортной обстановки для занятий научной деятельностью.

## **Публикации автора по теме диссертации**

**Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.06 — «Математическая логика, алгебра и теория чисел» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI**

1. Колмаков Е. А., Беклемишев Л. Д. Аксиоматизация доказуемой  $n$ -доказуемости // Доклады РАН. — 2018. — Т. 483. — № 3. — С. 244–248.

Англ. пер.: Kolmakov E. A., Beklemishev L. D. Axiomatizing provable  $n$ -provability // Doklady Mathematics. — 2018. — V. 98. — № 3. — P. 582–585.  
**Scopus, RSCI.** SJR 2018: 0,636.

Результаты разделов 3, 4 и 5 получены автором совместно с Л. Д. Беклемишевым, а результаты раздела 6 — автором.

2. Kolmakov E. A., Beklemishev L. D. Axiomatization of provable  $n$ -provability // The Journal of Symbolic Logic. — 2019. — V. 84. — № 2. — P. 849–869. **WoS, Scopus**. SJR 2019: 1,012.

Результаты разделов 3, 4 и 5 получены автором совместно с Л. Д. Беклемишевым, а результаты разделов 6 и 7 — автором.

3. Kolmakov E. Local reflection, definable elements and 1-provability // Archive for Mathematical Logic. — 2020. — V. 59. — P. 979–996. **WoS, Scopus**. SJR 2020: 0,618.

4. Колмаков Е. А. Об одном усилении теоремы о неизоморфизме алгебр доказуемости // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. — 2021. — Т. 499. — № 1. — С. 26–30.

Англ. пер.: Kolmakov E. A. On a strengthening of the non-isomorphism theorem for provability algebras // Doklady Mathematics. — 2021. — V. 104. — № 4. — P. 180–183. **Scopus, RSCI**. SJR 2020: 0,765.

## Другие публикации

5. Колмаков Е. А. Аксиоматизация доказуемой 1-доказуемости [Электронный ресурс] // Материалы XXV международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — Москва, 9–13 апреля 2018. — [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2018/data/13558/66136\\_uid89139\\_report.pdf](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13558/66136_uid89139_report.pdf) (дата обращения 25.04.2021).
6. Колмаков Е. А. Об изоморфизмах алгебр доказуемости формальных теорий [Электронный ресурс] // Материалы XXVII международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов”. — Москва, 10–27 ноября 2020. — [https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov\\_2020\\_2/data/19357/104125\\_uid89139\\_report.pdf](https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/19357/104125_uid89139_report.pdf) (дата обращения 25.04.2021).