На правах рукописи

Тухлиев Камаридин

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Д У Ш А Н Б Е – 2 0 1 7

Работа выполнена в Худжандском государственном университете им. Б. Гафурова

НАУЧНЫЙ КОНСУЛЬТАНТ:	доктор физико-математических наук, академик АН РТ, профессор **Шабозов Мирганд Шабозович**
ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:	**Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич,** доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, профессор кафедры общих проблем управления механико-математического факультета
	Темиргалиев Нурлан Темиргалиевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор Института теоретической математики и научных вычислений Евразийского национального университета им. Л. Гумилева
	Волков Юрий Степанович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:	ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Защита состоится *6 октября 2017 г. в 14:00 часов* на заседании диссертационного совета Д 047.007.02, созданного на базе Института математики им. А. Джураева Академии наук Республики Таджикистан, по адресу: 734063, г. Душанбе, ул. Айни, 299/4, Институт математики им. А. Джураева.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте http://www.mitas.tj Института математики им. А. Джураева АН РТ.

Автореферат разослан "___" ____________ 2017 г.

Учёный секретарь диссертационного совета **Ш.А. Хайруллоев**

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория приближения функций, основы которой были заложены в классических трудах П.Л.Чебышёва и К.Вейерштрасса о наилучшем равномерном приближении функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами, и сегодня является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математики. В начале двадцатого века теория приближения функций стремительно развивалась и сформировалась в отдельную ветвь математического анализа. Фундаментальные результаты, связанные с изучением скорости убывания величины наилучших приближений функций в зависимости от её структурных свойств, были получены в работах А.Лебега, Ш.Ж.Валле-Пуссена, Д.Джексона и С.Н.Бернштейна. В дальнейшем своём развитии теория приближения прошла три этапа: от наилучшего приближения индивидуальных функций на первом этапе до наилучшего приближения классов функций во втором этапе и, наконец, выбора экстремальных приближающихся подпространств на третьем этапе. Этот последний этап связан с именем А.Н.Колмогорова[1], который в 1936 г. ввёл в теорию приближений понятие поперечника множества, известного теперь как поперечник по Колмогорову. Отыскание точного значения колмогоровского поперечника связано с указанием наилучшего приближающегося подпространства заданной размерности – это подпространство, которое реализует поперечник по Колмогорову. Кроме поперечника Колмогорова, в теории приближений используется ряд других поперечников: Бернштейна, Гельфанда, линейный, проекционный и ряда других.

Нахождение точных значений вышеперечисленных величин связано с решением экстремальных задач вариационного содержания и в большинстве случаев является задачами на экстремум: требуется найти точную верхнюю грань погрешности приближения заданным методом на фиксированном классе функций или указать для этого класса наилучший метод приближения.

Цели и задачи исследования. В работе решается ряд конкретных экстремальных задач, связанных с:

- наилучшим приближением периодических функций тригонометрическими полиномами в пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ и отысканием точных констант в неравенстве Джексона – Стечкина (глава I);
- вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями обобщённых модулей непрерывности m-го порядка, определяемых оператором Стеклова (глава I);

[1]Kolmogoroff A.N. Über die besste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionklassen // Ann. of Math., 1936, v.37, pp.107-110.

- наилучшим полиномиальным приближением функций частными суммами Фурье – Бесселя в пространстве $L_2\big([0,1], xdx\big)$ (глава II);
- вычислением точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя (глава II);
- приближением функций, суммируемых с квадратом на всей оси, целыми функциями экспоненциального типа (глава III);
- вычислением точных значений средних ν-поперечников некоторых классов функций, определяемых модулями непрерывности m-го порядка, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ (глава III);
- вычислением верхней грани оценки остатка преобразования Фурье на классах функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (глава III);
- отысканием оптимальных квадратурных формул приближённого интегрирования криволинейных интегралов для некоторых классов функций и кривых (глава IV).

Методы исследования. При решении указанных задач в первой главе в качестве аппарата приближения используются тригонометрические полиномы; во второй главе обобщённые полиномы; в третьей главе применяются целые функции экспоненциального типа. В четвёртой главе при нахождении оптимальных квадратурных формул в смысле С.М.Никольского для приближённого вычисления криволинейных интегралов привлечены тонкие факты функционального анализа вариационного содержания. При доказательстве оптимальности полученных квадратурных формул используется метод Н.П.Корнейчука оценки остатка квадратурных формул на множестве функций, для которых квадратурная сумма обращается в нуль.

Научная новизна исследований. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем:

- найдены точные неравенства Джексона – Стечкина, связывающие величины наилучшего полиномиального приближения периодических функций с обобщённым модулем непрерывности m-го порядка в метрике $L_2[0, 2\pi]$, определяемым оператором Стеклова;
- вычислены точные значения n-поперечников классов периодических функций, задаваемых усреднёнными с весом значениями обобщённых модулей непрерывности m-го порядка в пространстве $L_2[0, 2\pi]$;
- найдено точное неравенство Джексона – Стечкина между величиной наилучшего приближения функции частными суммами Фурье – Бесселя и специальными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми дифференциальным оператором Бесселя второго порядка;

- вычислены точные значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых специальными модулями непрерывности m-го порядка;
- найдено точное неравенство Джексона – Стечкина, связывающее величины среднеквадратического приближения функций, целыми функциями экспоненциального типа с усреднённым весом обобщённым модулем непрерывности m-го порядка;
- вычислены точные значения средних ν-поперечников классов функций, определяемые модулями непрерывности в $L_2(\mathbb{R})$;
- вычислены верхние грани оценки остатка преобразования Фурье на классах функций, задаваемых обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$;
- найдены оптимальные квадратурные формулы в смысле С.М.Никольского приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности;
- найдены оптимальные квадратурные формулы в смысле С.М.Никольского приближённого вычисления криволинейных интегралов для классов функций, у которых норма градиента в L_p, $1 \leq p \leq \infty$ ограничена.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Развитые в ней методы и полученные результаты могут применяться в других экстремальных задачах теории приближений, теории функций многих переменных, оптимизации вычислений многомерных интегралов. Главы диссертации в отдельности могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов высших учебных заведений, обучающихся по специальности математики.

Апробация работы. Основные результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на:

- семинарах отдела теории функций и функционального анализа Института математики им. А.Джураева АН Республики Таджикистан под руководством академика АН РТ М.Ш.Шабозова (Душанбе, 2008-2016 г.);
- международной конференции „Современные проблемы анализа и преподавания математики", посвящённой 105-летию академика С.М.Никольского (Москва, 17-19 мая 2010 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её приложения" (Душанбе, 28-30 июня 2011 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математического анализа и теории функций" (Душанбе, 29-30 июня 2012 г.);

- 4-й международной конференции „Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования", посвящённой 90-летию члена-корреспондента РАН Л.Д.Кудрявцева (Москва, 25-29 марта 2013 г.);
- международной научной конференции „Современные проблемы математики и её преподавания", посвящённой 20-летию Конституции Республики Таджикистан (Худжанд, 28-29 июня 2014 г.);
- международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения -V" (Ростов-на-Дону, 26 апреля – 1 мая 2015 г.);
- IX международной научно-практической конференции "Теоретические и прикладные аспекты современной науки" (Белгород, 31 марта 2015 г.);
- международной конференции „Функциональные пространства и теория приближения функций", посвящённой 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского (Москва, 25-29 мая 2015 г.);
- XII международной Казанской летней Школы-Конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 27 июня по 4 июля 2015 г.);
- м е ж д у н а р о д н о й летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа 2016 г.);
- международной Школы-Конференции „Соболевские чтения" (Новосибирск, 18-22 декабря 2016 г).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 30 печатных работах автора. Из них 20 статьей опубликованы в изданиях, входящих в действующий перечень ВАК Российской Федерации, а 10 статьей в трудах международных конференций. Из совместных с М.Ш.Шабозовым [8, 9, 11, 12] работ на защиту выносятся лишь результаты, полученные лично автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, списка цитированной литературы из 164 наименований, занимает 236 страниц машинописного текста и набрана на LaTeX. Для удобства в диссертации применена сквозная нумерация теорем, лемм, следствий и формул. Они имеют тройную нумерацию, в которой первая цифра совпадает с номером главы, вторая указывает на номер параграфа, а третья на порядковый номер теорем, лемм, следствий или формулы в данном параграфе.

Краткое содержание работы

Первая глава диссертации посвящена экстремальным задачам теории наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0, 2\pi]$. Этот важный раздел теории аппроксимаций уже неоднократно освещался как в отдельных научных статьях, так и в монографической литературе. Наиболее полное изложение этого вопроса дано в монографиях Н.П.Корнейчука[2], В.М.Тихомирова[3], В.И.Иванова и О.И.Смирнова[4]. В этом направлении некоторые результаты окончательного характера ранее были получены в работах Н.И.Черных[5], Л.В.Тайкова[6,7], А.А.Лигуна[8], В.А.Юдина[9], В.В.Арестова и В.Ю.Попова[10], А.Г.Бабенко[11,12], В.И.Иванова[13,14], В.В.Шалаева[15], С.Б.Вакарчука[16,17], С.Н.Васильева[18], А.И.Козко и А.В.Рождественского[19], М.Ш.Шабозова[20,21]

---

[2]Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987, 424 с.

[3]Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.: МГУ, 1976, 325 с.

[4]Иванов В.И., Смирнов О.И. Константы Джексона и константы Юнга в пространствах L_p. – Тула: ТулГУ, 1995, 192 с.

[5]Черных Н.И. Неравенство Джексона в $L_p(0, 2\pi)$ $(1 \le p < 2)$ с точной константой // Труды МИРАН, 1992, т.198, с.232-241.

[6]Тайков Л.В. Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Матем. заметки, 1976, т.20, №3, с.433-438.

[7]Тайков Л.В. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 // Матем. заметки, 1979, т.25, №2, с.217-223.

[8]Лигун А.А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Матем. заметки, 1978, т.24, №6, с.785-792.

[9]Юдин В.А. Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки, 1981, т.29, №2, с.309-315.

[10]Арестов В.В., Попов В.Ю. Неравенство Джексона на сфере в L_2 // Известия вузов. Математика, 1995, №8, С.13-20.

[11]Бабенко А.Г. О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки, 1986, т.39, №5, с.651-664.

[12]Бабенко А.Г. Точное неравенство Джексона – Стечкина в пространстве L^2-приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах // Известия РАН. Серия матем., 1998, т.62, №6, с.27-52.

[13]Иванов А.В., Иванов В.И. Теория Данкля и теорема Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Труды ИММ УрО РАН, 2010, т.16, №4, с.180-192.

[14]Иванов А.В., Иванов В.И. Оптимальные аргументы в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ со степенным весом // Мат. заметки, 2013, т.94, №3, с.338-348.

[15]Шалаев В.В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. матем. журнал, 1991, т.43, №1, с.125-129.

[16]Вакарчук С.Б. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Матем. заметки, 2005, т.78, №5, с.792-796.

[17]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Точное неравенство типа Джексона-Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов // Матем. заметки, 2009, т.86, №3, с.328-336.

[18]Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН, 2002, т.385, №1, с.11-14.

[19]Козко А.И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сборник, 2004, т.195, №8, с.3-46.

[20]Шабозов М.Ш. Поперечники некоторых классов периодических дифференцируемых функций в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ // Матем. заметки, 2010, т.87, №4, с.616-623.

[21]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π-периодических функций и точные значения их поперечников // Матем. заметки, 2011, т.90, №5, С.764-775.

и других математиков. Полученные в первой главе результаты являются своеобразным развитием некоторых идей, содержащихся в цитированных выше работах. Здесь изложены неулучшаемые неравенства между величинами наилучших полиномиальных приближений 2π-периодических функций и усреднёнными с весом обобщёнными модулями непрерывности m-го порядка, определяемыми оператором Стеклова. Полученные результаты отличаются от имеющихся тем, что почти все неравенства теории наилучших приближений приведены с конкретными постоянными. Таким образом, решаются вопросы, связанные с нахождением точных постоянных в неравенствах Джексона – Стечкина, с построением и изучением методов приближения, реализующих эти оценки.

Приведём нужные нам в дальнейшем определения и обозначения.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+$ — множество всех положительных чисел вещественной оси. Пусть L_2 — пространство измеримых и суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\| \overset{def}{=} \|f\|_{L_2} := \left(\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

При решении некоторых экстремальных задач теории приближения для изучения структурных и конструктивных свойств функции $f \in L_2$ в последнее время часто используют различные модификации обычного модуля непрерывности m-го порядка $\omega_m(f,t)_2$.

Для описания приведенной ниже модификации модуля непрерывности, исходя из определения функции (оператора) Стеклова

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} f(x+\tau)d\tau, \ h > 0,$$

полагаем $S_{h,i}(f) \overset{def}{=} S_h\big(S_{h,i-1}(f)\big)$, где $i \in \mathbb{N}$ и $S_{h,0}(f) \equiv f$. Обозначив через $\mathbb{I}$ — единичный оператор в L_2, определим конечные разности m $(m \in \mathbb{N})$-го порядка

$$\Delta_h^m(f,x) \overset{def}{=} \Delta_h^1\left(\Delta_h^{m-1}(f,\cdot),x\right) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} S_{h,i}(f,x). \qquad (1)$$

Используя указанные обозначения, введём следующую характеристику гладкости функции $f \in L_2$

$$\Omega_m(f,t) \overset{def}{=} \sup\Big\{ \|\Delta_h^m(f)\| : \ 0 < h \le t \Big\}, \qquad (2)$$

которую назовём *обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.*

Через $\Im_{2n-1}$ обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$. Известно, что для произвольной функции $f\in L_2$ величина её наилучшего приближения элементами подпространства $\Im_{2n-1}$ равна

$$E_{n-1}(f):=\inf\left\{\|f-T_{n-1}\|:\ T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\right\}=\|f-s_{n-1}(f)\|=\left\{\sum_{j=n}^{\infty}\rho_j^2(f)\right\}^{1/2},$$

где $s_{n-1}(f)$ – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции f, $\rho_j^2(f)\overset{def}{=}a_j^2(f)+b_j^2(f)$, $j\in\mathbb{N}$, $a_j(f),b_j(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты Фурье функции f.

Полученные в первой главе результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля, которая для $f\in L_2$ определяется равенством

$$f^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^{\alpha}\left\{a_k\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}.$$

Далее, через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha\geq 0$, $L_2^{(0)}\equiv L_2$) обозначим множество функций $f\in L_2$, у которых существует производная Вейля $f^{(\alpha)}\in L_2$ $(\alpha\geq 0)$.

Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)};x)$ $(\alpha\geq 0)$ – частичная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)}\in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)})=\inf\left\{\|f^{(\alpha)}-T_{n-1}\|:\ T_{n-1}\in\Im_{2n-1}\right\}=$$

$$=\|f^{(\alpha)}-s_{n-1}(f^{(\alpha)})\|=\left(\sum_{k=n}^{\infty}k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2}.$$

Всюду далее полагаем

$$\operatorname{sinc} t:=\left\{\frac{\sin t}{t},\quad \text{если}\quad t\neq 0;\quad 1,\quad \text{если}\quad t=0\right\}.$$

Несложное вычисление показывает, что для произвольной $f\in L_2^{(\alpha)}$

$$\Omega_m^2(f^{(\alpha)},t)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\left(1-\operatorname{sinc} kh\right)^{2m}:\ |h|\leq t\right\}.$$

Для компактного изложения последующих результатов вводим в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m,q,h)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}},\tag{3}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq \pi/n$, $q \geq 0$ — весовая функция на отрезке $[0, h]$. Отметим, что величина (3) при $\alpha \in \mathbb{N}$ была исследована в работах[22,23] и при различных значениях параметров m, p и конкретных весовых функциях q многими другими математиками.

Отметим, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанные с понятием дробной производной в смысле Вейля ранее рассматривались в работах А.И.Козко[24], М.Г.Есмаганбетова[25], М.Ш.Шабозова и С.Д.Темурбекова[26], Г.А.Юсупова[27] и др.

Основным результатом второго параграфа первой главы является

Теорема 1.2.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \geq 0$, $0 < p \leq 2$, $0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, q *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1} \leq \chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) \leq \left\{\inf_{n\leq k<\infty} A_{k,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1}, \qquad (4)$$

где

$$A_{k,m,\alpha,p}(q,h) = \left(k^{\alpha p}\int\limits_0^h (1-\sin ckt)^{mp}\, q(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \geq n.$$

Отметим, что двустороннее неравенство (4) для обычных модулей непрерывности m-го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)$, $r \in \mathbb{N}$, $0 < t \leq 3\pi/(4n)$, при $p = 2$ было доказано А.А.Лигуном[8], а в случае $0 < p \leq 2$ М.Ш.Шабозовым и Г.А.Юсуповым[21]. Теорема 1.2.1 является распространением результата[23] для специального модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(\alpha)}, t)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < t \leq \pi$.

В связи с утверждением теоремы 1.2.1 возникает естественный вопрос: выяснить условия, при выполнении которых будет иметь место соотношение

$$\inf_{n\leq k<\infty} A_{k,m,\alpha,p}(q,h) = A_{n,m,\alpha,p}(q,h). \qquad (5)$$

Ответ на поставленный вопрос содержится в следующем утверждении.

[22] Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников некоторых классов функций в L_2 // Сибир. матем. журнал, 2011, т.52, №6, С.1414-1427.

[23] Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства типа Джексона-Стечкина для специальных модулей непрерывности и поперечники функциональных классов в пространстве L_2 // Матем. заметки, 2012, т.92, №4, С.497-514.

[24] Козко А.И. Дробные производные и неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с несимметричной нормой // Изв. РАН. Серия математическая. 1998. Т.62. №6. С.125-142.

[25] Есмаганбетов М.Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Матем. заметки, 1999, т.65, №6, С.816-820.

[26] Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. Значения поперечников классов функций из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Известия Тульского госуниверситета, Естественные науки, 2012, вып.3, С.60-68.

[27] Юсупов Г.А. Структурные и конструктивные характеристики функций из L_2 и значение поперечников некоторых функциональных классов // Известия Тульского госуниверситета, Естественные науки, 2015, №3, С.127-144.

Теорема 1.2.2. *Пусть* q *– весовая функция на отрезке* $[0,h]$ *(*$0 < h \leq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$*) является дифференцируемой. Если при некотором* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 1$, $1/\alpha \leq p \leq 2$ *и любых* $t \in (0,h)$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)q(t) - tq'(t) \geq 0, \tag{6}$$

то справедливо соотношение (5) *и, следовательно,*

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\int\limits_0^h (1 - sinc\; nt)^{mp}\, q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Из теоремы 1.2.2, в частности, вытекает

Следствие 1.2.2. *В условиях теоремы* 1.2.2 *при* $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, $q(t) = 1$, $\alpha > m$ *имеет место равенство:*

$$\chi_{n,\alpha,1/m}(\Omega_m, 1, h) = \frac{1}{n^{\alpha-m}}\Big(nh - Si(nh)\Big)^{-m},$$

где $Si(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin u}{u} du$ *– интегральный синус.*

В третьем параграфе рассмотрена экстремальная задача (3) в более общей ситуации, для классов свёрток, причём для доказательство соотношение (5) не требуется выполнения дифференциального неравенства (6), а требуется накладывать некоторое ограничение на поведение весовой функции q.

Рассматриваются функции $f \in L_2$, представимые в виде свёртки

$$f(x) \overset{def}{=} (\mathcal{K} * \varphi)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(x-t)\varphi(t)dt, \tag{7}$$

где $\mathcal{K} \in L_2$ – некоторая фиксированная функция (ядро), а φ будет пробегать некоторое подмножество функций из L_2. Пусть

$$\mathcal{K}(t) \sim \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l e^{ilt}, \quad a_l = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathcal{K}(t)e^{-ilt}dt, \quad l \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

$$\varphi(t) \sim \sum_{l=-\infty}^{+\infty} b_l e^{ilt}, \quad b_l = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)e^{-ilt}dt, \quad l \in \mathbb{Z}$$

— ряды Фурье этих функций. Очевидно ряд Фурье свёртки (7) имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_k e^{ikx}. \tag{9}$$

При этом

$$E_{n-1}(f) = \|f - s_{n-1}(f)\| = \left(\sum_{|k|\geq n} |a_k b_k|^2\right)^{1/2}, \quad s_{n-1}(f,x) = \sum_{|k|\leq n-1} a_k b_k e^{ikx}.$$

Для изучения аппроксимативных свойств свёртки (7) вводится в рассмотрение экстремальная характеристика

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m, q, h) = \sup_{\substack{\varphi\in L_2 \\ \varphi\neq const}} \frac{|a_n|^{-1} E_{n-1}(\mathcal{K} * \varphi)}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi, t) q(t) dt\right)^{1/p}}, \tag{10}$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{R}_+,\ 0 < h \leq \pi/n,\ a_n = a_n(\mathcal{K})$ — n-й коэффициент Фурье функции $\mathcal{K}$ (см. (8)), q — весовая функция на отрезке $[0, h]$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $0 < p \leq 2$, *коэффициенты Фурье* $a_k := a_k(\mathcal{K})$ *ядро* $\mathcal{K} \in L_2$ *удовлетворяют условиям*

$$|a_0| \neq 0, \quad |a_k| k^{1/p} \geq |a_{k+1}|(k+1)^{1/p}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Пусть $h > 0$. *Если* $q \geq 0$ *— невозрастающая весовая функция на* $[0, h]$, *то величина* (10) *при любых* $m, n \in \mathbb{N}$ *и* $0 < h \leq 3\pi/(4n)$ *удовлетворяет равенству*

$$\mathcal{M}_{n,p}(\Omega_m, q, h) = \left(\int\limits_0^h (1 - sinc\ nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p}. \tag{12}$$

Существует свёртка $f_0 := (\mathcal{K} * \varphi_0)$, $\varphi_0 \in L_2$, $\varphi_0 \neq const$, *реализующая верхнюю грань в* (10), *равная правой части* (12).

Отметим, что условие (11) при решении экстремальных задач теории полиномиального приближения функции $f \in L_2$ впервые появилось у A.Pinkus (см., например, монографию[28]), в случае $q(t) \equiv 1$. Результат теоремы 1.3.1 в известном смысле является обобщением указанного результата A.Pinkus для усреднённых значений модуля непрерывности Ω_m.

[28]Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory. — Berlin: Springer-Verlag, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985, 252 p.

В четвёртом параграфе вычисляются значения n-поперечников некоторых классов функций, задаваемых модулем непрерывности $\Omega_m(\varphi, t)$.

Всюду далее в работе рассматриваются различные гильбертовы пространства. Поэтому мы приводим определения рассматриваемых нами в дальнейшем n-поперечников в произвольном гильбертовом пространстве H.

Пусть S — единичный шар в пространстве H; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из H; $\Lambda_n \subset H$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset H$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : H \to \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор; $\mathscr{L}^\perp : H \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, H) = \sup\left\{\sup\left\{\varepsilon > 0,\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_{n+1} \subset H\right\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, H) = \inf\left\{\sup\left\{\|f\| : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n\right\} : \Lambda^n \subset H\right\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, H) = \inf\left\{\sup\left\{\inf\left\{\|f - g\| : g \in \Lambda_n\right\} : f \in \mathfrak{M}\right\} : \Lambda_n \subset H\right\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, H) = \inf\left\{\inf\left\{\sup\left\{\|f - \mathscr{L} f\| : f \in \mathfrak{M}\right\} : \mathscr{L} H \subset \Lambda_n\right\} : \Lambda_n \subset H\right\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, H) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f - \mathscr{L}^\perp f\| : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^\perp H \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset H\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, гельфандовским, колмогоровским, линейным, проекционным n-поперечниками.*

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < h \le 3\pi/(4n)$, $0 < p \le 2$ и q — неотрицательная, непрерывная и неубывающая весовая функция на отрезке $[0, h]$. В пространстве L_2 определим класс функций

$$W \overset{def}{=} W(m, p, q, h, \mathcal{K}) = \left\{\mathcal{K} * \varphi : \int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi, t) q(t) dt \le 1\right\}.$$

Пусть $\Phi(t) \ge 0$ — произвольная возрастающая на $[0, \infty)$ функция, такая, что $\Phi(0) = 0$. При тех же ограничениях на параметры m, n, p и $0 < h \le 2\pi$ в случае, когда весовая функция $q \equiv 1$, введём в рассмотрение класс функций

$$W(\Phi, \mathcal{K}) \overset{def}{=} W(m, p, \Phi, \mathcal{K}) = \left\{\mathcal{K} * \varphi : \frac{1}{h}\int\limits_0^h \Omega_m^p(\varphi, t) dt \le \Phi^p(h)\right\}.$$

Теорема 1.4.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, q — непрерывная невозрастающая весовая функция на отрезке $[0, h]$, коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ функции $\mathcal{K} \in L_2$ удовлетворяют условиям* (11) *теоремы* 1.3.1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W, L_2) = \lambda_{2n-1}(W, L_2) = E_{n-1}(W)_{L_2} = |a_n| \left(\int\limits_0^h (1 - sinc\ nt)^{mp} q(t) dt\right)^{-1/p},$$

где
$$E_{n-1}(W)_2 = \sup\Big\{E_{n-1}(f)_2 :\ f \in W\Big\},$$
$\lambda_k(\cdot)$ — *любой из перечисленных выше k-поперечников.*

Рассмотрим одно конкретное применение теоремы 1.4.1.

Пусть $r \in \mathbb{R}_+$ $(r > 1)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное действительное число. Положим
$$\mathscr{B}_{r,\alpha}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\Big(kx - \frac{\alpha\pi}{2}\Big). \tag{13}$$
При $r = \alpha$, $r, \alpha \in \mathbb{N}$ функция (13) есть многочлен Бернулли. Обозначим через $W_\alpha^{(r)} L_p$, $r \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$ класс непрерывных периодических функций f, допускающих представление
$$f(x) = C + \big(\mathscr{B}_{r,\alpha} * \varphi\big)(x), \tag{14}$$
где $C \in \mathbb{R}$, $\varphi \in L_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $\varphi \perp \mathrm{const}$. Из представления (14), в частности, следует[29], что если $r = \alpha$, $r, \alpha \in \mathbb{R}_+$, то $\varphi(t) = f^{(r)}(t)$ – производная дробная порядка r в смысле Вейля, а $W_r^{(r)} L_2$ $(r \in \mathbb{R}_+)$ есть класс функций $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{R}_+)$, у которых дробная производная $f^{(r)}$ в смысле Вейля удовлетворяет условию $\|f^{(r)}\| \le 1$. Положим
$$W^{(r)}(h,q) \overset{def}{=} \left\{ f : f \in W_\alpha^{(r)} L_2,\ \int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t) q(t) dt \le 1 \right\}.$$

Поскольку коэффициенты ядра $\mathscr{B}_{r,\alpha}(r \in \mathbb{R}_+,\ \alpha \in \mathbb{R})$ удовлетворяют соотношениям $|a_n| = n^{-r}$ $(n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{R}_+,\ r > 1)$, то неравенство $|a_j| j^{1/p} \ge |a_{j+1}|(j+1)^{1/p}$, $j \in \mathbb{N}$, выполняется для $1/r < p \le 2$ $(r > 1,\ r \in \mathbb{R}_+)$. В силу теоремы 1.4.1 мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 1.4.1. *При любых* $m, n \in \mathbb{N}$, $1/r < p \le 2$ $(r \in \mathbb{R}_+,\ r > 1)$ *и* $0 < h \le \pi/n$ *справедливы равенства*
$$\lambda_{2n}(W^{(r)}(h,q), L_2) = \lambda_{2n-1}(W^{(r)}(h,q), L_2) = E_{n-1}(W^{(r)}(h,q))_{L_2} =$$
$$= n^{-r} \left\{ \int_0^h (1 - \mathrm{sinc}\ nt)^{pm}\, q(t) dt \right\}^{-1/p}.$$

Полагая в точке $t = 0$ значение функции $\mathrm{sinc}\ t$ равным 1, следуя работу[22], через t_* обозначим значение аргумента $\mathrm{sinc}\ t$, при котором она достигает наименьшего значения на множестве $\mathbb{R}_+$. Заметим, что число t_* является

[29]Стечкин С.Б. О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т.20, №5, С.643-648.

наименьшим положительным корнем уравнения $t = \operatorname{tg} t$. Легко вычислить, что $4,49 < t_* < 4,51$. Далее вводим обозначение

$$\big(1 - \text{sinc } t\big)_* := \Big\{\ 1 - \text{sinc } t, \text{ если } 0 < t \le t_*, \quad 1 - \text{sinc } t_*, \text{ если } t_* \le t < \infty\Big\}.$$

Теорема 1.4.2. *Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p \le 2$ и мажоранта Φ при любых значениях $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет ограничению*

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi\left(\pi/n\right)}\right)^p \ge \frac{\pi}{nh} \int\limits_0^{nh} (1 - sinc\ t)_*^{mp}\, dt \left(\int\limits_0^{\pi} (1 - sinc\ t)^{mp}\, dt\right)^{-1}. \qquad (15)$$

Коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ функции (ядро) $\mathcal{K}$ удовлетворяют условиям (11) *теоремы* 1.3.1. *Тогда справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi,\mathcal{K}), L_2) = \lambda_{2n-1}(W(\Phi,\mathcal{K}), L_2) = E_{n-1}(W(\Phi,\mathcal{K}))_{L_2} =$$

$$= |a_n|\cdot\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (1 - sinc\ \tau)^{mp}\, d\tau\right\}^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_k(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. При этом множество мажорант, удовлетворяющих ограничению (15)*, не пусто.*

Из теоремы 1.4.2 в случае $\mathcal{K} \equiv \mathscr{B}_{r,r}$ $(r \in \mathbb{R}_+, 1/r < p \le 2, r \ge 1)$ вытекает

Следствие 1.4.2. *В условиях теоремы* 1.4.2 *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W(\Phi,\mathscr{B}_{r,r}), L_2) = \lambda_{2n-1}(W(\Phi,\mathscr{B}_{r,r}), L_2) = E_{n-1}(W(\Phi,\mathscr{B}_{r,r}))_{L_2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} (1 - sinc\ \tau)^{mp}\, d\tau\right\}^{-1/p} n^{-r}\,\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

В качестве второй модификации классического модуля непрерывности в пятом параграфе первой главы рассматривается усреднённая характеристика гладкости функции $f \in L_2$

$$\Lambda_m(f,t) := \left\{\frac{1}{t}\int\limits_0^{t} \left\|\bar{\Delta}_h^m(f)\right\|^2 dh\right\}^{1/2}, \quad t \in \mathbb{R}_+, \qquad (16)$$

ранее введённая в работах К.В.Руновского[30] и Н.Н.Пустовойтова[31].

[30] Руновский К.В. О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах $L_p, 0 < p < 1$ // Матем. сборник, 1994, т.185, №8, С.81-102.

[31] Пустовойтов Н.Н. Оценка наилучших приближений периодических функций тригонометрическими полиномами через усреднённые разности и многомерная теорема Джексона // Матем. сборник. 1997. Т. 188, № 10. С.95-108.

Основные свойства характеристики (16) подробно изучены в работе[32].

С целью отыскания точной константы в неравенстве Джексона – Стечкина вводится экстремальная характеристика

$$\chi_{m,n,\alpha}(L_2,t)=\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\Lambda_m\left(f^{(\alpha)},\dfrac{t}{n}\right)},$$

где $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $f^{(0)}\equiv f$, $L_2^{(0)}\equiv L_2$, $0<t\le 2\pi$.

Теорема 1.5.1. *При* $\alpha\ge 1/2$ *справедливо равенство*

$$\chi_{m,n,\alpha}(L_2,t)=\left(\frac{2^m}{t}\int\limits_0^t(1-\cos\tau)^m d\tau\right)^{-1/2}, \tag{17}$$

В частности,

$$\chi_{m,n,\alpha}(L_2,\pi)=\left(C_{2m}^m\right)^{-1/2}. \tag{18}$$

Отметим, что из (17) при $m=1$ вытекают равенства

$$\chi_{1,n,\alpha}(L_2,t)=\left[2\left(1-\operatorname{sinc}t\right)\right]^{-1/2},\quad \chi_{1,n,\alpha}(L_2,\pi)=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{19}$$

Равенства (18) и (19) являются в известном смысле аналогами хорошо известных результатов Н.И.Черных[33] для функции $f\in L_2^{(\alpha)}$.

Следующую далее теорему 1.5.2 можно рассматривать как распространение и обобщение результата работы[21] в рассматриваемом нами случае использования характеристики гладкости Λ_m.

Теорема 1.5.2. *Пусть* $m,n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le 2$, $h\in(0,2\pi/n]$ *– произвольное число,* q *— весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{\eta_{n,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1}\le\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right)^{1/p}}\le\left\{\inf_{n\le k<\infty}\eta_{k,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1},$$

[32]Вакарчук С.Б., Забутная В.И. Неравенства между наилучшими полиномиальными приближениями и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве L_2 и поперечники классов функций // Матем. заметки, 2016, т.99, №2, С.215-238.

[33]Черных Н.И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки, 1967, т.2, №5, С.513-522.

где

$$\eta_{k,m,\alpha,p}(q,h)=\left\{k^{\alpha p}\int\limits_0^h \big(J_{1,m}(kt)\big)^{p/2}q(t)dt\right\}^{1/p}, \quad J_{k,m}(u)=\frac{1}{u}\int\limits_0^u(1-\cos k\tau)^m d\tau.$$

Рассмотрим ряд следствий, вытекающих из теоремы 1.5.2.

Следствие 1.5.1. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le 2$, $0<h\le 3\pi/(4n)$, q *— весовая функция на отрезке* $[0,h]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq\text{const}}}\frac{\sqrt{2}n^{\alpha}E_{n-1}(f)}{\left\{\int\limits_0^h\Lambda_1^p(f^{(\alpha)},t)q(t)dt\right\}^{1/p}}=\frac{1}{\left\{\int\limits_0^h\big(1-\operatorname{sinc}\, nt\big)^{p/2}q(t)dt\right\}^{1/p}}.$$

Следствие 1.5.2. *Пусть* $n,m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $1/\alpha<p\le 2$, $\alpha\ge 1$ *и пусть* $h\in(0,2\pi/n]$, *вес* $q\equiv 1$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\frac{2^{m/2}E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\eta_{n,m,\alpha,p}(1,h)}. \tag{20}$$

В частности, из (20) *при* $m=1,\ p=2,\ h=\pi/n$ *имеем*

$$\sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq const}}\frac{E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_1^2(f^{(\alpha)},t)dt\right)^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\frac{1}{\sqrt{n-Si(\pi)}}.$$

В шестом параграфе первой главы найдены некоторые неравенства между наилучшими приближениями классов функций, определённых в виде свёртки (7) и характеристиками гладкости (16) функций $\varphi\in L_2$.

Для свёртки (7) введём в рассмотрение экстремальную характеристику

$$M'_{n,p}\big(\Lambda_m,q,h\big)=\sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \varphi\neq\text{const}}}\frac{2^{m/2}|a_n|^{-1}E_{n-1}(\mathcal{K}*\varphi)}{\left(\int\limits_0^h\Lambda_m^p(\varphi,t)q(t)dt\right)^{1/p}}. \tag{21}$$

Сформулированное ниже утверждение можно рассматривать как обобщение и распространение результатов работы[8,21,23] на рассматриваемый нами случай использования характеристики гладкости (16). Имеет место

Теорема 1.6.1. *Пусть $0 < p \le 2$, коэффициенты Фурье $a_k := a_k(\mathcal{K})$ функции $\mathcal{K} \in L_2$ удовлетворяют условиям* (11). *Пусть $h > 0$. Если q — невозрастающая весовая функция на $[0, h]$, то величина* (21) *при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и $0 < h \le 3\pi/(4n)$ удовлетворяет равенству*

$$M'_{n,p}\big(\Lambda_m, q, h\big) = \left(\int\limits_0^h \big(J_{n,m}(t)\big)^{p/2} q(t)dt\right)^{-1/p}. \tag{22}$$

Существует свёртка $f_0 := (\mathcal{K} * \varphi_0)$, $\varphi_0 \in L_2$, $\varphi_0 \ne const$, реализующая верхнюю грань в (21), *равная правой части* (22).

В седьмом параграфе данной главы приведена одна общая теорема о вычислении точных значений всех перечисленных в параграфе 1.4 n-поперечников класса функций

$$W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K}, \Phi) := W_p(\Lambda_1, \mathcal{K}, \Phi) = \left\{(\mathcal{K} * \varphi) : \int\limits_0^h \Lambda_1^p(\varphi, t)dt \le \Phi(h)\right\},$$

где $0 < p \le 2$, $h \in (0, 2\pi]$, $\Phi(h) \in C(\mathbb{R}_+)$, такая, что $\Phi(0) = 0$.

Теорема 1.7.1. *Пусть $0 < p \le 2$ и коэффициенты $a_k := a_k(\mathcal{K})$ ядра $\mathcal{K}$ удовлетворяют неравенствам* (11). *Если при любых значениях $0 < h \le 2\pi$ и $n \in \mathbb{N}$ мажоранта Φ удовлетворяет условию*

$$\frac{\Phi^p(h)}{\Phi^p(\pi/n)} \ge \int\limits_0^{nh} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2}\, dt \left(\int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2}\, dt\right)^{-1}, \tag{23}$$

то при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\lambda_{2n}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) = \lambda_{2n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) = E_{n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} =$$
$$= \frac{|a_n| n^{1/p}}{\sqrt{2}} \left(\int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{p/2}\, dt\right)^{-1/p} \Phi\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$. При этом множество мажорант Φ, удовлетворяющих неравенству (23), *не пусто. Указанному неравенству удовлетворяет, например, функция $\Phi(t) := t^{\beta/p}$, где*

$$\beta := \pi \left\{\int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} \tau)^{p/2}\, d\tau\right\}^{-1}.$$

Следствие 1.7.1. *В условиях теоремы* 1.7.1 *справедливы равенства*

$$\lambda_{2n}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K},\Phi_*),L_2)=\lambda_{2n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K},\Phi_*),L_2)=$$

$$=E_{n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathcal{K},\Phi_*))_{L_2}=|a_n|\,\beta^{1/p}\big(\sqrt{2}\big)^{-1}(\pi/n)^{(\beta-1)/p}.$$

Отметим, что из теоремы 1.7.1 в случае, когда ядро $\mathcal{K}\equiv\mathscr{B}_{r,\alpha}$ ($r\in\mathbb{R}_+$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $1/\alpha<p\le 2$) определено равенством (13) и $|a_n|=n^{-\alpha}$, вытекает

Следствие 1.7.2. *В условиях теоремы* 1.7.1 *имеют место равенства*

$$\lambda_{2n}(W_{p,\Lambda_1}(\mathscr{B}_{r,\alpha},\Phi),L_2)=\lambda_{2n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathscr{B}_{r,\alpha},\Phi),L_2)=$$

$$=E_{n-1}(W_{p,\Lambda_1}(\mathscr{B}_{r,\alpha},\Phi))_{L_2}=\frac{1}{\sqrt{2}n^{\alpha-1/p}}\left(\int\limits_0^{\pi}(1-\sin ct)^{p/2}\,dt\right)^{-1/p}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Вторая глава диссертационной работы посвящена решению некоторых экстремальных задач приближения функций частичными суммами ряда Фурье – Бесселя в пространстве $L_2:=L_2[(0,1),xdx]$ суммируемых с квадратом функций $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ с весом x и вычислением значения поперечников некоторых функциональных классов.

В задачах электродинамики, небесной механики и современной прикладной математики, чаще всего используются ряды Фурье по ортогональным системам специальных функций[34,35]. При этом требуется выяснить условия разложения функций в ряды Фурье по указанным специальным функциям, образующим на заданном отрезке полную ортогональную систему. Не менее важным является изучение оценки скорости сходимости указанных разложений в ряды Фурье по специальным функциям. В качестве примера укажем на работу В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[36], где изучаются вопросы приближения функций частичными суммами Фурье – Бесселя, доказаны прямые и обратные теоремы, получены оптимальные по порядку величины наилучшего приближения, а также работу В.И.Иванова, Д.В.Чертова и Лю Юнпин[37], в которой в пространстве $L_{2,\nu}:=L_2\big([-1,1],|x|^{2\nu+1}dx\big)$ на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом $|x|^{2\nu+1}$, $\nu>-1/2$ определяются полная ортогональная система, величина наилучшего приближения по этой системе, обобщённый модуль непрерывности и доказывается точное неравенство Джексона – Стечкина.

[34]Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.I. – М.: ИЛ. 1949. 800 с.

[35]Владимиров В.С. Уравнения математической физики. 4-е изд. – М.: Наука. 1981. 512 с.

[36]Абилов В.А., Абилова Ф.В. Приближение функций суммами Фурье-Бесселя // Известия вузов. Математика, 2001, т.18, №8, С.3-9.

[37]Иванов В.И., Чертова Д.В., Лю Юнпин. Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 на отрезке $[-1,1]$ со степенным весом // Труды Института матем. и мех. УрО РАН, 2008, т.14, №3, С.112-126.

Во второй главе нами доказано точное неравенство типа Джексона – Стечкина на множестве $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, связывающее величину $E_{n-1}(f)_2$ – наилучшего приближении функции f частичными суммами порядка $n-1$ ряда Фурье – Бесселя, с усреднённым весом обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)$, где $\mathcal{D} := \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{d}{dx} - \dfrac{\nu^2}{x^2}$ – дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν. Конструкция обобщённого модуля непрерывности m-го порядка $\widetilde{\Omega}_m(\mathcal{D}^r f, t)$ основана на использовании конкретного оператора сдвига.

В классической теории приближения функций центральную роль играют операторы сдвига $f(x) \to f(x+h)$. Так, например, к числу операторов сдвига на бесконечно малом отрезке можно отнести оператор дифференцирования. Преобразование Фурье представляет собой разложение по собственным функциям оператора сдвига. В общем, в задачах приближения оператор сдвига используется для построения модулей непрерывности и гладкости, которые играют важную роль при доказательстве прямых и обратных теорем.

Построенные по операторам сдвига обобщённые модули гладкости могут быть лучше приспособлены для изучения связей между гладкостными свойствами функции и наилучшими приближениями этой функции в весовых функциональных пространствах, чем обычные модули гладкости. Некоторые результаты о решениях экстремальных задач теории приближении функций в пространстве L_2 с использованием обобщённых модулей непрерывности и гладкости изложены в работах А.Г.Бабенко[38], С.Н.Васильева[39], А.И.Козко и А.В.Рождественского[40], Н.А.Барабошкиной[41], М.К.Потапова[42], В.А.Абилова и Ф.В.Абиловой[36,43], В.А.Абилова, Ф.В.Абиловой и М.К.Керимова[44], М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[21], С.Б.Вакарчука и В.И.Забутной[23] и других.

Переходим к изложению основных результатов второй главы работы.

В первом параграфе второй главы приводятся нужные для дальнейшего определения, известные факты и вычисляются точные верхние грани наилуч-

[38]Бабенко А.Г. О неравенстве Джексона – Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Труды Института матем. и мех. УрО РАН, 2001, т.7, №1, С.30-46.

[39]Васильев С.Н. Точное неравенство Джексона-Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечноразностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН, 2002, т.385, №1, С.11-14.

[40]Козко А.И., Рождественский А.В. О неравенстве Джексона в L_2 с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сборник, 2004, т.195, №8, С.3-46.

[41]Baraboshkina N.A. The Least Constant in Jackson's Inequality for Best Approximations of Functions in L^2 by Finite-Dimensional Subspaces // Proceedings of the Steklov Inst. of Math. Suppl. 2004, №1. P.S128-S136.

[42]Потапов М.К. О применении одного оператора обобщённого сдвига в теории приближений // Вестник Московского ун-та. Серия 1. Матем., мех., 1998, №3, С.38-48.

[43]Абилов В.А., Абилова Ф.В. Об одной квадратурной формуле // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2002, т.42, №4. С.451-458.

[44]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье на некоторых классах функций в пространстве $L_2[(a,b);p(x)]$ // ЖВМФ, 2009, т.49, №6, С.966-980.

ших приближений суммами Фурье – Бесселя в пространстве $L_2([0,1], xdx)$.

Пусть $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса ν, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$. Функции $J_\nu(x)$ являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля[42]

$$-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{du}{dx}\right) + \frac{\nu^2}{x^2}u = \lambda u, \quad 0 < x < 1, \quad |u(0)| < +\infty, u(1) = 0,$$

отвечающими собственным значениям $\left\{\lambda_k^2\right\}_{k=1}^{\infty}$. При этом система функций $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ является полной и ортогональной в пространстве суммируемых с квадратом функций f с весом x на отрезке $[0,1]$.

Пусть $L_2 := L_2([0,1]; xdx)$ — пространство суммируемых с квадратом функций f с весом x и конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int\limits_0^1 xf^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Наши дальнейшие исследования базируются на свойствах ортогональности системы $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = 0, \ k \neq m, \ \int\limits_0^1 xJ_\nu^2(\lambda_k x)dx = \frac{1}{2}J_\nu'^2(\lambda_k),$$

откуда вытекает, что система функций $\left\{\sqrt{2}J_\nu(\lambda_k x) \cdot |J_\nu'(\lambda_k)|^{-1}\right\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве L_2. Ради простоты, без умаления общности, не вводя новые обозначения, через $\{J_\nu(\lambda_k x)\}_{k=1}^{\infty}$ обозначим полную ортонормированную систему в пространстве L_2, для которой

$$\int\limits_0^1 xJ_\nu(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_m x)dx = \Big\{0, \text{ если } \quad k \neq m; \quad 1, \text{ если } \quad k = m\Big\}.$$

Для произвольной функции $f \in L_2$ рассмотрим разложение в ряд Фурье – Бесселя следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x), \quad c_k(f) = \int\limits_0^1 xf(x)J_\nu(\lambda_k x)dx \tag{24}$$

— коэффициенты Фурье – Бесселя. Пусть

$$\sigma_{n-1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n-1} c_k(f)J_\nu(\lambda_k x)$$

— частичная сумма $(n-1)$-го порядка ряда Фурье – Бесселя (24).

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ — обозначим подпространство обобщенных полиномов вида

$$p_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k J_\nu(\lambda_k x).$$

Тогда для величины наилучшего приближения $f \in L_2$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ справедливо равенство

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\| : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\} = \|f - \sigma_{n-1}(f)\| = \left\{\sum_{k=n}^{\infty} c_k^2(f)\right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим дифференциальный оператор Бесселя второго порядка первого рода индекса ν:

$$\mathcal{D} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}, \tag{25}$$

и введём функцию $T(x, y, t)$ как сумму ряда

$$T(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} J_\nu(\lambda_k x) J_\nu(\lambda_k y) t^k, \quad 0 < t < 1, \tag{26}$$

где в последнем соотношении равенство понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2([0,1]^2, xydxdy)$. В L_2 рассмотрим оператор обобщённого сдвига

$$F_h f(x) = \int_0^1 t f(t) T(x, t, 1-h) dt. \tag{27}$$

Для произвольной $f \in L_2$ определим разности высших порядков

$$\widetilde{\Delta}_h^m f(x) = \widetilde{\Delta}_h(\widetilde{\Delta}_h^{m-1} f(x)) = (F_h - I)^m f(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(x)$$

где $F_h^0 f(x) = f(x), F_h^k f(x) = F_h(F_h^{k-1} f(x)), k = 1, 2, ..., m$. Величину

$$\widetilde{\Omega}_m(f, t) = \sup\left\{\|\widetilde{\Delta}_h^m f(\cdot)\| : 0 < h \le t\right\} \tag{28}$$

назовём обобщённым модулем непрерывности m-го порядка функции $f \in L_2$.

Обозначим через $L_2(\mathcal{D})$, где оператор $\mathcal{D}$ определяется равенством (25), множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные первого порядка f', и таких, что $\mathcal{D}f \in L_2$. Полагаем, $\mathcal{D}^0 f \equiv f$, $\mathcal{D}^1 f := \mathcal{D}f$,

$\mathcal{D}^r f := \mathcal{D}(\mathcal{D}^{r-1}f),\ r \in N$. Символом $L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, $r = 2, 3, ...$ обозначим множество функций $f \in L_2$, имеющих абсолютно непрерывные производные $(2r-1)$-го порядка и для которых $\mathcal{D}^r f \in L_2$. Устанавливается, что для $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$

$$\widetilde{\Omega}_m^2(\mathcal{D}^r f, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - (1-h)^k\right]^{2m} \lambda_k^{4r} c_k^2(f).$$

Основной результат второго параграфа второй главы является

Теорема 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \le 2,\ 0 < h < 1,\ \varphi$ *– весовая функция на интервале* $(0, h)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(\int\limits_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r, t)\varphi(t)dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{1/p}}.$$

Из теоремы 2.2.1 в качестве следствия вытекают ряд утверждения.

Следствие 2.2.1. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N}, p = 1/m, r \in \mathbb{Z}_+, h = 1/(n+1)$, $\varphi \equiv 1$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1) \int\limits_0^{1/(n+1)} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right]^{-m},$$

из которого в свою очередь следует экстремальное равенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left((n+1) \int\limits_0^{1/(n+1)} \widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f, t)dt\right)^m} = e^m.$$

Следствие 2.2.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 2.2.1. *Положим* $\varphi(t) = n(1-t)^{n-1}$, $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r} E_{n-1}(f)}{\left(n \int\limits_0^{1/n} \widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r f, t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{29}$$

В свою очередь из (29) *при* $p = 1/m, m \in \mathbb{N}$ *сразу следует равенство*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})}\frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\widetilde{\Omega}_m^{1/m}(\mathcal{D}^r f,t)(1-t)^{n-1}dt\right)^{1/p}}=\frac{2^m}{(1-e^{-1})^{2m}}.$$

В третьем параграфе второй главы найдены точные оценки величины наилучших приближений посредством $\mathcal{K}$-функционала Петре[45].

Теория приближения функций основана на одной из фундаментальных идей математики — замене сложных математических выражений более простыми и удобными. В последнее время для реализации указанной идеи в теории приближения часто используют теорию $\mathcal{K}$-функционалов Петре. В экстремальных задачах теории приближения в смысле слабой эквивалентности были установлены связи между $\mathcal{K}$-функционалами и различными обобщенными модулями непрерывности (см., например, работы[46,47,48,49,50,51,52]). Рассмотрим следующий $\mathcal{K}$-функционал

$$\mathcal{K}(f,t^m):=\mathcal{K}\big(f,t^m,L_2,L_2^{(m)}(\mathcal{D})\big)=\inf\Big\{\|f-g\|+t^m\|\mathcal{D}^m g\|:\ g\in L_2^{(m)}\mathcal{D}\Big\},$$

где $m\in\mathbb{N},\ 0<t<1$.

Эквивалентность модуля непрерывности (28) и $\mathcal{K}$-функционала $\mathcal{K}(f,t^m)$ устанавливается в следующей утверждение.

Теорема 2.3.1. *Существуют положительные константы $c_1=c_1(m)$ и $c_2=c_2(m)$, для которых справедливы неравенства*

$$c_1\tilde{\Omega}_m(f,t)\le\mathcal{K}(f,t^m)\le c_2\tilde{\Omega}_m(f,t)$$

для произвольной функции $f\in L_2$, $0<t<1$.

Основным результатом третьего параграфа является

[45]Peetre J. On the connection between the theory of interpolation spaces and approximation theory // Colloqium on Constructive Function Theory. Budapest, 1969.

[46]Алексеев Д.В. Приближение полиномами с весом Чебышёва – Эрмита на действительной оси // Вестник МГУ. Математика. Механика, 1997, №6, С.68-71.

[47]Фёдоров В.М. Приближение алгебраическими многочленами с весом Чебышева–Эрмита // Известия вузов. Математика. 1984, №6, С.55-63.

[48]Шабозов М.Ш., Тухлиев К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\big((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1]\big)$ // Известия ТулГУ, Естественные науки, 2014, вып. 1, ч.1, С.83-97.

[49]Löfstróm J., Peetre J. Approximation theorems connected with generalized translations // Math.Ann., 1969, v.181, p. 255-268

[50]Ditzian Z., Totik V. K-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$. // Journal Approx.Theory, 1986, v.46, №1, P.38–41.

[51]Feng Dai. Some equivalence theorems with $\mathcal{K}$-functionals // J. Appr. Theory, 2003, v.121, P.143-157.

[52]Платонов С.С. Гармонический анализ Бесселя и приближения функций на полупрямой // Изв. РАН. Серия математика. 2007. Т.71. Выпуск 5. С.149-196. №6, С.65-73.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $m, n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathcal{D})} \frac{\lambda_n^{2r}E_{n-1}(f)}{\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, \lambda_n^{-2m})} = 1.$$

В четвёртом параграфе второй главы найдены точные значения n-поперечников классов функций $\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi)$, состоящих из функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, у которых $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию

$$\int_0^h \widetilde{\Omega}_m^p(\mathcal{D}^r f, t)\varphi(t)dt \le 1,$$

где $h \in (0,1),\ 0 < p \le 2,\ m \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ \varphi$ – весовая функция на $(0,h)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $0 < h < 1$, $\varphi \ge 0$ – *весовая функция на* $[0,h]$. *Тогда для любой* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi), L_2) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi))_{L_2} =$$

$$= \lambda_n^{-2r}\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $\gamma_n(\cdot)$ – *любой из* n-*поперечников* $b_n(\cdot), d^n(\cdot), d_n(\cdot), \delta_n(\cdot), \Pi_n(\cdot)$.

Следствие 2.4.1. *В условиях теоремы* 2.4.1 *при* $\varphi_\star(t) := n(1-t)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ *и любого* $h \in (0,1)$ *имеют место соотношения*

$$\gamma_n(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi_\star)) = E_{n-1}(\mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi_\star) = \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}\lambda_n^{-2r}.$$

Как следствие, из теоремы 2.4.1 вытекает решение задачи вычисления точной верхней грани модуля коэффициентов Фурье – Бесселя $c_n(f)$.

Следствие 2.4.2. *Пусть* $0 < p \le 2$. *Тогда для произвольной* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место равенство*

$$\sup\left\{|c_n(f)| :\ f \in \mathrm{W}_p^{(r)}L_2(\widetilde{\Omega}_m, h, \varphi)\right\} = \lambda_n^{-2r}\left(\int_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}\varphi(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Последний завершающий вторую главу пятый параграф посвящен вычислению точных значений n-поперечников классов функций, задаваемых посредством $\mathcal{K}$-функционала. Неубывающую на $[0,\infty)$ функцию Φ называют k-мажорантой[53], если функция $\Phi(t)/t^k$, где $k \in \mathbb{N}$ не возраста-

[53] Шевчук А.И. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наукова думка, 1992, 225 с.

ет на $\mathbb{R}_+$ и функция Φ удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$ и при $t \to 0$, имеем $\Phi(t) \to 0$. Множество всех k-мажорант обозначаем символом $\mathcal{F}^{(k)}$. Символом $\mathrm{W}^{(r)}_{m,k}(\mathcal{K}, \Phi), r \in \mathbb{Z}_+$ $m \in \mathbb{N}$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathcal{D})$, для которых функция $\mathcal{D}^r f$ удовлетворяет условию $\mathcal{K}(\mathcal{D}^r f, t^m) \le \Phi(t^m)$, $0 < t \le 1$, где Φ – произвольная функция из множества $\mathcal{F}^{(k)}$. В случае $k = 1$ вместо символа $\mathrm{W}^{(r)}_{m,1}(\mathcal{K}, \Phi)$ будем писать просто $\mathrm{W}^{(r)}_{m}(\mathcal{K}, \Phi)$. Здесь доказана

Теорема 2.5.1. *Пусть $r \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N}$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$, имеют место равенства*

$$\gamma_n(\mathrm{W}^{(r)}_{m}(\mathcal{K}, \Phi), L_2) = E_n(\mathrm{W}^{(r)}_{m}(\mathcal{K}, \Phi))_{L_2} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}),$$

где $\gamma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n-поперечников. В частности,

$$\sup\{|c_n(f)| : f \in \mathrm{W}^{(r)}_{m}(\mathcal{K}, \Phi)\} = \lambda_n^{-2r}\Phi(\lambda_n^{-2m}).$$

В третьей главе диссертации изучаются некоторые экстремальные задачи приближения функций на всей оси целыми функциями. Общеизвестно, что начало исследований, связанных с аппроксимацией функций, определённых на всей оси, было положено С.Н.Бернштейном, который ввёл в науку само понятие наилучшего приближения функций $f \in C(\mathbb{R})$ посредством целых функций конечной степени, и создал теорию приближения функций на всей вещественной оси $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Дальнейшее развитие этого направления связано с именами Н.Винера, Н.И.Ахиезера, М.Г.Крейна, С.М.Никольского, П.Боаса, А.Ф.Тимана, В.К.Дзядыка, И.И.Ибрагимова и других математиков.

В конце семидесятых годов прошлого века были опубликованы работы И.И.Ибрагимова и Ф.Г.Насибова[54], В.Ю.Попова[55], в которых рассматривается экстремальная задача об отыскании точных констант в неравенствах Джексона – Стечкина для наилучших среднеквадратических приближений функций целыми функциями экспоненциального типа. Эти работы послужили основанием для введения понятия средних ν-поперечников, базирующихся на понятии средней размерности, введённом Г.Г.Магарил-Ильяевым в статьях[56,57]. Это понятие позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль обычной размерности выполняла средняя размерность. Г.Г.Магарил-Ильяев, в частности, вычислил

[54]Ибрагимов И.И., Насибов Ф.Г. Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР, 1970, т.194, №5, с.1013-1016.

[55]Попов В.Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв. вузов. Математика, 1972, №6, с.65-73.

[56]Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой // Матем. сб. 1991, т.182, №11, с.1635-1656.

[57]Магарил-Ильяев Г.Г. Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой // Докл. СССР, 1991, т.318, №1, с.35-38.

точные значения средних ν-поперечников для соболевских классов функций с ограниченной по норме пространства $L_p(\mathbb{R})\,(1 \le p \le \infty)$ r-й производной $f^{(r)}$ на всей оси. В дальнейшем эта тематика нашла своё развитие в работах С.Б.Вакарчука[58,59], С.Б.Вакарчука, М.Ш.Шабозова и М.Р.Лангаршоева[60], а также М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[61]. Полученные в третьей главе результаты являются продолжением и развитием указанных выше работ.

Пусть $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty)$ — пространство измеримых и суммируемых в p-й степени на всей оси $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \quad (1 \le p \le \infty).$$

Через $L_p^{(r)}(\mathbb{R})$ $(1 \le p \le \infty,\, r \in \mathbb{Z}_+,\; L_p^{(0)}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R}))$ обозначим множество функций $f \in L_p^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$-го порядка $f^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывны, а производные r-го порядка $f^{(r)} \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$. Символом $B_{\sigma,p}$ $(0 < \sigma < \infty,\, 1 \le p \le \infty)$ будем обозначать сужение на $\mathbb{R}$ множества всех функций экспоненциального типа σ, принадлежащих пространству $L_p(\mathbb{R})$. Величину $\mathcal{A}_\sigma(f)_p := \inf\Big\{ \|f - g_\sigma\|_p : \; g_\sigma \in B_{\sigma,p} \Big\}$, $1 \le p \le \infty$, называют наилучшим приближением функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ элементами подпространства $B_{\sigma,p}$ $(\sigma \in \mathbb{R}_+,\, 1 \le p \le \infty)$.

Отметим, что некоторые вопросы наилучшего приближения функций $f \in L_2(\mathbb{R})$ посредством целых функций экспоненциального типа и получения точных неравенств типа Джексона – Стечкина при помощи обычного модуля непрерывности m-го порядка были рассмотрены Ю.А.Поповым[55] и продолжены в работах[62,63]. При вычислении средних ν-поперечников введённых далее классов функций структурные свойства функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ характеризуем скоростью стремления к нулю обобщённого модуля непрерывности

$$\Omega_m^2(f,t) = \sup\Big\{ \|\Delta_h^m(f,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} : \; h \in (0,t] \Big\} =$$

[58]Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси I // Український математичний вїсник, 2012, т.9, №3, с.401-429.

[59]Вакарчук С.Б. О некоторых экстремальных задачах теории аппроксимации функций на вещественной оси II // Український математичний вїсник, 2012, т.9, №4, с.578-602.

[60]Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш., Лангаршоев М.Р. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа $L_2(\mathbb{R})$ и средних ν-поперечниках некоторых функциональных классов // Известия вузов. Математика, 2014, №7, с.30-48.

[61]Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. О точных значениях средних ν-поперечников некоторых классов целых функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 2012, т.18, №4, с.315-327.

[62]Шабозов М.Ш., Мамадов Р. Наилучшее приближение целыми функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$ // Вестник Хорогского госуниверситета, 2001. Сер.1, №4, с.76-81.

[63]Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б., Мамадов Р. О точных значениях средних n-поперечников некоторых классов функций // ДАН РТ, 2009, т.52, №4, с.247-254.

$$= \sup_{0<h\le t} \int\limits_{\mathbb{R}} (1-\operatorname{sinc} h\tau)^{2m} |\mathcal{F}(f,\tau)|^2 d\tau, \qquad (30)$$

где $\mathcal{F}(f)$ – преобразование Фурье функции $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Нашей целью является распространение результата А.А.Лигуна[8] ($p=2$), М.Ш.Шабозова и Г.А.Юсупова[21] ($0<p\le 2$), на случай приближения $f \in L_2(\mathbb{R})$ целыми функциями $g_\sigma \in B_{\sigma,2}$ для специального модуля непрерывности (30). Введём следующую экстремальную характеристику:

$$\mathcal{M}_{\sigma,m,r,p}(\psi,t) := \sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \left\{ \mathcal{A}_\sigma(f)_2 \left(\int\limits_0^t \Omega_m^p(f^{(r)},\tau)_2\, \psi(\tau) d\tau \right)^{-1/p} \right\},$$

где $r\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{N}$, $t,\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<p\le 2$, ψ — весовая функция на $[0,t]$.

Теорема 3.2.1. *Пусть $m\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<t<\pi/\sigma$, $0<p\le 2$ и ψ — весовая функция на отрезке $[0,t]$. Тогда выполняются неравенства*

$$\left\{ a_{\sigma,m,r,p}(\psi,t) \right\}^{-1} \le \mathcal{M}_{\sigma,m,r,p}(\psi,t) \le \left\{ \inf_{\sigma\le u<\infty} a_{u,m,r,p}(\psi,t) \right\}^{-1}, \qquad (31)$$

где

$$a_{u,m,r,p}(\psi,t) = \left(u^{rp} \int\limits_0^t (1-\operatorname{sinc} u\tau)^{mp}\, \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p},\ u\ge\sigma.$$

Из теоремы 3.2.1 выведен ряд следствий. В частности, найдены условия, при которых двустороннее неравенство (31) обращается в равенство.

Теорема 3.2.2. *Пусть $r,m\in\mathbb{N}$, $\sigma\in\mathbb{R}_+$, $0<t<\pi/\sigma$, $0<p\le 2$ и ψ – весовая функция на отрезке $[0,t]$ является дифференцируемой. Если при некотором $\tau\in[0,t]$ выполнено дифференциальное неравенство*

$$(rp-1)\psi(\tau) - \tau\psi'(\tau) \ge 0,$$

то справедливо соотношение

$$\mathcal{M}_{\sigma,m,r,p}(\psi,t) = \frac{1}{\sigma^r} \left(\int\limits_0^t (1-\operatorname{sinc} \sigma\tau)^{mp}\, \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p}.$$

Хорошо известно[64], что если $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, то все промежуточные производные $f^{(r-s)} \in L_2(\mathbb{R})$ $(s=1,2,\ldots,r-1)$, а потому представляет несомненный интерес отыскать значение экстремальных характеристик, содержащих величины наилучших приближений промежуточных производных $\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}$ элементами $g_\sigma\in B_{\sigma,2}$ в норме пространства $L_2^{(r)}(\mathbb{R})$.

[64]Бекенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965, 236 с.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \le 2$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \le 3\pi/(4\sigma)$, $\psi(\tau)$ *— весовая функция на отрезке* $[0,t]$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\sigma^s \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-s)})_{L_2(\mathbb{R})}}{\left(\int\limits_0^t \Omega_m^p(f^{(r)},\tau)\,\psi(\tau)d\tau\right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^t (1-\operatorname{sinc}\sigma\tau)^{mp}\,\psi(\tau)d\tau\right)^{-1/p},$$

где $s = 0,1,2,\ldots,r$.

Из теоремы 3.2.3 в качестве следствия при конкретных значениях $p \in (0,2]$ и весовых функций $\psi(t)$ получаем ранее известные результаты.

В третьем параграфе третьей главы найдены точные значения средних ν-поперечников классов целых функций экспоненциального типа из $L_2(\mathbb{R})$.

Нам для изложения дальнейших результатов необходимо напомнить ряд понятий и фактов из работ Г.Г.Магарил-Ильяева[56,57], в которых найдены точные значения средних ν-поперечников некоторых классов функций. Пусть $BL_p(\mathbb{R}) = \{x : \|x\|_{L_p(\mathbb{R})} \le 1\}$, $Lin(L_2(\mathbb{R}))$ – совокупность всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$:

$$Lin_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathcal{L} \subset Lin(L_2(\mathbb{R})) : \dim \mathcal{L} \le n\}\ (n \in \mathbb{Z}_+),$$

$$d(Q,A,L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in Q\}$$

— наилучшее приближение множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$.

Под $A_T(T>0)$ понимаем сужение множества $A \subset L_p(\mathbb{R})$ на отрезке $[-T,T]$, а через $Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \subset Lin(L_p(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_p(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_p([-T,T])$ при любом $T>0$. Если $\mathcal{L} \in Lin_C(\mathbb{R})$ и $T,\ \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in Lin_n(L_p(\mathbb{R}))$, для которых

$$d((\mathcal{L} \cap BL_p(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_p([-T,T])) < \varepsilon.$$

Пусть

$$\mathcal{D}_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_p(\mathbb{R})) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \exists \mathcal{M} \subset Lin_n(L_p([-T,T])),$$

$$d((\mathcal{L} \cap BL_p(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_p([-T,T])) < \varepsilon\}.$$

Данная функция не убывает по T и не возрастает по ε. Величину

$$\overline{\dim}(\mathcal{L},L_p(\mathbb{R})) := \lim\{\liminf\{\mathcal{D}_\varepsilon(T,\mathcal{L},L_p(\mathbb{R}))/(2T) : T \to \infty\} : \varepsilon \to 0\},$$

где $\mathcal{L} \in Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$, называют средней размерностью подпространства $\mathcal{L}$ в $L_p(\mathbb{R})$. В работе[56] было показано, что $\overline{\dim}(B_{\sigma,p},L_p(\mathbb{R})) = \sigma/\pi,\ 1 \le p \le \infty$.

Пусть Q — есть центрально-симметричное множество из $L_p(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ — является произвольным числом. Тогда под средним ν-поперечником по Колмогорову множества Q в $L_p(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\overline{d}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\inf\{\|f-\varphi\|_p : \varphi \in \mathcal{L}\} : f \in Q\} :$$

$$\mathcal{L} \subset Lin_C(L_p(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_p(\mathbb{R})) \le \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется экстремальным. Средним линейным ν-поперечником множества Q в $L_p(\mathbb{R})$ называют величину

$$\overline{\delta}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})) := \inf\{\sup\{\|f-\Lambda(f)\|_p : f \in Q\} : (X, \Lambda)\},$$

где нижняя грань берётся по всем парам (X, Λ) таким, что X есть нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_p(\mathbb{R})$, $Q \subset X, \Lambda : X \to L_p(\mathbb{R})$ является линейным непрерывным оператором, для которого $I_m\Lambda \subset Lin_C(L_p(\mathbb{R}))$ и $\overline{\dim}(I_m\Lambda, L_p(\mathbb{R})) \le \nu$. Здесь $I_m\Lambda$ есть образ оператора Λ. Пару (X^*, Λ^*), на которой достигается нижняя грань, называют экстремальной. Величину

$$\overline{b}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})) := \sup\{\sup\{\rho > 0 : \mathcal{L} \cap \rho BL_p(\mathbb{R}) \subset Q\} :$$

$$\mathcal{L} \subset Lin_C(L_p(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_p(\mathbb{R})) > \nu,\ \overline{d}_\nu(\mathcal{L} \cap BL_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1\}$$

называют средним ν-поперечником по Бернштейну множества Q в $L_p(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $\mathbb{B}_{\sigma,p}$, если $\sigma > \nu\pi$, то есть

$$\overline{d}_\nu(\mathbb{B}_{\sigma,p} \cap BL_p(\mathbb{R}), L_p(\mathbb{R})) = 1.$$

Следует отметить, что между перечисленными экстремальными характеристиками множества Q имеют место следующие неравенства:

$$\overline{b}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})) \le \overline{d}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})) \le \overline{\delta}_\nu(Q, L_p(\mathbb{R})).$$

Пусть $\Psi_i(t)$ $(i = 1, 2)$, $t \ge 0$ — произвольные непрерывные возрастающие функции такие, что $\Psi_i(0) = 0$ $(i = 1, 2)$. При любых $m \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}_+, 0 < p \le 2$ и полагаем

$$W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}) : \int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 dt \le \Psi_1^p(h), \quad h > 0 \right\},$$

$$W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2) = \left\{ f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R}) : \frac{2}{h^2} \int\limits_0^h t\Omega_m^p(f^{(r)}, t)_2 dt \le \Psi_2^p(h), \quad h > 0 \right\}.$$

Для произвольного центрально-симметричного множества $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ определим наилучшее приближение $\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M})_{L_2(\mathbb{R})} = \sup\{\mathcal{A}_\sigma(f)_2 : f \in \mathfrak{M}\}$.

Для пары $(L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda)$, где $\Lambda : L_2^{(r)}(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ является линейным непрерывным оператором, для которого

$$I_m\Lambda \in Lin_C(L_2(\mathbb{R})) \ \ \textit{и} \ \ \overline{\dim}(I_m\Lambda, L_2(\mathbb{R})) \le \nu,$$

полагаем

$$\mathcal{E}_\nu(\mathfrak{M}, (L_2^{(r)}(\mathbb{R}), \Lambda)) := \sup\{\|f - \Lambda f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Сформулируем, например, один из основных результатов параграфа 3.3.

Теорема 3.3.1. *Если для всех $\sigma \in \mathbb{R}_+,\ 0 < h \le \pi/\sigma,\ m \in \mathbb{N}, 0 < p \le 2$ мажоранта Ψ_1 удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_1(h)}{\Psi_1(\pi/\sigma)}\right)^p \ge \left\{ \int\limits_0^{\sigma h} (1 - \operatorname{sinc} t)_*^{mp}\, dt \right\} \left\{ \int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt \right\}^{-1}, \qquad (32)$$

то при $\sigma = \pi\nu (\nu > 0),\ r \in \mathbb{Z}_+$ имеют место равенства

$$\overline{\mu}_\nu(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \mathcal{E}_{\nu\pi}(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*))_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= (\pi\nu)^{-r+1/p} \left(\int\limits_0^{\pi} (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt \right)^{-1/p} \Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

где $\overline{\mu}_\nu(\cdot)$ – любой из перечисленных выше средних ν-поперечников. При этом пара $(L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*)$, где $\Lambda_{\nu\pi}^*$ определяется из условия

$$\mathcal{F}(\Lambda_{\nu\pi}^* f, \cdot) = \mathcal{X}_{\nu\pi}(\cdot) \cdot \mathcal{F}(f, \cdot),$$

($\mathcal{F}$-преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}), \mathcal{X}_{\nu\pi}$-характеристическая функция интервала $(-\nu\pi, \nu\pi)$) будет экстремальной для среднего линейного поперечника $\overline{\delta}_\nu(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), L_2(\mathbb{R}))$, а пространство $\mathcal{B}_{\nu\pi,2}$ является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), L_2(\mathbb{R}))$.

Докажем, что среди степенных функций вида $\Psi_1^*(u) = u^{\alpha/p}$, возрастающих на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, существуют функции, для которых выполняется неравенство (32) при любом $\sigma > \nu\pi$ и $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$, $m \in \mathbb{N}$ и $0 < p \leq 2$. При этом число α имеет вид

$$\alpha := \alpha(m,p) = \pi \left(\int\limits_0^\pi (1 - \operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt \right)^{-1}.$$

Простые вычисления приводят к следующим границам значений числа α:

$$mp + 1 < \alpha < 2mp + 1.$$

Из теорем 3.3.1 вытекает

Следствие 3.3.1.*В условиях теоремы* 3.3.1 *при* $p = 1/m$, $m, n \in \mathbb{N}$, $r \geq m$ *имеют место равенства*

$$\overline{\mu}_\nu \left(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1),\, L_2(\mathbb{R}) \right) =$$

$$= A_{\nu\pi} \left(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1) \right)_{L_2(\mathbb{R})} = \mathcal{E}_{\nu\pi} \left(W_{1/m}^{(r)}(\Omega_m, \Psi_1), (L_2(R), \Lambda_{\nu\pi}^*) \right)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= (\pi\nu)^{-r+m} \left(\pi - Si(\pi) \right)^{-m} \Psi_1(1/\nu).$$

Теорема 3.3.2. *Если для всех* $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $0 < h \leq 3\pi/(4\sigma)$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$ *мажоранта* Ψ_2 *удовлетворяет условию*

$$\left(\frac{\Psi_2(h)}{\Psi_2(\pi/(2\sigma))} \right)^p \geq$$

$$\geq \left(\frac{\pi}{2\sigma h} \right)^2 \left(\int\limits_0^{\sigma h} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)_*^{mp} dt \right)^{1/p} \left(\int\limits_0^{\pi} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} dt \right)^{-1/p},$$

то при $\sigma = \nu\pi, \nu \in \mathbb{R}_+$ *и любом* $r \in \mathbb{Z}_+$ *имеют место равенства*

$$\overline{\mu}_\nu \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2),\, L_2(\mathbb{R}) \right) =$$

$$= A_{\nu\pi} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2) \right)_{L_2(\mathbb{R})} = \mathcal{E}_{\nu\pi} \left(W_p^{(r)}(\Omega_m, \Psi_2), (L_2(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi}^*) \right)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \frac{1}{(\pi\nu)^r} \left(\frac{8}{\pi^2} \int\limits_0^{\pi/2} t\,(1 - \operatorname{sinc} t)^{mp} dt \right)^{-1/p} \Psi_2 \left(\frac{1}{2\nu} \right),$$

где $\overline{\mu}_\nu(\cdot)$ *— любой из средних* ν*-поперечников* $\overline{b}_\nu(\cdot)$, $\overline{d}_\nu(\cdot)$, $\overline{\delta}_\nu(\cdot)$.

При этом пара $(L_2(R), \Lambda^*_{\nu\pi})$, *где* $\Lambda^*_{\nu\pi}$, *определяется из условия*

$$\mathcal{F}\left(\Lambda^*_{\nu\pi} f, \cdot\right) = \mathcal{X}_{\nu\pi}(\cdot)\mathcal{F}(f, \cdot)$$

($\mathcal{F}$ *– преобразование Фурье в* $L_2(\mathbb{R}), \mathcal{X}_{\nu\pi}$ *— характеристическая функция интервала* $(-\nu\pi, \nu\pi)$*) будет экстремальной для среднего линейного поперечника* $\overline{\delta}_\nu\left(W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_2), L_2(\mathbb{R})\right)$, *а пространство* $\mathcal{B}_{\nu\pi,2}$ *является экстремальным для среднего поперечника по Колмогорову* $\overline{d}_\nu\left(W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_2), L_2(\mathbb{R})\right)$.

Следствие 3.3.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.3.2. *Тогда имеют место равенства*

$$\overline{\mu}_\nu\left(W^{(r)}_{1/m}(\Omega_m, \Psi_2),\, L_2(\mathbb{R})\right) =$$

$$= A_{\nu\pi}\left(W^{(r)}_{1/m}(\Omega_m, \Psi_2)\right)_{L_2(\mathbb{R})} = \mathcal{E}_{\nu\pi}\left(W^{(r)}_{1/m}(\Omega_m, \Psi_2), (L_2(\mathbb{R}), \Lambda^*_{\nu\pi})\right)_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \frac{1}{(\pi\nu)^r}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^m \Psi_2\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

Задача изучения поведения величин наилучших приближений $A_\sigma\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathbb{R})}$, где $r \in \mathbb{N}$, $s = 0, 1, ..., r-1$ на различных классах целых функций, определяемых заданной мажорантой, рассмотрена, например, в работах[59–61]. Здесь аналогичная задача решается для введённых нами выше классов целых функций $W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_1)$ и $W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_2)$.

Теорема 3.3.3. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.3.1, $s = 0, 1, ..., r$, *где* $r \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \nu < \infty$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathbb{R})} :\; f \in W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_1)\right\} =$$

$$= (\pi\nu)^{-s+1/p}\left(\int\limits_0^\pi (1-\operatorname{sinc} t)^{mp}\, dt\right)^{-1/p} \Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

В частности, если $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$, *то*

$$\sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathbb{R})} :\; f \in W^{(r)}_{1/m}(\Omega_m, \Psi_1)\right\} = (\pi\nu)^{-s+m}\Big(\pi - Si(\pi)\Big)^{-m}\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Теорема 3.3.4. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.3.2, $s = 0, 1, ..., r$, *где* $r \in \mathbb{N}$ *и* $0 < \nu < \infty$. *Тогда имеет место равенство*

$$\sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathbb{R})} :\; f \in W^{(r)}_p(\Omega_m, \Psi_2)\right\} =$$

$$= (\pi\nu)^{-s}\left(\frac{8}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi/2} t\,(1-\operatorname{sinc} t)^{mp}\,dt\right)^{-1/p}\Psi_2\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

В частности, при $p = 1/m,\ m \in \mathbb{N}$

$$\sup\left\{A_{\nu\pi}\left(f^{(r-s)}\right)_{L_2(\mathbb{R})}:\ f \in W^{(r)}_{1/m}(\Omega_m, \Psi_2)\right\} = (\pi\nu)^{-s}\left(\frac{\pi^2}{\pi^2-8}\right)^m \Psi_2\left(\frac{1}{2\nu}\right).$$

В завершающем четвёртом параграфе третьей главы рассматривается задача отыскания верхних граней оценки остатка преобразования Фурье на некоторых классах функций, точнее - в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается преобразования Фурье и его обратное

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dt, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ixt}dx$$

для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Найдены точные оценки остатка интеграла

$$\int\limits_{|t|\ge N} |g(t)|^2dt = \int\limits_{|t|\ge N} |f(t)|^2dt, \quad N \ge 1$$

на классах функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, характеризующихся обобщённым модулем непрерывности m-го порядка, определённого равенством (30). Отметим, что ранее в работах[65,66] для рассматриваемых ниже классов функций были известны порядковые оценки

$$\int\limits_{|t|\ge N} |g(t)|^2dt = O(N^{-2\alpha}), \quad 0 < \alpha < 2,\ N \in \mathbb{N},\ N \to \infty$$

и

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{\left(\int\limits_{|t|\ge N} |g(t)|^2dt\right)^{1/2}}{\Omega_m\left(f^{(r)}, \dfrac{2}{N}\right)} \le \frac{2^m}{N^r}. \qquad (33)$$

[65]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Несколько замечаний о преобразовании Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ // ЖВМФ, 2008, т.48, №6, С.939-945.

[66]Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К. Некоторые новые оценки преобразования Фурье в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ // ЖВМФ, 2013, т.53, №9, С.1419-1426.

Приводим основные результаты четвёртого параграфа. В нижеприведённой теореме 3.4.1 приводится точное значение величины, стоящей в левой части неравенства (33). При этом условимся, что при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ производная $f^{(r)}$ не эквивалентна нулю.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, $N > 0$ *– достаточно большое число. Тогда для любого* $h \in (0, \pi/(2N)]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^r \left(\int\limits_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{\Omega_m(f^{(r)}, h)} = \Big(1 - \operatorname{sinc} Nh\Big)^{-m}. \tag{34}$$

Существует функция $f_0 \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, *для которой верхняя грань реализуется в* (34). *В частности, имеем*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^r \left(\int\limits_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{\Omega_m \left(f^{(r)}, \pi/(2N)\right)} = \left(\frac{\pi}{\pi - 2}\right)^m.$$

Теорема 3.4.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $N > 0$ *– произвольное достаточно большое число,* $0 < p \leq 2$. *Тогда для любого* $h \in (0, \pi/N]$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})} \frac{N^{r-1/p} \left(\int\limits_{|t| \geq N} |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, u) du \right)^{1/p}} = \left(\int\limits_0^{Nh} (1 - \operatorname{sinc} u)^{mp} \, du \right)^{-1/p}. \tag{35}$$

Существует функция $f_1 \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, *которая реализует верхнюю грань в равенстве* (35).

Пусть $\mathcal{F}(t)$ – непрерывная монотонно возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция такая, что $\mathcal{F}(0) = 0$. Через $W_m^{(r)}(\mathcal{F})$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производная r-го порядка $f^{(r)} \in L_2(\mathbb{R})$ при любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и $0 < h \leq \pi/N$, $N > 0$ удовлетворяет ограничению

$$\Omega_m(f^{(r)}, h) \leq \mathcal{F}(h).$$

Аналогичным образом, через $W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{F})$ обозначим класс функций $f \in L_2^{(r)}(\mathbb{R})$, у которых производная r-го порядка $f^{(r)}$ при любых $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$ и $0 < h \leq \pi/N$, $N > 0$ удовлетворяет неравенству

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, u)du\right)^{1/p} \leq \mathcal{F}(h).$$

Теорема 3.4.3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $N > 0$ – произвольное число и $0 < h \leq \pi/(2N)$. Тогда справедливы равенства*

$$\mathcal{E}_N\Big(W_m^{(r)}(\mathcal{F})\Big) := \sup_{f \in W_m^{(r)}(\mathcal{F})} \frac{\left(\int\limits_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\Omega_m(f^{(r)}, h)} = N^{-r}\left(1 - \operatorname{sinc} Nh\right)^{-m} \mathcal{F}(h).$$

Если же $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq 2$, $N > 0$ – произвольное число и $0 < h \leq \pi/N$, то имеет место равенство

$$\mathcal{E}_N\Big(W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{F})\Big) := \sup_{f \in W_{m,p}^{(r)}(\mathcal{F})} \frac{\left(\int\limits_{|t|\geq N} |g(t)|^2 dt\right)^{1/2}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)}, u)du\right)^{1/p}} =$$

$$= N^{-r+1/p}\left(\int\limits_0^{Nh} \left(1 - \operatorname{sinc} u\right)^{mp} du\right)^{-1/p} \mathcal{F}(h).$$

Четвёртая глава диссертации посвящена нахождению оптимальных квадратурных формул для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода. Наиболее важные результаты, полученные по экстремальным задачам теории квадратур до конца восьмидесятых годов прошлого столетия, подытожены Н.П.Корнейчуком в дополнении к монографии С.М.Никольского[67]. В дополнении отмечается, что по экстремальным

[67]Никольский С.М. Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1988, 256 с.

задачам теории квадратур получен ряд существенных окончательных результатов для соболевских классов и классов функций, задаваемых модулями непрерывности (Н.П.Корнейчук[68,69], А.А.Женсыкбаев[70], А.А.Лигун[71], Б.Д.Боянов[72], К.И.Осколков[73], В.Ф.Бабенко[74] и другие). В то же время в указанном дополнении отмечается, что до настоящего времени немало задач для других интегралов, например, многомерных, сингулярных и криволинейных интегралов ещё не решено. Это замечание, в частности, касается отыскания оптимальных квадратурных формул для криволинейных интегралов. Для указанных интегралов задача отыскания наилучших квадратурных формул находится на стадии разработки. Можно лишь указать на результаты С.Б.Вакарчука[75], М.Ш.Шабозова и Ф.М.Мирпоччоева[76], М.Ш.Шабозова[77].

В этой главе рассматривается экстремальная задача отыскания *наилучших* квадратурных формул в смысле С.М.Никольского для приближённого вычисления криволинейных интегралов для некоторых классов функций многих переменных и кривых, задаваемых модулями непрерывности, и на классах дифференцируемых функций, у которых нормы первого и второго градиента ограничены по норме в пространстве $L_p\,(1 \leq p \leq \infty)$ вдоль кривой, по которой вычисляется криволинейный интеграл. Во всех рассматриваемых классах указан явный вид *оптимальных узлов и коэффициентов* квадратурной формулы и вычислены точные оценки погрешности. Как правило, решение сформулированной задачи зависит от расположения узлов. Для квадратурных формул с произвольным расположением узлов на отрезке $[0, L]$ (L – длина кривой) и фиксированных крайних узлов (квадратурных формул типа Маркова) даётся полное решение экстремальной задачи для

[68]Корнейчук Н.П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных // Матем. заметки, 1968, т.3, №5, с.565-576.

[69]Корнейчук Н.П., Лушпай Н.Е. Наилучшие квадратурные формулы для классов дифференцируемых функций и кусочно-полиномиальное приближение // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1969, т.33, №6, с.1416-1437.

[70]Женсыкбаев А.А. Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Серия матем., 1977, т.41, №5, с.1110-1124.

[71]Лигун А.А. О наилучших квадратурных формулах для некоторых классов периодических функций // Матем. заметки, 1978, т.24, №5, с.661-669.

[72]Боянов Б.Д. Существование оптимальных квадратурных формул с заданными кратностями узлов // Мат. сб., 1978, т.105(147), №3, с.342-370.

[73]Осколков К.И. Об оптимальности квадратурной формулы с равноотстоящими узлами на классах периодических функций // ДАН СССР, 1979, т.249, №1, с.49-52.

[74]Бабенко В.Ф. Приближения, поперечники и наилучшие квадратурные формулы для классов периодических функций с перестановочно инвариантными множествами производных // Anal. Math., 1987, v.13, №4, с.15-28.

[75]Вакарчук С.Б. Оптимальная формула численного интегрирования криволинейных интегралов первого рода для некоторых классов функций и кривых // Укр. матем. журнал, 1986, т.38, №5, с.643-645.

[76]Шабозов М.Ш., Мирпоччоев Ф.М. Оптимизация приближённого интегрирования криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых // ДАН РТ, 2010, т.53, №6, с.415-419.

[77]Шабозов М.Ш. О наилучших квадратурных формулах для вычисления криволинейных интегралов на некоторых классах функций и кривых // Матем. заметки, 2014, т.96, №7, с.637-640.

указанных классов функций и кривых.

Рассматривается задача о приближённом вычислении криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и классов пространственных кривых, задаваемых модулями непрерывности. Пусть функция $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ определена и интегрируема вдоль кривой $\Gamma \subset R^m$ и

$$J(f,\Gamma) := \int\limits_{\Gamma} f(M)dt = \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dt. \tag{36}$$

Предположим, что криволинейный интеграл (36) приведён в виде определённого интеграла

$$J(f,\Gamma) = \int\limits_0^L f\left(\varphi_1(t),\, \varphi_2(t), \ldots,\, \varphi_m(t)\right) dt. \tag{37}$$

Тогда всякая квадратурная формула

$$J(f,\Gamma) \approx \mathcal{L}_N(f,\Gamma,P,T) := \sum_{k=1}^{N} p_k\, f\Big(\varphi_1(t_k),\, \varphi_2(t_k), \ldots,\, \varphi_m(t_k)\Big) \tag{38}$$

для приближённого вычисления интеграла (37) задаётся векторами коэффициентов $P = \{p_k\}_{k=1}^N$ и векторами узлов $T = \{t_k :\ 0 \le t_1 < \ldots < t_N \le L\}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_N$ – произвольные действительные числа. При фиксированном $N \ge 1$ через $\mathcal{A}$ будем обозначать множество векторов коэффициентов и узлов (P,T), для которых формула (38) имеет смысл. Погрешность квадратурной формулы (38) обозначим

$$\Big|R_N(f,\Gamma,P,T)\Big| = \Big|J(f,\Gamma) - \mathcal{L}_N(f,\Gamma,P,T)\Big|.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторый класс функций $\{f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t))\}$, определённых в точках кривой Γ и $\mathfrak{N}(L)$ — класс кривых Γ, длина которых равна L. Наибольшую погрешность квадратурной формулы для всего класса функций $\mathfrak{M}$ на классе кривых $\mathfrak{N}(L)$ обозначим

$$R_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L),P,T) = \sup\Big\{\sup\Big\{R_N(f,\Gamma,P,T) :\ f \in \mathfrak{M}\Big\} :\ \Gamma \subset \mathfrak{N}(L)\Big\}.$$

Нижнюю грань

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L)) = \inf\Big\{R_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L),P,T) :\ (P,T) \subset \mathcal{A}\Big\}, \tag{39}$$

по аналогии с определением из монографии[67], будем называть оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы (38) на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$. Если существует вектор $(P^0,T^0) \subset \mathcal{A}$, для которого

$$\mathcal{E}_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L)) = R_N(\mathfrak{M},\mathfrak{N}(L),P^0,T^0),$$

то этот вектор определяет наилучшую квадратурную формулу вида (38) в смысле С.М.Никольского[67] на классах функций $\mathfrak{M}$ и кривых $\mathfrak{N}(L)$.

Обозначим через $H^\omega := H^\omega[0,L]$ — множество функций $\varphi(t) \in C[0,L]$, удовлетворяющих условию $|\varphi(t')-\varphi(t'')| \le \omega\left(|t'-t''|\right),\ t',t'' \in [0,L]$, где $\omega(\delta)$ – заданный модуль непрерывности.

Через $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}[0,L]$ обозначим класс гладких кривых $\Gamma \subset R^m$, у которых координатные функции $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0,L],\ i=1,2,\dots,m$, то есть $\varphi_i(t)$ — непрерывные на отрезке $[0,L]$ функции, имеющие мажорантой модуля непрерывности $\omega(\varphi_i,\delta)$ заданный модуль непрерывности $\omega_i(\delta)$.

В R^m для любых двух точек $M' = M(x_1',x_2',\dots,x_m')$, $M'' = M(x_1'',x_2'',\dots,x_m'')$ введём расстояние

$$\rho_p(M',M'') = \left\{\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i''|^p\right\}^{1/p} \quad (1 \le p \le \infty).$$

Через $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим класс функций $f(M) = f(x_1,x_2,\dots,x_m)$, определённых на кривых $\Gamma \subset \bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ и для любых двух точек $M',M'' \in \Gamma$ удовлетворяющих условию $\Big|f(M')-f(M'')\Big| \le \rho_p(M',M'')$.

Теорема 4.1.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (38) *с произвольными векторами коэффициентов и узлов* (P,T), $P=\{p_k\}_{k=1}^N,\ T=\{t_k\}_{k=1}^N$: $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_N \le L$ *наилучшей для класса функций* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и класса кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *является формула средних прямоугольников*

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\dots,\,\varphi_m(t)\right)dt =$$

$$= \frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\varphi_1\left(\frac{2k-1}{2N}L\right),\,\dots,\varphi_m\left(\frac{2k-1}{2N}L\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \qquad (40)$$

При этом для погрешности наилучшей формулы (40) *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}$ *имеем*

$$\mathcal{E}_N\left(\mathfrak{M}_\rho^{(p)},\bar{H}^{\,\omega_1,\dots,\omega_m}\right) = (2N)\int_0^{L/(2N)} \left\{\sum_{i=1}^{m}\omega_i^p(t)\right\}^{1/p} dt. \qquad (41)$$

Из теоремы 4.1.1 вытекают ряд следствий для других классов функций.

Теорема 4.1.2. *Среди всех квадратурных формул с произвольными векторами коэффициентов и узлов* (P,T),

$$P=\{p_k\}_{k=0}^N,\ T=\{\,t_k:\ 0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=L\}$$

наилучшей для классов функций $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *является формула трапеций*

$$\int_0^L f\left(\varphi_1(t),\,\ldots,\,\varphi_m(t)\right)dt =$$

$$= \frac{L}{2N}\Big(f(\varphi_1(0),\varphi_2(0),\ldots,\varphi_m(0)) + f(\varphi_1(L),\varphi_2(L),\ldots,\varphi_m(L))\Big)+$$

$$+\frac{L}{N}\sum_{k=1}^{N-1} f\left(\varphi_1\left(\frac{kL}{N}\right),\varphi_2\left(\frac{kL}{N}\right),\ldots,\varphi_m\left(\frac{kL}{N}\right)\right) + R_N(f,\Gamma). \qquad (42)$$

Для погрешности наилучшей формулы (42) *на классах функций* $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ $(1 \le p \le \infty)$ *и кривых* $\bar{H}^{\,\omega_1,\ldots,\omega_m}$ *справедлива точная оценка* (41).

В диссертации доказывается, что оценка погрешности (41) имеет место на более широких классах функций и кривых, чем классы $\mathfrak{M}_\rho^{(p)}$ и $\bar{H}^{\omega_1,\ldots,\omega_m}$.

Во втором параграфе четвёртой главы найдены наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на классах функций $W_p^{(k)}(\mathcal{K},Q)$, $W_{0,p}^{(k)}(\mathcal{K},Q)$ и кривых $\mathfrak{N}_Q(L)$.

Обозначим через $W_p^{(k)}(\mathcal{K},Q) := W^{(k)}L_p(\mathcal{K},Q)$ $(k=0,1,2,\ 1\le p\le\infty,$ $W_p^{(0)}(\mathcal{K},Q) \equiv L_p(\mathcal{K},Q))$ класс функций $f(M) = f(x_1,x_2,...,x_m)$, которые почти всюду в области Q удовлетворяют ограничениям

$$\begin{aligned} &||\nabla^k f(x_1,x_2,...,x_m)||_{L_p(Q)} \le \mathcal{K},\ k=0,1,2,\ 1\le p<\infty,\\ &supvrai\left\{|\nabla^k f(x_1,x_2,...,x_m)| : (x_1,x_2,...,x_m)\in Q\right\} \le \mathcal{K},\ p=\infty. \end{aligned} \qquad (43)$$

В частности, в случае $k=1$ условия (43) равносильны неравенствам

$$||gradf(x_1,x_2,...,x_m)||_{L_p(Q)} \le \mathcal{K},\ 1\le p<\infty,$$

$$supvrai\,\{|gradf(x_1,x_2,...,x_m)| : (x_1,x_2,...,x_m)\in Q\} \le \mathcal{K},\ p=\infty.$$

Основными результатами второго параграфа четвёртой главы являются следующие утверждения.

Теорема 4.2.1. *Среди всех квадратурных формул вида* (38) *для приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода на классе функций* $W_p^{(1)}(\mathcal{K},Q)$, $1\le p\le\infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *наилучшей является формула средних прямоугольников* (40). *При этом для погрешности формулы* (40) *на указанных классах функций и кривых имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_N\left(W_p^{(1)}(\mathcal{K},Q),\mathfrak{N}_Q(L)\right) = \frac{\mathcal{K}L^{1+1/q}}{2N\sqrt[q]{q+1}},\quad 1\le q\le\infty.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы 4.2.1 в случае $m = 2,\ q = 1$ ранее было получено С.Б.Вакарчуком[75], а в случае $m = 2,\ 1 \le q \le \infty$ М.Ш.Шабозовым и Ф.М.Мирпоччоевым[76].

Теорема 4.2.3. *Среди всех квадратурных формул вида* (38) *наилучшей на классах функций* $W_p^{(2)}(\mathcal{K}, Q),\ 1 \le p \le \infty$ *и кривых* $\mathfrak{N}_Q(L)$ *является формула, у которой коэффициенты и узлы имеют вид:*

$$p_k = \alpha_k^* L,\ t_k = \sigma_k^* L,\ k = 1, 2, ..., N,$$

где L *– длина кривой* Γ, *а* α_k^* *и* σ_k^* *определены равенствами*

$$\alpha_k^* = \left[N - 1 + \sqrt{R_{2q}(1)}\right]^{-1},\ k = 2, 3, ..., N-1,$$

$$\sigma_k^* = \frac{2(k-1) + \sqrt{R_{2q}(1)}}{2\left[N - 1 + \sqrt{R_{2q}(1)}\right]},\ k = 1, 2, ..., N.$$

Здесь $R_{2q}(t)$ *— многочлен вида* $x^2 + ax + b$, *наименее уклоняющийся от нуля в метрике* L_q, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ *на отрезке* $[-1, 1]$.

При этом для точной оценки погрешности наилучшей формулы на указанных классах функций и кривых справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N(W_p^{(2)}(\mathcal{K}, Q), \mathfrak{N}_Q(L)) = \frac{\mathcal{K} L^{2+1/q} R_{2q}(1)}{8\sqrt[q]{2q+1}\left[N - 1 + \sqrt{R_{2q}(1)}\right]^2},\quad 1 \le q \le \infty.$$

В заключении, приведённом в конце диссертации, излагаются итоги проведённого исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов.

Автор благодарен профессорам В.В.Арестову, В.И.Иванову, А.Г.Бабенко и всем участникам летней математической Школы-Конференции С.Б.Стечкина по теории функций (Душанбе, 15-25 августа 2016 г.) за плодотворное обсуждение результатов работы и высказанные ими конструктивные предложения и замечания.

Выражаю благодарность своему научному консультанту академику АН Республики Таджикистан, профессору Шабозову Мирганду Шабозовичу за полезные советы, обсуждения и поддержку.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

В академических журналах, входящих в перечень ВАК РФ:

1. Тухлиев, К. О наилучших квадратурных формулах приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2012. №4. С. 18-27.
2. Тухлиев, К. Оптимальные квадратурные формулы для приближённого вычисления криволинейных интегралов первого рода [Текст] / К.Тухлиев // ДАН РТ. 2012. Т.55, №10. С. 775-779.
3. Тухлиев, К. О наилучшем полиномиальном приближении периодических функций в L_2 и поперечников некоторых классов функций [Текст] / К.Тухлиев // ДАН РТ. 2013. Т.56, №7. С. 515-520.
4. Тухлиев, К. Наилучшие квадратурные формулы приближённого вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых [Текст] / К.Тухлиев // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. 2013. вып.2. ч.1. С. 50-57.
5. Тухлиев, К. Неравенства типа Джексона - Стечкина для обобщённых модулей непрерывности и некоторые их применения [Текст] / К.Тухлиев // ДАН РТ. 2013. Т.56, №11. С. 861-868.
6. Тухлиев, К. Оптимальные квадратурные формулы приближенного вычисления криволинейного интеграла первого рода для некоторых классов функций и кривых [Текст] / К.Тухлиев // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т.20, №3. С. 121-129.
7. Тухлиев, К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. **I** [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2013. №3(152). С. 19-29.
8. Тухлиев, К. Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2 [Текст] / М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев // Матем. заметки. 2013. Т.94, №6. С. 905-914.
9. Тухлиев, К. $\mathcal{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1]\right)$ [Текст] / М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев // Известия ТулГУ. 2014. вып.1. ч.1. С. 83-97.
10. Тухлиев, К. О наилучших приближениях целыми функциями в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. **II** [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2014. №3(156). С. 7-19.

11. Тухлиев, К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов первого рода на некоторых классах функций и кривых, задаваемых модулями непрерывности [Текст] / М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев // Вестник Санкт-Петербургского государственного университета. 2015. Сер.1. Т.2(60), вып.4. С. 563-575.
12. Тухлиев, К. Неравенства Джексона — Стечкина с обобщёнными модулями непрерывности и поперечники некоторых классов функций [Текст] / М.Ш.Шабозов, К.Тухлиев // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т.21, №4. С. 292-308.
13. Тухлиев, К. О приближении периодических функций в L_2 и значениях поперечников некоторых классов функций [Текст] / К.Тухлиев // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т.22, №1. С. 127-143.
14. Тухлиев, К. О некоторых экстремальных задачах наилучших приближений целыми функциями [Текст] / К.Тухлиев // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin). 2015. вып. 2(155). С. 213-220.
15. Тухлиев, К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями и значения средних поперечников некоторых функциональных классов [Текст] / К.Тухлиев // Вестн. Томского гос. пед. ун-та (TSPU Bulletin). 2015. вып. 2(155). С. 229-231.
16. Тухлиев, К. Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых классов функций [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2015. №1(158). С. 7-19.
17. Тухлиев, К. Точные значения n-поперечников некоторых классов функций [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2016. №1(162). С. 7-14.
18. Тухлиев, К. О наилучшем приближение некоторых классов свёрток [Текст] / К.Тухлиев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. 2016. №2(163). С. 20-30.
19. Тухлиев, К. Наилучшие приближения и поперечники некоторых классов свертками в L_2 [Текст] / К.Тухлиев // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т.22, №4. С. 284-294.
20. Тухлиев, К. Среднеквадратическое приближение функций рядами Фурье – Бесселя и значения поперечников некоторых функциональных

классов [Текст] / К.Тухлиев // Чебышевский сборник. 2016. Т.17, №4. С. 141-156.

В других изданиях:

21. Тухлиев, К. Наилучшие квадратурные формулы вычисления криволинейных интегралов некоторых классов функций и кривых [Текст] / К.Тухлиев // 4-й международной конференции посвящённой 90-летию Л.Д.Кудрявцева. Москва. 25-29 марта 2013 г. С. 129-130.
22. Тухлиев, К. Наилучшие приближение целыми функциями в пространстве $L_2(R)$ [Текст] / К.Тухлиев // В материалах IX Международной научно-практической конференции "Теоретические и прикладные аспекты современной науки". Белгород. 31 марта 2015 г. С. 16-18.
23. Тухлиев, К. О наилучшем полиномиальном приближении периодических дифференцируемых функций в $L_2[0, 2\pi]$ [Текст] / К.Тухлиев // В материалах международной научной конференции "Современные проблемы функционального анализа и дифференциальных уравнений". Душанбе. 27-28 апреля 2015 г. С. 42-45.
24. Тухлиев, К. Неравенства типа Джексона-Стечкина в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ [Текст] / К.Тухлиев // В материалах международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения -V". Ростов-на-Дону. 26 апреля – 1 мая 2015 г. С.55.
25. Тухлиев, К. О наилучшем приближении функций алгебраическими полиномами в пространстве $L_{2,\mu}[-1, 1]$ [Текст] / К.Тухлиев // Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М.Никольского. Москва. 25-29 мая 2015 г. С.238.
26. Тухлиев, К. Наилучшие полиномиальные приближения периодических функций в пространстве L_2 [Текст] / К.Тухлиев // XII Международная Казанская летняя Школа-Конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы". Казань. 27 июня – 4 июля 2015 г. С. 440-442.
27. Тухлиев, К. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями в $L_2(R)$ [Текст] / К.Тухлиев // Международная научная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ". Уфа. 1-3 октября 2015 г. С. 133-135.

28. Тухлиев, К. Приближения периодических функций и значения поперечников некоторых классов функций в L_2 [Текст] / К.Тухлиев //Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 – 25 августа 2016 г. С. 226-230.
29. Тухлиев, К. Неравенства Джексона – Стечкина для специальных модулей непрерывности и значение поперечников классов функций в $L_{2,\mu}[-1,1]$ [Текст] / К.Тухлиев // Труды международной летней математической Школы-Конференции С.Б. Стечкина по теории функций. Таджикистан. Душанбе. 15 – 25 августа 2016 г. С. 231-238.
30. Тухлиев, К. Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями [Текст] / К.Тухлиев // Международной математической Школы-Конференции "Соболевские чтения". Новосибирск. 18-22 декабря 2016 г. С. 149.