Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
“Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)”

На правах рукописи

УДК 519.176, 519.179.1

Демидович Юрий Александрович

РАСКРАСКИ ГРАФОВ И ГИПЕРГРАФОВ В ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ КОМБИНАТОРИКЕ И КОМБИНАТОРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2021

Работа прошла апробацию на кафедре дискретной математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)”.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Шабанов Дмитрий Александрович

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Ведущая организация: Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
“Сколковский институт науки и технологий”

Защита состоится «24» декабря 2021 года в 14:00 на заседании диссертационного совета ФПМИ.01.01.09.012 по адресу 141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Московского физико-технического института (государственного университета):

`https://mipt.ru/education/post-graduate/soiskateli-fiziko-matematicheskie-nauki.php`

Работа представлена «25» июля 2021 г. в Аттестационную комиссию федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» для рассмотрения советом по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, доктора наук в соответствии с п. 3.1 ст. 4 Федерального закона «О науке и государственной научно-технической политике».

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация посвящена решению ряда экстремальных задач, лежащих на стыке центральных разделов дискретной математики — теории графов, теории гиперграфов и комбинаторной геометрии. Напомним основные определения.

Гиперграфом называется пара $H = (V, E)$, где V — некоторое конечное множество, а E — совокупность различных подмножеств множества V. Множество V обычно называют *множеством вершин*, а совокупность E — *множеством ребер* гиперграфа. Гиперграф называется *n-однородным*, если в каждом ребре содержится ровно n вершин. В частности, *граф* — это 2-однородный гиперграф. Раскраска вершин гиперграфа называется *правильной*, если все ребра гиперграфа являются неодноцветными. Хроматическим числом $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски множества вершин.

Экстремальные задачи о раскрасках гиперграфов впервые начали изучаться в классических работах Эрдеша с соавторами в 60-х годах 20-го века. В общем виде они имеют следующую формулировку:

найти минимально возможное значение определенной характеристики гиперграфа (максимальной степени вершины, числа ребер) в некотором классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r.

Несомненно, самой знаменитой задачей такого типа является проблема Эрдеша–Хайнала, согласно которой требуется найти минимально возможное количество ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r. Искомую величину обозначают через $m(n, r)$. Эта задача была поставлена в 1961 году[1], ей посвящены работы таких ученых, как Н. Алон, Л. Ловас, Й. Бек, Дж. Спенсер, П. Сеймур.

Именно в связи с изучением раскрасок гиперграфов были созданы важ-

[1] P. Erdős, A. Hajnal, "On a property of families of sets", *Acta Mathematica of the Academy Sciences*, Hungary, **12**:1-2 (1961), 87–123.

нейшие вероятностные инструменты, такие как, например, Локальная лемма, которые нашли применения в различных областях.

Задача имеет множество обобщений. Так, Д.А. Шабановым[2] было предложено изучать следующую величину. Пусть k — натуральное число. Будем называть раскраску вершин гиперграфа в r цветов k-правильной, если в каждом ребре содержится по крайней мере k вершин каждого из цветов. По аналогии с величиной $m(n,r)$ обозначим через $m_k(n,r)$ минимально возможное число ребер гиперграфа, у которого не существует k-правильной раскраски в r цветов. В случае, когда $r = 2$, обычно $m_k(n,2)$ обозначают просто через $m_k(n)$.

Подгиперграф H' гиперграфа $H = (V,E)$ называется *остовным*, если множество его вершин — V, а множество E' его ребер является подмножеством множества E. Д.А. Шабановым[3] было предложено еще одно обобщение задачи Эрдеша–Хайнала.

Введем величину $m_{k,\varepsilon}(n)$, равную минимальному числу ребер гиперграфа в классе n-однородных гиперграфов, у которого любой остовный подгиперграф с $|E'| \geq (1-\varepsilon)|E|$ не имеет k-правильной раскраски. При $\varepsilon = 0$ имеем $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$. И вообще, легко показать, что при $\varepsilon < \frac{1}{m_k(n)}$ выполняется равенство $m_{k,\varepsilon}(n) = m_k(n)$.

Еще одно направление исследований диссертации связано с раскрасками случайных гиперграфов в классической биномиальной модели $H(n,k,p)$, $n > k \geqslant 2$, $n,k \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$. В этой модели каждое подмножество из k вершин некоторого n-элементного множества случайно и независимо от остальных с вероятностью p включается в множество ребер гиперграфа. Величина p может являться функцией от числа вершин $p = p(n)$. Отметим, что при $k = 2$ модель $H(n,k,p)$ представляет собой классическую модель случайного графа Эрдеша–Реньи $G(n,p)$. Случайный граф $G(n,p)$ является одним из основных объектов изучения в вероятностной комбинаторике, его систематическое исследование началось с классических статей П. Эрдеша и А. Реньи[4][5]. Вышло множество работ, посвященных свойствам и характеристикам случайного графа $G(n,p)$. Основные результаты сформировавшейся

---

[2]Д.А. Шабанов, “Об одной комбинаторной задаче Эрдеша”, *Доклады Академии Наук*, **396**:2 (2004), 166–169.

[3]Д.А. Шабанов, “Экстремальные задачи для раскрасок равномерных гиперграфов”, *Известия Российской Академии Наук, Серия математическая*, **71**:6 (2007), 183–222.

[4]P. Erdos, A. Renyi, “On random graphs I”, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **6** (1959), 290–297.

[5]P. Erdos, A. Renyi, “On the evolution of random graphs”, Publications of the Mathematical Institute of of the Hungarian Academy of Sciences, **5**:1-2 (1960), 17–61.

в настоящее время теории могут быть найдены в книгах[6][7][8].

Одним из наиболее важных вопросов теории случайных гиперграфов является задача о нахождении распределения хроматического числа гиперграфа. Поиск точного распределения крайне труден, и исследуют предельные распределения. Настоящая диссертация будет посвящена в частности решению задачи об асимптотическом распределении хроматических чисел случайных гиперграфов.

Задача о поиске асимптотического распределения хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ была поставлена П. Эрдешем еще в 60-е годы XX века. В случае постоянного p данная задача была решена Б. Боллобашем[9]. Для $p = o(n)$ аналогичный результат был получен Т. Лучаком[10]. Большое количество работ посвящено случаю $np = c = const$. В этом случае хроматическое число ограничено с вероятностью, стремящейся к 1. В связи с этим задачу можно переформулировать в проблему поиска порогового значения $c(r)$, до которого хроматическое число не будет превосходить заданное значение r с вероятностью, стремящейся к 1. В настоящее время точные значения пороговой величины не найдены, но известны достаточно близкие оценки.

Первые нижние и верхние оценки порогового значения c для гиперграфов в случае $p = cn/\binom{n}{k}$ были получены Н. Алоном и Дж. Спенсером в неопубликованной работе. Они оценивали пороговую вероятность наличия правильной двухцветной раскраски. Их результат последовательно улучшался Д. Ахлиоптасом, Дж. Кимом, М. Кривелевичем и П. Тетали[11], Д. Ахлиоптасом и К. Муром[12], А. Койя-Огланом и Л. Здеборовой[13] и, наконец, наилучший результат получили А. Койя-Оглан и К. Панайоту[14].

В случае, когда $np \gg 1$, Э. Шамир и Дж. Спенсер[15] доказали, что хро-

[6]S. Janson, T. Luczak, A. Rucinski, “Random Graphs”, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley–Interscience, New York, 2000.

[7]B. Bollobas, “Random graphs”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2001.

[8]A. Frieze, M. Karonski, “Introduction to random graphs”, *Cambridge University Press*, Cambridge, 2015.

[9]B. Bollobas, “The chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **8**:1 (1988), 49–56.

[10]T. Łuczak, “A note on the sharp concentration of the chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **11**:3 (1991), 295–297.

[11]D. Achlioptas, J.H. Kim, M. Krivelevich, P. Tetali, “Two-coloring random hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **20**:2 (2002), 249–259.

[12]D. Achlioptas, C. Moore, “The asymptotic order of the random k-SAT threshold,” The 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2002. Proceedings., Vancouver, BC, 2002, 779–788.

[13]A. Coja-Oghlan, L. Zdeborová, “The condensation transition in random hypergraph 2-coloring”, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Proceedings of the twenty-third annual ACM-SIAM symposium on Discrete Algorithms, 2012, 241–250.

[14]A. Coja-Oghlan, K. Panagiotou, “Catching the k-NAESAT threshold”, *Proc. 44th STOC* (2012), 899–908.

[15]E. Shamir, J. Spencer, “Sharp concentration of the chromatic number on random graphs $G_{n,p}$”, *Combinatorica*, **7**:I (1987), 121–129.

матическое число $G(n,p)$ сконцентрировано в конечном числе значений для $p \ll n^{-1/2}$. Т. Лучаку удалось показать, что при $p \ll n^{-5/6}$ достигается концентрация в двух последовательных значениях. Затем Н. Алон и М. Кривелевич[16] показали, что концентрация в двух значениях имеет место при $p \ll n^{-1/2}$. Однако в этих работах не получены сами значения точек концентрации. Явным образом их удалось отыскать А. Койя-Оглану, К. Панайоту и А. Штегер[17] для $n^{-1} \leqslant p \ll n^{-3/4}$.

Аналогичных исследований для случайных гиперграфов, когда $p\binom{n}{k} \gg n$, проведено не было. В настоящей диссертации нас будет интересовать именно этот случай.

В сороковые годы XX века была сформулирована одна из самых популярных задач комбинаторной геометрии — проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера. Она заключается в отыскании величины $\chi(\mathbb{R}^n)$, которая называется *хроматическим числом пространства* и равна минимальному числу цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, что никакие две точки одного цвета не находятся на расстоянии 1. Проблема не решена до сих пор даже для случая плоскости. Наилучшая нижняя оценка для величины $\chi\left(\mathbb{R}^2\right)$ была получена О. ди Греем[18], сама работа стала настоящим прорывом. Ди Грей показал, что хроматическое число плоскости не может быть меньше 5. Для этого им был придуман дистанционный граф специального вида, вершины которого не могут быть покрашены правильным образом в 4 цвета. Верхняя оценка, утверждающая, что хроматическое число плоскости не превосходит 7, доказывается примером замощения плоскости шестиугольниками с нужным диаметром[19].

В случае произвольной размерности, когда вместо точек плоскости рассматриваются точки пространства $\mathbb{R}^n$, зазор с ростом n становится только больше. Для $n = 3$ известно лишь, что $6 \leqslant \chi\left(\mathbb{R}^3\right) \leqslant 15$[20][21]. Малым значениям n посвящены работы А.М. Райгородского[22][23], Л. Секеи[24], А.Я.

---

[16]N. Alon, M. Krivelevich, “The concentration of the chromatic number of random graphs”, *Combinatorica*, **17**:3 (1997), 303–313.

[17]A. Coja-Oghlan, K. Panagiotou, A. Steger, “On the chromatic number of random graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **98** (2008), 980–993.

[18]A. D. N. J. de Grey, “The chromatic number of the plane is at least 5”, *Geombinatorics*, **28** (2018), 5–18.

[19]А.М. Райгородский, “Хроматические числа”, Москва: МЦНМО, 2003.

[20]O. Nechushtan, “On the space chromatic number”, *Discrete mathematics*, **256**:1-2 (2002), 499–507.

[21]D.A. Coulson, “15-colouring of 3-space omitting distance one”, *Discrete mathematics*, **256**:1-2 (2002), 83–90.

[22]A.M. Raigorodskii, “Combinatorial Geometry and Coding Theory”, *Fundamenta Informaticae*, **145**:3 (2016), 359–369.

[23]A.M. Raigorodskii, “Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, J. Pach ed., Springer, 2013, 429–460.

[24]L.A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *János Bolyai Mathematical*

Канеля-Белова, В.А. Воронова и Д.Д. Черкашина[25], Д.Д. Черкашина и А.М. Райгородского[26], Л.И. Боголюбского и А.М. Райгородского[27]. Нас же будет интересовать асимптотический случай, т.е. случай, когда $n \to \infty$. В 1981 году П. Франкл и Р. Уилсон[28] установили, что хроматическое число пространства растет экспоненциально, и подтвердили тем самым гипотезу П. Эрдеша:

$$\chi\left(\mathbb{R}^n\right) \geqslant (1.207\ldots + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Затем эта нижняя оценка была усилена в А.М. Райгородским[29][30], результат которого является наилучшим на настоящий момент:

$$\chi\left(\mathbb{R}^n\right) \geqslant (1.239\ldots + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Тем не менее, верхняя оценка довольно далека от нижней. Д. Ларман и К. Роджерс[31] показали, что

$$\chi\left(\mathbb{R}^n\right) \leqslant (3 + o(1))^n, \quad n \to \infty.$$

Конечно, у задачи Нелсона–Эрдеша–Хадвигера появилось множество обобщений и переформулировок. Например, вместо одного запрета можно рассмотреть набор из нескольких запрещенных расстояний[23][28]. Возможна и модификация с запретом определенных конфигураций, таких, например, как одноцветные симплексы с определенными параметрами[32][33][34][35]. В 1976 году М. Бенда и М. Перлес[36] предложили рассматривать случай рационального пространства. В настоящей диссертации будет изучено асимптотическое

Society, **11** 2002. V. 11., P. 649–666.

[25]А.Я. Канель-Белов, В.А. Воронов, Д.Д. Черкашин, “О хроматическом числе плоскости”, *Алгебра и анализ*, **29**:5 (2017), 68–89.

[26]Д.Д. Черкашин, А.М. Райгородский, “О хроматических числах пространств малой размерности”, *Доклады Академии наук*, **472**:1 (2017), 11–12.

[27]Л.И. Боголюбский, А.М. Райгородский, “Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками ℓ_1 и ℓ_2”, Математические заметки, **105**:2 (2019), 187–213.

[28]P. Frankl, R. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”. *Combinatorica*, **1** (1981), 357–368.

[29]А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *Успехи математических наук*, **56**:1(337) (2001), 107–146.

[30]А.М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *Успехи математических наук*, **55**:2 (2000), 147–148.

[31]D.G. Larman, C.A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.

[32]А.А. Сагдеев, “Об одной теореме Франкла–Уилсона”, *Пробл. передачи информ.*, **55**:4 (2019), 86–106.

[33] R.L. Graham, B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, “Ramsey theory”, 2nd ed., *Wiley Interscience*, 1990.

[34]А.Е. Звонарёв, А.М. Райгородский, Д.В. Самиров, А.А. Харламова, “О хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником”, *Математический сборник*, **205**:9 (2014), 97–120.

[35]А.Е. Звонарёв, А.М. Райгородский, “Улучшения теоремы Франкла–Рёдля о числе ребер гиперграфа с запрещенным пересечением и их следствия в задаче о хроматическом числе пространства с запрещенным равносторонним треугольником”, *Труды МИАН*, **288** (2015), 109–119.

[36]M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9** (2000), 113–126.

поведение хроматических чисел рациональных пространств с различными метриками.

Как уже вскользь упоминалось выше, отдельный интерес для изучения представляют *дистанционные графы*. Напомним, что дистанционным графом в метрическом пространстве называется граф, у которого множество вершин — некоторое подмножество точек метрического пространства, а множество ребер — всевозможные пары вершин, расстояние между которыми есть некоторое фиксированное положительное число.

Дистанционные графы естественным образом возникают в связи с задачей о хроматическом числе пространства. Действительно, рассмотрим граф, множество вершин которого — точки пространства $\mathbb{R}^n$, а ребрами соединены все пары точек на расстоянии 1 друг от друга. Хроматическое число такого графа совпадает с хроматическим числом пространства $\mathbb{R}^n$. По теореме Эрдеша–де Брейна[37] для вычисления значения $\chi(\mathbb{R}^n)$ достаточно ограничиться исследованием конечных дистанционных графов.

Зададимся теперь вопросом, каким образом себя ведут хроматические числа дистанционных графов при дополнительном условии, что эти графы не содержат полных подграфов фиксированного размера.

Первый результат подобного типа был получен П. Эрдешем[38]. Ему удалось доказать, что для заданных положительных целых k и ℓ существует граф, которого хроматическое число которого больше k, и при этом в нем отсутствуют циклы длины меньше ℓ (и, в частности, он не будет содержать клик размера не менее 3).

Впоследствии Эрдеш[39] задался следующим вопросом:

существует ли дистанционный граф на плоскости с хроматическим числом 4, *который не содержит треугольников?*

Пример такого графа был представлен Н. Уормалдом[40]. Его результат был в некотором смысле усилен Р. Хохбергом[41] и П. О'Доннеллом[42][43].

[37]N.G. de Bruijn, P. Erdős, "A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations", *Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings, Series A*, **54**:5 (1951), 371–373.

[38]P. Erdos, "Graph theory and probability", *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.

[39]P. Erdos, "Unsolved problems", *Congressus numerantium*, Utilitas Math., Winnipeg, **15** (1976), 678–696.

[40]N. Wormald, "A 4-chromatic graph with a special plane drawing", *Journal of the Australian Mathematical Society Series A*, **28**:1 (1979), 1–8.

[41]R. Hochberg, P. O'Donnel, "Some 4-chromatic unit-distance graphs without small cycles", *Geombinatoric*, **5**:4 (1996), 137–141.

[42]P. O'Donnell, "Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph description", *Geombinatorics*, **9**:3 (2000), 145–152.

[43]P. O'Donnell, "Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane II. Graph description", *Geombinatorics*, **9**:4 (2000), 180–193.

Е.Е. Демехиным, О.И. Рубановым, А.М. Райгородским[44] и позже А.Б. Купавским[45] была изучена величина, равная максимуму хроматических чисел дистанционных графов в $\mathbb{R}^n$, которые не содержат полных подграфов заданного размера. Мы уточняем некоторые из их результатов. Упомянутая величина представляет интерес также в случае рационального пространства и исследована в настоящей диссертации.

Цель работы и основные задачи

Целью диссертационной работы является исследование задач экстремальной комбинаторики, теории графов и гиперграфов, комбинаторной геометрии. Основными задачами работы являются:

1. исследование нижних оценок минимально возможного числа ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающем раскраски в 2 цвета, в которой каждое ребро содержит хотя бы k вершин обоих цветов;

2. изучение феномена концентрации хроматического числа случайного k-однородного гиперграфа $H(n,k,p)$ на n вершинах при $p\binom{n}{k} \gg n$, что соответствует неразреженному случаю;

3. исследование асимптотических нижних оценок хроматических чисел рациональных пространств с метрикой ℓ_u для отдельных иррациональных значений запрещенного расстояния в растущей размерности;

4. исследование асимптотического поведения хроматических чисел дистанционных графов с рациональным запрещенным расстоянием без клик фиксированного размера.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. получены новые нижние оценки величины $m_k(n)$, равной минимальному числу ребер в n-однородном гиперграфе, не допускающем раскраски всех

[44]Е.Е. Дёмёхин, А.М. Райгородский, О.И. Рубанов, “Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера”, *Математический сборник*, **204**:4 (2013), 49–78.

[45]А.Б. Купавский, “Явные и вероятностные конструкции дистанционных графов с маленьким кликовым и большим хроматическим числами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:1 (2014), 65–98.

вершин в два цвета, в которой каждое ребро имеет по крайней мере k вершин обоих цветов;

2. получены новые нижние оценки для величины $m_{k,\varepsilon}(n)$, равной минимальному числу ребер n-однородного гиперграфа, у которого любой остовный подгиперграф с числом ребер, равным $(1-\varepsilon)$, умноженным на число ребер исходного гиперграфа, не допускает раскраски всех вершин в два цвета, в которой каждое ребро имеет по крайней мере k вершин обоих цветов;

3. показано, что хроматическое число случайного k-однородного гиперграфа в биномиальной модели $H(n,k,p)$, $k \geqslant 4$, $p\binom{n}{k} \gg n$, имеет предельную концентрацию в двух или трех значениях в зависимости от параметра $p = p(n)$, причем эти значения найдены явно;

4. получены новые нижние асимптотические оценки хроматических чисел $\chi\left(\left(\mathbb{Q}^n, \ell_u\right), d\right)$ рациональных пространств с метрикой ℓ_u при $u \geqslant 2$ и $d = \sqrt[u]{2p^\alpha}$, где p — простое, а $\alpha \in \mathbb{N}$, для растущего n;

5. найдены новые нижние асимптотические оценки хроматических чисел дистанционных графов без клик заданного размера в рациональных пространствах $\mathbb{Q}^n$ с евклидовой метрикой и рациональным запрещенным расстоянием при растущей размерности пространства;

6. улучшены нижние асимптотические оценки хроматических чисел дистанционных графов без клик заданного размера в вещественных пространствах $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой при растущей размерности пространства.

Теоретическая и практическая ценность полученных результатов

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут найти примененение в теории графов и гиперграфов, экстремальной комбинаторике и комбинаторной геометрии.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы экстремальной комбинаторики, комбинаторные методы теории гиперграфов, теория случайных гиперграфов, линейно-алгебраический метод и вероятностный метод в комбинаторике.

Степень достоверности и аппробация результатов

Все результаты работы строго доказаны.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научных семинарах:

— Научно-исследовательский семинар при механико-математическом факультете МГУ под руководством Н.П. Долбилина.

— Научно-исследовательский семинар при механико-математическом факультете МГУ под руководством Д.А. Шабанова.

— Научно-исследовательский семинар при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук под руководством С.В. Конягина и И.Д. Шкредова.

Результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

— The Second Russian-Hungarian Combinatorial Workshop, Будапешт, Венгрия, 26-29 июня 2018.

— “Экстремальная комбинаторика и дискретная геометрия”, Майкоп, Россия, 20-23 декабря 2018.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90016.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [D1]—[D5]. Всего по теме опубликовано пять работ, из них — две в соавторстве. Все работы опубликованы в журналах из перечня ВАК, индексируются Scopus и Web of Science. Все результаты данной диссертации, включая результаты, опубликованные в совместных работах, были получены автором диссертации самостоятельно.

Структура работы

Настоящая диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения. Полный объем диссертации составляет 98 страниц. Список литературы содержит 79 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава диссертации состоит из пяти разделов и посвящена экстремальной проблеме об отыскании величины $m_k(n)$, равной минимальному возможному количеству ребер n-однородного гиперграфа, у которого не существует k-правильной раскраски в 2 цвета (в таком случае говорят, что гиперграф не обладает свойством B_k). Также в первой главе рассмотрена задача об отыскании величины $m_{k,\varepsilon}(n)$, равной минимальному количеству ребер n-однородного гиперграфа, у которого любой остовный подгиперграф с достаточно большой долей ребер не имеет k-правильной двухцветной раскраски.

В разделе **1.1** приведены история задачи и основные определения. Также рассматриваются известные результаты исследований, посвященные изучению величин $m_k(n)$ и $m_{k,\varepsilon}(n)$.

В разделе **1.2** формулируется теорема, которая улучшает нижние оценки величины $m_k(n)$ при k, имеющем порядок роста не более, чем $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, $0 < \delta < 1/2$.

Теорема 1. *Существует такая положительная константа c_1, что для любых $n \geqslant 30$ и $k \geqslant 2$, удовлетворяющих неравенству*

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{\ln n}},$$

выполняется

$$m_k(n) \geqslant c_1 \left(\frac{n}{k \ln n}\right)^{1/2} \frac{2^n}{\binom{n-1}{k-1}}.$$

Вторым результатом данного раздела является нетривиальная нижняя оценка для величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ в широкой области значений k.

Теорема 2. *Существует такая положительная константа c_2, что для любых $n \geqslant 14$ и $k \geqslant 2$, удовлетворяющих неравенству*

$$2k^2(n-k) \leqslant (n-2k)^2,$$

выполняется

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant c_2 \cdot \frac{2^{2n}\sqrt{n}}{\binom{n-1}{k-1}^2} \cdot \varepsilon.$$

Третий результат данного раздела дает наилучшую нижнюю оценку для величины $m_{k,\varepsilon}(n)$ при k, имеющем порядок роста не более $n^{1/2-\delta}/\sqrt{\ln n}$, $0 < \delta < 1/2$.

Теорема 3. *Существуют такие положительные константы c_3, c_4, что для любых $k \geqslant 2$, и $n \geqslant 30$, удовлетворяющих условию*

$$k \leqslant \sqrt{\frac{n}{\ln n}},$$

и любого

$$\varepsilon \geqslant c_3 \cdot \frac{1}{2^n n \ln n},$$

выполняется

$$m_{k,\varepsilon}(n) \geqslant c_4 \cdot \frac{2^{2n}}{\binom{n-1}{k-1}^2} \frac{n}{\ln\left(n^{2k} \ln n\right)} \cdot \varepsilon.$$

В разделе **1.3** приводится формулировка и доказательство критерия обладания гиперграфом свойством B_k, который был предложен в работе А.П. Розовской[46]. Приведем и здесь этот критерий.

Для каждого ребра $f \in E$ через $F_\sigma(f)$ обозначим множество первых k в нумерации σ вершин ребра f, а через $L_\sigma(f)$ обозначим множество последних k в нумерации σ вершин.

Лемма 1. *Пусть $G = (W, D)$ — произвольный гиперграф, каждое ребро которого содержит хотя бы $2k$ вершин. Тогда G обладает свойством B_k тогда и только тогда, когда существует такая нумерация его вершин σ, что для любых двух ребер f и s выполнено*

$$L_\sigma(f) \cap F_\sigma(s) = \varnothing.$$

Далее в разделе приведено доказательство теоремы 1. В нем используется лемма 1, а также идея анализа ребер специального вида на основе алгоритма рандомизированной раскраски, предложенная Д.Д. Черкашиным и Я. Козиком[47].

[46]А.П. Розовская, “Экстремальные комбинаторные задачи для двухцветных раскрасок гиперграфов”, *Математические заметки*, **90**:4 (2011), 584–598.

[47]D. Cherkashin, J. Kozik, “A note on random greedy coloring of uniform hypergraphs”, *Random Structures Algorithms*, **47**:3 (2015), 407–413.

В разделе **1.4** приведено доказательство теоремы 2. В нем используется вероятностный метод и лемма 1.

В разделе **1.5** приведено доказательство теоремы 3. В нем используется лемма 1 и уже упоминавшаяся ранее идея анализа ребер специального вида на основе алгоритма рандомизированной раскраски, предложенная Д.Д. Черкашиным и Я. Козиком.

Вторая глава диссертации состоит из четырех разделов. В ней исследуется вопрос о предельном распределении хроматического числа случайного гиперграфа.

В разделе **2.1** дано определение классической биномиальной модели случайного k-однородного гиперграфа $H(n,k,p)$. Ее можно рассматривать как схему Бернулли на множестве всех k-подмножеств некоторого множества V_n из n вершин: каждое k-подмножество V_n включается в $H(n,k,p)$ в качестве ребра независимо от других с вероятностью $p \in (0,1)$. При $k=2$ случайный гиперграф $H(n,2,p)$ представляет собой широко известную модель случайного графа $G(n,p)$, также называемую моделью Эрдеша–Реньи.

В разделе **2.2** приводится история задачи и известные результаты об асимптотическом поведении хроматических чисел случайных графов и гиперграфов. Также в этом разделе сформулированы основные результаты главы.

В пункте **2.2.1** рассматривается история задачи и известные результаты для асимптотического поведения хроматического числа случайного графа $G(n,p)$. В случае, когда $p=p(n)$ не является константой, а стремится к нулю достаточно быстро, имеет место предельная концентрация значений хроматического числа случайного графа в ограниченном множестве.

В пункте **2.2.2** рассматривается история задачи о поиске асимптотического поведения хроматического числа случайного гиперграфа. Приведены известные результаты.

В пункте **2.2.3** исследуется феномен концентрации значений хроматического числа случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ в неразреженном случае, т.е. при $pn^{k-1} \to +\infty$.

Первый результат главы представлен в следующей теореме и дает нижнюю оценку хроматического числа случайного гиперграфа.

Теорема 4. *Обозначим* $c = c(n) = p\binom{n}{k}\frac{1}{n}$ *и зафиксируем произвольное* $\varepsilon > 0$. *Если* $c \to +\infty$, *но* $c = o(n^{\frac{k-1}{k}})$, *то для любой функции* $r = r(n) \to +\infty$ *с условием*

$$c > r^{k-1}\ln r - \frac{1}{2}\ln r + \varepsilon \qquad (1)$$

выполнено

$$\mathsf{P}\left(\chi(H(n,k,p)) > r\right) \longrightarrow 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Вторым и центральным результатом главы является теорема, позволяющая найти верхнюю оценку хроматического числа $H(n,k,p)$ при не слишком медленно убывающей функции $p = p(n)$.

Теорема 5. *Пусть натуральное число $k \geqslant 4$ и $\gamma \in (0, 1/8)$ фиксированы. Обозначим $c = c(n) = p\binom{n}{k}\frac{1}{n}$. Если $c \leqslant n^{\frac{k-1}{2k+4}-\gamma}$ и $c \to +\infty$, то существует такая абсолютная константа $A > 0$, что для любой функции $r = r(n) \to +\infty$ с условием*

$$c < r^{k-1}\ln r - \frac{1}{2}\ln r - \frac{r-1}{r} - A\left(\frac{k^2 \ln r}{r^{k/3-1}}\right) \tag{2}$$

выполнено

$$\mathsf{P}\left(\chi(H(n,k,p)) \leqslant r+1\right) \longrightarrow 1 \text{ при } n \to \infty.$$

На основе теорем 4 и 5 сделаны выводы о значениях концентрации хроматического числа случайного гиперграфа. Введем величину $r_p = r_p(n) = \min\{\ell \in \mathbb{N} : c < \ell^{k-1}\ln \ell\}$. Тогда $c \in [(r_p-1)^{k-1}\ln(r_p-1), r_p^{k-1}\ln r_p)$, и мы получаем, что с вероятностью, стремящейся к 1,

- на полуинтервале вида $c \in [(r_p-1)^{k-1}\ln(r_p-1), r_p^{k-1}\ln r_p - \frac{1}{2}\ln r_p - O(1))$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в двух значениях: r_p и r_p+1;
- на отрезке вида $c \in [r_p^{k-1}\ln r_p - \frac{1}{2}\ln r_p - O(1), r_p^{k-1}\ln r_p - \frac{1}{2}\ln r_p + O(1)]$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано в трех значениях: r_p, r_p+1 и r_p+2;
- на интервале вида $c \in [r_p^{k-1}\ln r_p - \frac{1}{2}\ln r_p + O(1), r_p^{k-1}\ln r_p)$ хроматическое число случайного гиперграфа сконцентрировано снова в двух значениях: r_p+1 и r_p+2.

Тем самым, лишь в промежутке ограниченной длины мы имеем предельную концентрацию значений хроматического числа $H(n,k,p)$ в трех последовательных числах, которые можно явно указать.

В разделе **2.3** приведено доказательство теоремы 4. В нем применяется метод первого момента, а также используется аппроксимация биномиальной модели случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ равномерной моделью $H'(n,k,m)$, в которой в точности m различных k-подмножеств V_n выбираются с равномерным распределением.

В разделе **2.4** приведено доказательство теоремы 5. Мы используем аппроксимацию биномиальной модели случайного гиперграфа равномерной, метод второго момента, утверждение о дважды стохастических матрицах, доказанное Д.А. Шабановым[48], известные оценки вероятностей больших уклонений для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями.

Третья глава диссертации состоит из трех разделов. В ней исследуется задача комбинаторной геометрии об отыскании нижних асимптотических оценок хроматических чисел рациональных пространств для отдельных иррациональных значений запрещенного расстояния.

В разделе **3.1** вводятся определения и рассматривается история задачи.

Пусть $\mathbb{X}$ — произвольное метрическое пространство с метрикой ρ, d — положительное действительное число. Обозначим через $\chi\left(\left(\mathbb{X},\rho\right),d\right)$ *хроматическое число пространства* $\mathbb{X}$ *с метрикой* ρ *с запрещенным расстоянием* d — наименьшее количество цветов, в которые можно покрасить все точки $\mathbb{X}$ так, чтобы любые две точки на расстоянии d имели разные цвета.

В разделе **3.2** сформулированы основные результаты третьей главы — теоремы, которые позволяют получить нижние оценки хроматических чисел рациональных пространств $\chi\left(\left(\mathbb{Q}^n,\ell_u\right),d\right)$ с метрикой ℓ_u при $u \geqslant 2$ и $d = \sqrt[u]{2p^\alpha}$, где p — простое, а $\alpha \in \mathbb{N}$, для растущего n.

Для $u = 2$ (то есть в случае, когда пространство снабжено евклидовой метрикой) справедлива следующая

Теорема 6. *Возьмем произвольное число* $x \in \left(0; 1/2p^{1+\alpha}\right)$. *Для каждого* q' *из отрезка* $\left[x/p^{1-\alpha}; p^{1+\alpha}x\right]$ *рассмотрим произвольные положительные действительные числа* k_1' *и* k_{-1}', *удовлетворяющие ограничениям*

$$k_{-1}' < k_1' \leqslant \frac{1}{2}, \quad 3k_{-1}' + k_1' = 2q'.$$

Положим

$$A = \frac{2 + 9k_{-1}' + 3k_1' - \sqrt{\left(2 + 9k_{-1}' + 3k_1'\right)^2 - 12\left(3k_{-1}' + k_1'\right)^2}}{12},$$

$$B = \frac{3k_{-1}' + k_1'}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3k_{-1}' + k_1'}{2}.$$

[48]Д.А. Шабанов, “О концентрации хроматического числа случайного гиперграфа”, *Доклады Академии Наук*, **475**:1 (2017), 24–28.

Пусть, далее,

$$M = M(n, k'_1, k'_{-1}) = \left(\frac{1}{\left(1 - k'_1 - k'_{-1}\right)^{\left(1-k'_1-k'_{-1}\right)} \left(k'_{-1}\right)^{k'_{-1}} \left(k'_1\right)^{k'_1}} + o(1) \right)^n,$$

$$D = D(n, k'_1, k'_{-1}) = \left(\frac{1}{A^A B^B C^C} + o(1) \right)^n.$$

Тогда имеет место оценка

$$\chi\left((\mathbb{Q}^n, \ell_2), \sqrt{2p^\alpha} \right) \geqslant \max_{x \in \left(0; \frac{1}{2p^{1+\alpha}}\right)} \min_{q' \in \left[\frac{x}{p^{1-\alpha}}; p^{1+\alpha} x\right]} \max_{k'_1, k'_{-1}} \frac{M}{D}.$$

Аналогичным образом формулируются следующие две теоремы.

Теорема 7. *Возьмем произвольное число $x \in \left(0; 1/2p^{1+\alpha}\right)$. Для каждого q' из отрезка $\left[x/p^{u-\alpha-1}; p^{1+\alpha}x\right]$ рассмотрим произвольное положительное действительное число k'_1, удовлетворяющее ограничению $k'_1 < 2q'$. Положим*

$$M{=}M(n, k'_1){=}\left(\frac{1}{(k'_1)^{k'_1}(1 - k'_1)^{1-k'_1}} + o(1) \right)^n,$$

$$D{=}D(n, q'){=}\left(\frac{1}{(q')^{q'}(1 - q')^{1-q'}} + o(1) \right)^n.$$

Тогда имеет место оценка

$$\chi\left((\mathbb{Q}^n, \ell_u), \sqrt[u]{2p^\alpha} \right) \geqslant \max_{x \in \left(0; \frac{1}{2p^{1+\alpha}}\right)} \min_{q' \in \left[\frac{x}{p^{u-\alpha-1}}; p^{1+\alpha} x\right]} \max_{k'_1 \in (0; 2q')} \frac{M}{D}.$$

Теорема 8. *Возьмем произвольное число $x \in \left(0; 1/2p^{1+\alpha}\right)$. Для каждого q' из отрезка $\left[x/p^{u-\alpha-1}; p^{1+\alpha}x\right]$ рассмотрим произвольные положительные действительные числа k'_1 и k'_{-1}, удовлетворяющие ограничениям*

$$k'_{-1} < k'_1 \leqslant \frac{1}{2}, \quad (2^u - 1)\, k'_{-1} + k'_1 = 2q', \quad u \geqslant 2.$$

Положим

$$M = M(n, k'_1, k'_{-1}) = \left(\frac{1}{\left(1 - k'_1 - k'_{-1}\right)^{\left(1-k'_1-k'_{-1}\right)} \left(k'_{-1}\right)^{k'_{-1}} \left(k'_1\right)^{k'_1}} + o(1) \right)^n,$$

$$D = D(n, q') = \left(\frac{2^{q'}}{q'^{q'}(1 - q')^{(1-q')}} + o(1) \right)^n.$$

Тогда имеет место оценка

$$\chi\left((\mathbb{Q}^n,\ell_u),\sqrt[u]{2p^\alpha}\right)\geqslant \max_{x\in\left(0;\frac{1}{2p^{1+\alpha}}\right)}\ \min_{q'\in\left[\frac{x}{p^{u-\alpha-1}};p^{1+\alpha}x\right]}\ \max_{k'_1,k'_{-1}}\frac{M}{D}.$$

Раздел **3.3** посвящен доказательству теорем. Установлено, что нижние оценки величин $\chi\left((\mathbb{Q}^n,\ell_u),\sqrt[u]{2p^\alpha}\right)$ имеют вид $\left(\zeta^u_{p^\alpha}+o(1)\right)^n$, где $\zeta^u_{p^\alpha}$ — некоторые константы, численные значения которых приведены в конце данного раздела.

Четвертая глава диссертации состоит из четырех разделов. В ней рассматривается задача об асимптотическом поведении хроматических чисел дистанционных графов в рациональном пространстве с рациональным запрещенным расстоянием.

В разделе **4.1** рассматривается история задачи и даются некоторые определения из теории графов.

Дистанционным графом в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ с метрикой ρ называется граф $G=(V,E)$, у которого множество вершин V таково, что $V\subseteq\mathbb{X}$, а множество ребер E таково, что

$$E\subseteq\left\{\{x,y\}:x,y\in V,\quad \rho(x,y)=a\right\},\quad a\in\mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Пусть $\omega(G)$ — это число вершин в максимальном полном подграфе графа $G=(V,E)$:

$$\omega(G)=\max\left\{|W|:W\subseteq V,\quad \forall\overline{x},\overline{y}\in W\quad \{\overline{x},\overline{y}\}\in E\right\}.$$

Величину $\omega(G)$ называют *кликовым числом* графа, поскольку любой полный подграф называется *кликой*.

Для натурального k, большего двух, положим

$$\zeta_k(\mathbb{R})=\sup\Big\{\zeta:\exists\ \text{функция}\ \delta=\delta(n)\ \text{такая, что}\ \lim_{n\to\infty}\delta(n)=0\ \text{и}\ \forall n\ \exists\ G\ —$$
$$\text{дистанционный граф в}\ \mathbb{R}^n,\ \text{у которого}\ \omega(G)<k,\ \chi(G)\geq(\zeta+\delta(n))^n\Big\}.$$

В разделе **4.2** даются основные определения.

Пусть a'_{-1},a'_1,q' — положительные вещественные числа, меньшие 1. Для каждого натурального n положим $a_1=[a'_1n]$, $a_{-1}=[a'_{-1}n]-1$, и пусть q — такое натуральное число, что $q=q'n(1+o(1))$.

Введем последовательность $\{G_n(a_1,q)\}_{n\in\mathbb{N}}=\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $G_n=(V_n,E_n)$ — графы с множеством вершин

$$V_n=\{\overline{x}=(x_1,\ldots,x_n):x_i\in\{0,1\},|\{i:x_i=1\}|=a_1\}$$

и множеством ребер

$$E_n = \left\{\{\overline{x}, \overline{y}\} : \ell_2\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \sqrt{2q}\right\}.$$

Введем последовательность $\{G'_n\left(a_1, q\right)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{G'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $G'_n = \left(V'_n, E'_n\right)$ — графы с множеством вершин

$$V'_n = \left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2q}}\right\}, \left|\left\{i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2q}}\right\}\right| = a_1\right\}$$

и множеством ребер

$$E'_n = \left\{\{\overline{x}, \overline{y}\} : \ell_2\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = 1\right\}.$$

Введем последовательность $\{\widetilde{G}_n\left(\{a_{-1}, a_1\}, q\right)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $\widetilde{G}_n = \left(\widetilde{V}_n, \widetilde{E}_n\right)$ — графы с множеством вершин

$$\widetilde{V}_n = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\},\\ |\{i : x_i = -1\}| = a_{-1}, |\{i : x_i = 1\}| = a_1\}$$

и множеством ребер

$$\widetilde{E}_n = \left\{\{\overline{x}, \overline{y}\} : \ell_2\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \sqrt{2q}\right\}.$$

Введем последовательность $\{\widetilde{G}'_n\left(\{a_{-1}, a_1\}, q\right)\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\widetilde{G}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $\widetilde{G}'_n = \left(\widetilde{V}'_n, \widetilde{E}'_n\right)$ — графы с множеством вершин

$$\widetilde{V}'_n = \left\{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{2q}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2q}}\right\},\right.\\ \left.\left|\left\{i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{2q}}\right\}\right| = a_{-1}, \left|\left\{i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2q}}\right\}\right| = a_1\right\}$$

и множеством ребер

$$\widetilde{E}'_n = \left\{\{\overline{x}, \overline{y}\} : \ell_2\left(\overline{x}, \overline{y}\right) = 1\right\}.$$

Пусть

$$\zeta_k\left(\mathbb{Q}\right) = \sup\Big\{\zeta : \exists \text{ функция } \delta = \delta(n) \text{ такая, что } \lim_{n\to\infty}\delta(n) = 0 \text{ и } \forall n\ \exists\, G \text{ —}\\ \text{граф единичных расстояний в } \mathbb{Q}^n, \text{ у которого}\\ \omega(G) < k,\ \chi(G) \geq (\zeta + \delta(n))^n\Big\}.$$

Под графом единичных расстояний подразумевается дистанционный граф, у которого $a = 1$ в (3). Заметим, что если определить величину $\zeta_k(\mathbb{Q})$ на множестве всех дистанционных графов, то ее значения совпадут с $\zeta_k(\mathbb{R})$ для каждого k. Нижние оценки для $\zeta_k(\mathbb{R})$ уже были изучены А.Б. Купавским[45] и А.А. Сагдеевым[49]. Однако мы определяем эту величину с дополнительным условием на множество исследуемых графов. А именно, в случае, когда расстояние a является рациональным числом, величина $\zeta_k(\mathbb{Q})$ имеет смысл.

В разделе **4.3** сформулированы основные результаты данной главы.

Для графов из последовательностей $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ уже были найдены условия, при которых в этих графах отсутствуют k-клики[45]. Ниже сформулирован упомянутый результат не только для таких графов, но и для графов из последовательностей $\{G'_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\widetilde{G}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (в этом случае доказательство проводится аналогичным образом).

Теорема 9. 1) *Пусть* $a'_1, q' > 0$ *и* $q' < a'_1$, $a'_1, q' \in \mathbb{R}$. *Рассмотрим последовательность дистанционных графов* $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(\{G'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$. *Пусть* k *— натуральное число,* $k \geqslant 3$. *Если выполняется неравенство*

$$a'_1 - \frac{(ka'_1)^2 - \{ka'_1\}^2 - [ka'_1]}{k(k-1)} < q',$$

то графы из последовательности $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(\{G'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ *при достаточно больших* n *не содержат полных подграфов (клик) на* k *вершинах.*
2) *Пусть* $a'_1, a'_{-1}, q' > 0$ *и* $q' < a'_1$, $a'_1, a'_{-1}, q' \in \mathbb{R}$. *Рассмотрим последовательность дистанционных графов* $\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(\{\widetilde{G}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$. *Пусть* k *— натуральное число,* $k \geqslant 3$.

Если выполняются неравенства $k(1 - a'_1 - a'_{-1}) + \{ka'_1\} \geqslant 1$,

$$a'_1 + a'_{-1} + \frac{k(a'_1 + a'_{-1}) - (k(a'_1 - a'_{-1}))^2 - \{k(a'_1 - a'_{-1})\} + \{k(a'_1 - a'_{-1})\}^2}{k(k-1)} < q'$$

или $k(1 - a'_1 - a'_{-1}) + \{ka'_1\} < 1$,

$$\frac{(k-k^2)(2a'_1 + 2a'_{-1} - 1) + (4k-4)\{ka'_1\} + 4\{ka'_1\}^2}{k(k-1)} + \\ + \frac{4k(a'_1 + a'_{-1})[ka'_1] - 4(ka'_1)^2}{k(k-1)} + a'_1 + a'_{-1} < q',$$

[49]А.А. Сагдеев, “О нижних оценках хроматических чисел дистанционных графов с большим обхватом”, *Математические заметки*, **101**:3 (2017), 430–445.

то графы из последовательности $\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\left(\{\widetilde{G}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ *при достаточно больших* n *не содержат* k*–клик.*

Используя явные конструкции графов и результат теоремы 9, мы получаем новые нижние оценки для величин $\zeta_k(\mathbb{Q})$.

Теорема 10. *Пусть дано натуральное число* $k \geqslant 3$. *Тогда*

$$\zeta_k(\mathbb{Q}) \geqslant \max_{x\in(0;1/8)} \min_{q'\in[x;4x]} \max_{a'_1} \frac{q'^{q'}(1-q')^{1-q'}}{(a'_1)^{a'_1}(1-a'_1)^{1-a'_1}},$$

где максимум берется по всем a'_1, *удовлетворяющим ограничениям*

$$a'_1 \in (0,1), \quad a'_1 < 2q', \quad q' < a'_1, \quad a'_1 - \frac{(ka'_1)^2 - \{ka'_1\}^2 - [ka'_1]}{k(k-1)} < q'.$$

Теорема 11. *Пусть дано натуральное число* $k \geqslant 3$. *Тогда*

$$\zeta_k(\mathbb{Q}) \geqslant \max_{x\in(0;1/8)} \min_{q'\in[x;4x]} \max_{a'_1,a'_{-1}} \frac{(q'-2\ell)^{q'-2\ell}(1-q'+\ell)^{1-q'+\ell}}{(a'_1)^{a'_1}(a'_{-1})^{a'_{-1}}(1-a'_1-a'_{-1})^{1-a'_1-a'_{-1}}},$$

где максимум берется по всем a'_{-1}, a'_1, *удовлетворяющим ограничениям*

$$a'_{-1} < a'_1,\ a'_1 + a'_{-1} < 1/2,\ 3a'_{-1} + a'_1 = 2q',$$
$$a'_1 + a'_{-1} + \frac{k(a'_1+a'_{-1}) - (k(a'_1-a'_{-1}))^2 - \{k(a'_1-a'_{-1})\} + \{k(a'_1-a'_{-1})\}^2}{k(k-1)} < q',$$

а ℓ *равно* $\frac{3q'+1-\sqrt{1+6q'-3(q')^2}}{6}$.

Пусть граф $G_n = (V,E)$ — граф, принадлежащий одной из последовательностей $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ или $\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим через N_n число его вершин. Введем обозначение $conn_k^j(G_n, v_1, \ldots, v_j)$, $j < k$, для числа k–клик в графе G_n, содержащих вершины $v_1, \ldots, v_j$. Пусть

$$conn_k^j(G_n) = \max_{v_1,\ldots,v_j} conn_k^j(G_n, v_1, \ldots, v_j).$$

Обозначим через $s_k^j\left(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ и $s_k^j\left(\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ следующие величины:

$$s_k^j\left(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{n\to\infty} \log_{N_n} conn_k^j(G_n), \quad G_n \in \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}},$$

$$s_k^j\left(\{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \lim_{n\to\infty} \log_{N_n} conn_k^j(G_n), \quad G_n \in \{\widetilde{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Для указанных последовательностей графов данный предел существует. Положим $s_k^j(a_1', a_1'-q') = s_k^j\left(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = s_k^j\left(\{G_n'\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$, $s_k^j(a_1', a_{-1}', a_1'+a_{-1}'-q') = s_k^j\left(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = s_k^j\left(\left\{\widetilde{G}_n'\right\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$.

Следующая теорема была сформулирована и доказана в работе [45].

Теорема 12. *Пусть дано натуральное число $k \geqslant 3$. Рассмотрим произвольное действительное число a_1', удовлетворяющее ограничению $a_1' \in (0, 1/2)$.*

Положим

$$\tau_0 = \tau_0(a_1') = \left(\frac{a_1'}{2}\right)^{-\frac{a_1'}{2}} \left(1 - \frac{a_1'}{2}\right)^{-1+\frac{a_1'}{2}}, \qquad \tau_1 = \tau_1(a_1') = (a_1')^{-a_1'} (1 - a_1')^{-1+a_1'}.$$

Тогда

$$\zeta_k(\mathbb{R}) \geqslant \max_{a_1' \in (0,1/2)} \frac{\tau_1(a_1')^{1-\frac{2s_k^2(a_1', a_1'/2)}{(k-2)(k+1)}}}{\tau_0(a_1')}.$$

За счет теоремы 12 и более сильной оценки $s_k^j\left(\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ при $q' = a_1'/2$ удается усилить результат для $\zeta_k(\mathbb{R})$.

Предложение 1. *Имеют место следующие оценки:*

$$s_k^2(a_1', a_{-1}', a_1' + a_{-1}' - q') \leqslant k - 2;$$

$$s_k^2(a_1', a_1' - q') \leqslant s_3^2(a_1', a_1' - q') + (k-3) s_4^3(a_1', a_1' - q'),$$

$$s_3^2(a_1', a_1' - q') = \max_t \log_{\frac{1}{(a_1')^{a_1'}(1-a_1')^{1-a_1'}}} \frac{P}{Q}$$

$$s_4^3(a_1', a_1' - q') = \max_{t,\ell,m,p,r} \log_{\frac{1}{(a_1')^{a_1'}(1-a_1')^{1-a_1'}}} \frac{L}{M},$$

$$P = P(a_1', b) = b^b (a_1' - b)^{2(a_1'-b)} (1 - 2a_1' + b)^{1-2a_1'+b},$$

$$Q = Q(a_1', b, t) = t^{2t} (b-t)^{3(b-t)} (a_1' - 2b + t)^{2(a_1'-2b+t)} (1 - 2a_1' + b - t)^{1-2a_1'+b-t},$$

$$L = L(a_1', b, t, \ell, m, p, r) = (t+\ell)^{(t+\ell)} (b-t-\ell)^{3(b-t-\ell)} (a_1'-2b+t+\ell)^{3(a_1'-2b+t+\ell)} \times \\ \times (1 - 3a_1' + 3b - t - \ell)^{1-3a_1'+3b-t-\ell},$$

$$M = M(a_1', b, t, \ell, m, p, r) = t^t m^m \ell^\ell p^p r^r (b-t-\ell-m)^{b-t-\ell-m} (b-t-\ell-p)^{b-t-\ell-p} \times \\ \times (b-t-\ell-r)^{b-t-\ell-r} (b-t-m-p)^{b-t-m-p} (b-t-m-r)^{b-t-m-r} (b-t-p-r)^{b-t-p-r} \times \\ \times (a_1'-3b+2t+\ell+m+p)^{a_1'-3b+2t+\ell+m+p} (a_1'-3b+2t+\ell+m+r)^{a_1'-3b+2t+\ell+m+r} \times \\ \times (a_1'-3b+2t+\ell+p+r)^{a_1'-3b+2t+\ell+p+r} (a_1'-3b+2t+m+p+r)^{a_1'-3b+2t+m+p+r} \times \\ \times (1 - 4a_1' + 6b - 3t - \ell - m - p - r)^{1-4a_1'+6b-3t-\ell-m-p-r},$$

где $b = a_1' - q'$. Мы подразумеваем, что параметры $a_1', b, t, \ell, m, p, r$ принимают только такие значения, при которых функции P, Q, L, M корректно определены.

Следующие теоремы позволяют получить новые нижние оценки для величин $\zeta_k(\mathbb{Q})$.

Теорема 13. *Пусть дано натуральное число $k \geqslant 3$. Возьмем произвольное число $x \in (0; 1/8)$. Для каждого q' из отрезка $[x; 4x]$ рассмотрим произвольное вещественное число a_1', удовлетворяющее ограничениям*

$$a_1' \in (0, 1/2), \qquad a_1' < 2q'.$$

Положим

$$\tau_0 = \tau_0(q') = (q')^{-q'} (1 - q')^{-1+q'}, \qquad \tau_1 = \tau_1(a_1') = (a_1')^{-a_1'} (1 - a_1')^{-1+a_1'}.$$

Тогда

$$\zeta_k(\mathbb{Q}) \geqslant \max_{x \in \left(0; \frac{1}{8}\right)} \min_{q' \in [x; 4x]} \max_{a_1'} \frac{\tau_1(a_1')^{1 - \frac{2s_k^2(a_1', a_1' - q')}{(k-2)(k+1)}}}{\tau_0(q')},$$

где максимум по a_1' берется в соответствии с ограничениями на этот параметр, указанными в формулировке теоремы.

Теорема 14. *Пусть дано натуральное число $k \geqslant 3$. Возьмем произвольное число $x \in (0; 1/8)$. Для каждого q' из отрезка $[x; 4x]$ рассмотрим произвольные действительные числа a_{-1}', a_1' удовлетворяющее ограничениям*

$$a_{-1}', a_1' \in (0, 1), \qquad a_{-1}' + a_1' \leqslant \frac{1}{2}, \qquad a_{-1}' \leqslant a_1', \qquad 3a_{-1}' + a_1' = 2q'.$$

Положим

$$A = \frac{2 + 9a_{-1}' + 3a_1' - \sqrt{\left(2 + 9a_{-1}' + 3a_1'\right)^2 - 12\left(3a_{-1}' + a_1'\right)^2}}{12},$$

$$B = \frac{3a_{-1}' + a_1'}{2} - 2A, \quad C = 1 + A - \frac{3a_{-1}' + a_1'}{2}.$$

Пусть, далее,

$$\rho_0 = \rho_0(a_{-1}', a_1') = A^{-A} B^{-B} C^{-C},$$

$$\rho_1 = \rho_1(a_{-1}', a_1') = (1 - a_1' - a_{-1}')^{-1 + a_1' + a_{-1}'} (a_{-1}')^{-a_{-1}'} (a_1')^{-a_1'}.$$

Тогда

$$\zeta_k(\mathbb{Q}) \geqslant \max_{x \in \left(0; \frac{1}{8}\right)} \min_{q' \in [x; 4x]} \max_{a'_{-1}, a'_1} \frac{\rho_1(a'_{-1}, a'_1)^{1 - \frac{2 s_k^2 (a'_1, a'_{-1}, a'_1 + a'_{-1} - q')}{(k-2)(k+1)}}}{\rho_0(a'_{-1}, a'_1)},$$

где максимум по a'_{-1}, a'_1 берется в соответствии с ограничениями на эти параметры, указанными в формулировке теоремы.

Теоремы 12—14 используют вероятностные конструкции дистанционных графов.

Также в разделе 4.3 приведены численные значения нижних оценок для величин $\zeta_k(\mathbb{R})$ и $\zeta_k(\mathbb{Q})$ для различных значений k. Для некоторых значений k нам удалось уточнить результаты работы [45] для величин $\zeta_k(\mathbb{R})$. Для величин $\zeta_k(\mathbb{Q})$ получены новые нетривиальные и оптимальные в некотором смысле результаты.

В разделе **4.4** приведены доказательства предложения 1 и теорем 10, 11, 13, 14.

Заключение

Представляются наиболее естественными следующие направления дальнейших исследований. В задаче для величины $m_k(n)$ для $k = 1$ вопрос об улучшении верхней оценки, полученной еще П. Эрдешем в 1964, до сих пор остается открытым. В формулировке теоремы 5 хочется расширить область значения параметра c или хотя бы показать, что в более широкой области значений параметра c имеется предельная концентрация в трех значениях без возможности найти их явно. Также было бы интересно для данной области значений параметра c уменьшить длину отрезка, в которой достигается предельная концентрация в трех значениях.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Шабанову Дмитрию Александровичу и научному консультанту профессору Райгородскому Андрею Михайловичу за постановку задач и неоценимую поддержку в работе. Автор также признателен доктору физико-математических наук Жуковскому Максиму Евгеньевичу за исключительно полезные замечания.

Список работ автора по теме диссертации

[D1] Ю.А. Демидович, "Некоторые обобщения задачи о свойстве B n-однородного гиперграфа," *Фундаментальная и прикладная математика*, **23**:1 (2020), 95–122.

[D2] Ю.А. Демидович, А.М. Райгородский, "Двухцветные раскраски однородных гиперграфов", *Математические заметки*, **100**:4 (2016), 623–626.

[D3] Ю.А. Демидович, Д.А. Шабанов, "О хроматических числах случайных гиперграфов", *Доклады российской академии наук, Математика, информатика, процессы управления,* **494** (2020), 30–34.

[D4] Ю.А. Демидович, "Нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с метрикой ℓ_u с одним запрещенным расстоянием", *Математические заметки*, **102**:4 (2017), 532–548.

[D5] Ю.А. Демидович, "Дистанционные графы в рациональном пространстве с большим хроматическим числом и без клик заданного размера", *Математические заметки*, **106**:1 (2019), 24–39.