Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи

Васильев Иоанн Михайлович

Граничная гладкость, K-замкнутость и разложения Литтлвуда–Пэли

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2019

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:
КИСЛЯКОВ Сергей Витальевич,
доктор физико–математических наук, академик РАН, директор ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:
ПАРАМОНОВ Петр Владимирович,
доктор физико–математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций и функционального анализа ФГБОУ ВО Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

СЕРГЕЕВ Армен Глебович,
доктор физико–математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Ведущая организация:
НИУ Высшая школа экономики, Санкт-Петербургский филиал.

Защита состоится ______ ________________ в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан ______ ________________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-
математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Цели и задачи диссертационной работы

Данная диссертационная работа посвящена обобщению некоторых хорошо известных классических результатов гармонического и комплексного анализа. А именно, это задачи, посвященные исследованиям локальной граничной гладкости аналитических функций в единичном шаре многомерного комплексного пространства, K-замкнутости "вещественных" классов Харди, свойств функций f, удовлетворяющих условию $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ и разложений вида Литтлвуда–Пэли для пространств Трибеля–Лизоркина. Подчеркнём, что все задачи, рассмотренные и решённые нами здесь, суть обобщения одномерных результатов на случай функций нескольких переменных.

Актуальность работы

Вопрос о связи между гладкостью аналитической функции Φ и её модуля $\varphi = |\Phi|$ в единичном круге имеет историю. При наложении некоторых ограничений на функцию Φ в виде предположения об отсутствии нулей в круге, функция Φ обладает гладкостью, вдвое меньшей, чем у φ. Используя каноническую факторизацию функции $\Phi = F\vartheta B$, где F — внешняя функция, построенная по φ, ϑ — сингулярная внутренняя функция, а B — произведение Бляшке по нулям функции Φ, и допустив, что нулей в круге нет в очень сильном смысле, а именно $B = \vartheta = 1$, в 1970 году В. П. Хавин и Ф. А. Шамоян доказали, см. [6], что будет гарантирована половинная гладкость для Φ в сравнении с гладкостью функции φ, при условии, что показатель гладкости принадлежит промежутку $(0,1)$, причём результат точен. Этот результат был затем распространён на случай произвольного положительного показателя гладкости, см. книгу [17].

В работе [8] Н. А. Широков доказал, что при условии суммируемости логарифма модуля граничных значений в некоторой степени, можно гарантировать меньшее падение гладкости для глобально липшицевых внешних функций в единичном круге. Точнее, в работе [8] было показано, что можно гарантировать гладкость порядка $p\alpha/(p+1)$ для внешней функции F с модулем $\varphi \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{T})$, если выполняется условие

$$B_p := \left(\int_{\mathbb{T}} |\log \varphi|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Стоит отметить, что при $p = 1$ получается в точности $\alpha/2$, а также что у любой

ограниченной аналитической функции в круге граничные значения заведомо удовлетворяют условию
$$\int_{\mathbb{T}} |\log\varphi| < \infty.$$
Кроме того, гладкость не падает вовсе, если $\log\varphi \in \mathrm{BMO}$ при $0 < \alpha < 1$, что было также доказано в [8].

Дальнейшим шагом в развитии исследований проблемы глобальной граничной гладкости аналитических функций стало рассмотрение случая единичного шара многомерного комплексного пространства. Мы имеем в виду работу [7], где было доказано, что если модуль $|f|$ принадлежит α-гёльдеровому классу на единичной сфере $\mathbb{S}^n$ при $0 < \alpha \le 1$, а сама f — функция, голоморфная в открытом шаре $\mathbb{B}^n$ и непрерывная в замкнутом шаре $\overline{\mathbb{B}^n}$, такова, что $f(z) \ne 0$, $z \in \mathbb{B}^n$, то она $\alpha/2$-гёльдерова на $\overline{\mathbb{B}^n}$.

Описанное выше поведение ограниченной аналитической функции в круге носит локальный характер, что было показано в работе [3]. Конкретнее, условие Гёльдера на φ только в одной точке обусловливает половинную гладкость для Φ в той же точке "в среднем". В той же статье было отмечено, что измерять "среднюю гладкость" аналитической функции Φ в точке удобно в терминах средней осцилляции или в терминах усредненных конечных разностей. При этом взятая по дуге (или, скорее, отрезку, если мы начнём работать с периодическими функциями на прямой вместо функций на окружности) I средняя осцилляция функции f с периодом 2π представляет собой число

$$\nu_r(f;I) = \inf_c \left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c|^r\right)^{1/r}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем комплексным постоянным c; а $r \in [1,\infty)$ — произвольное число. Заметим, что средняя осцилляция, то есть число $\nu_r(f;I)$, увеличивается при возрастании r. Для описания "средней гладкости" аналитической функции f в точке x можно использовать в качестве критерия следующее неравенство: $\nu_r(f;I) \le \omega(|I|)$ при не очень длинном отрезке I (как уже было сказано, мы часто отождествляем функцию на окружности с её 2π-периодическим продолжением на прямую), например, $|I| \le 4\pi$, где ω — непрерывная, возрастающая, неотрицательная на $[0,+\infty)$, равная нулю в нуле, строго положительная везде, кроме нуля, функция. В случае выбора степенной шкалы для ограничивающей функции, то есть $\omega(t) = Ct^\alpha, \alpha > 0$, указанное условие "правильно передаёт" гладкость лишь при $\alpha \le 1$. Другие свойства средних осцилляций ν и их связь с локальными и глобальными гёльдеровыми и липшицевыми классами гладкости представлены в работах [10] и [3].

Таким образом, задача обобщения результатов о падении локальной гладкости внешней и аналитической функции в круге без нулей, непрерывной плоть до границы, на случай многомерного единичного шара представляется актуальной.

Достаточно давно известно, что в интерполяционном смысле шкала аналитических классов Харди ведет себя на единичной окружности подобно шкале L^p. Для метода действительной интерполяции существует более сильное и точное утверждение, а именно: пара (H^r, H^t) является K-замкнутой в паре (L^r, L^t) для всех $r, t \in (0, \infty]$.

Напомним, что подпара (F_0, F_1) пары (E_0, E_1) квази-банаховых пространств считается K-замкнутой, если любое разложение

$$f = e_0 + e_1, e_i \in E_i \text{ вектора } f \in F_0 + F_1$$

порождает разложение

$$f = f_0 + f_1 \text{ с } f_i \in F_i,$$

где

$$||f_i||_{F_i} \leq C||e_i||_{E_i}, i = 1, 2.$$

При изучении классов Харди это означает, упрощённо говоря, что любое измеримое разложение (“граничной функции”) для аналитической функции порождает “аналитическое” разложение со слагаемыми приблизительно такого же “размера”.

В этом утверждении относительно K-замкнутости для шкалы H^p на единичной окружности трудными случаями являются те, для которых $r, t \in (0, 1] \cup \{+\infty\}$. Наиболее общий вид решения в этом случае был впервые получен Ж. Пизье в работе [16]. Другие методы решения этой задачи представлены в работах [9] и [14]. В обзоре [14] также рассмотрен случай весовых пространств Харди.

Следовательно, доказательство K-замкнутости пары $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$ в случае показателей r и p, удовлетворяющих неравенствам $(n-1)/n < r < p < \infty$ представляется актуальным.

В статье [13] на странице 695 доказывается следующая лемма, которая относится к описанию свойств функций f, удовлетворяющих условию $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$, в терминах поточечных оценок для преобразования Гильберта.

Лемма. *Пусть* $f > 0$ *— измеримая на* $\mathbb{T}$ *функция (где* $\mathbb{T}$ *— единичная окружность). Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{T})$, *если и только если существуют числа* $c > 1$ *и*

$0 < \rho < 1$ а также функция $w > 0$ такие, что $f/c \le w \le cf$ и $|\mathcal{H}(w^\rho)| \le cw^\rho$, где $\mathcal{H}$ — преобразование Гильберта на $\mathbb{T}$, то есть,

$$\mathcal{H}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(t)}{\mathrm{tg}(\frac{x-t}{2})}\, dt.$$

Необходимо отметить, что эта лемма активно использовалась в теории интерполяции одномерных аналитических классов Харди (см. [13]). К сожалению, упомянутая выше лемма относится лишь к единичной окружности $\mathbb{T}$. В связи с этим возникают вопросы о постановке и доказательстве аналогичного результата для случая пространств $\mathbb{R}^n$.

Характеризация условия $\log f \in \mathrm{BMO}$ в терминах поточечных оценок для преобразований Рисса актуальна и уже была использована в работе [5].

В статье С. В. Бочкарёва [1] доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\{V_n\}$ — ядра Валле-Пуссена на окружности, $Q_0 = 1, Q_n = V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ при $n \ge 1$. Для $f \in L^1$ положим*

$$\|f\|_D := \sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I \sum_{2^{-n} \le |I|} \left| \int\limits_0^{2\pi} f(t) Q_n(x-t) dt \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда такая норма эквивалента норме $\|f\|_{\mathrm{BMO}}$.

Позднее это утверждение было использовано С. В. Бочкарёвым в различных вопросах, связанных с тригонометрическими рядами.

В работе [2] автор диссертации и А. Целищев доказали обобщение этого неравенства, заменив ядра Валле-Пуссена на более общую систему функций. Приведём формулировку этой теоремы.

Теорема. *Пусть $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система функций на $\mathbb{R}^d$, таких что*
1) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi_n \equiv 1$,
2) $\operatorname{supp} \psi_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \le |x| \le 2^{n+1}\}$,
3) $2^{-nd} \int |D^\alpha \psi_n(\xi)|^2 d\xi \le K 2^{-2n|\alpha|}$ *для $0 \le |\alpha| \le a$, где a — наименьшее натуральное число, больше либо равное $d/2$.*
Определим оператор $\widehat{\Delta_n f} := \psi_n \hat{f}$ и норму

$$\|f\|_D := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q \sum_{2^{-n} \le l(Q)} |\Delta_n f(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

супремум берётся по всем кубам Q, а $l(Q)$ — длина ребра куба Q. Тогда $C_1\|f\|_D \le \|f\|_{\mathrm{BMO}} \le C_2 \|f\|_D$ для некоторых постоянных C_1 и C_2.

Выражения, схожие с нормой $\|f\|_D$, используются в книге [12] с целью характеризации шкалы пространств Трибеля–Лизоркина. Отметим, что подобную характеризацию можно назвать характеризацией вида Литтлвуда–Пэли. Таким образом характеризация вида Литтлвуда–Пэли пространства Трибеля–Лизоркина представляется весьма важной задачей.

Таким образом, задачи

- обобщения падения локальной гладкости внешней и аналитической функции в круге без нулей, непрерывной плоть до границы, на случай многомерного единичного шара,
- доказательства K-замкнутости пары $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$ в случае показателей r и p, удовлетворяющих неравенствам $(n-1)/n < r < p < \infty$,
- характеризации условия $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ в терминах поточечных оценок для преобразований Рисса,
- характеризации Литтлвуда–Пэли пространства Трибеля–Лизоркина посредством системы функций, удовлетворяющей условиям, аналогичным теореме Хёрмандера–Михлина о мультипликаторах

представляются актуальными.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации — новые.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении задач теории аналитических функций, гладких вплоть до границы, теории интерполяции а также теории пространств Трибеля–Лизоркина. Кроме того, стоит отметить, что результаты третьей главы диссертации уже получили интерполяционные следствия, см [5].

Методология и методы исследования

Методы, применённые нами при доказательствах основных результатов данной работы, объединены единым происхождением: всё это суть "вещественные методы", то есть методы теории функций вещественных переменных. Если говорить точнее, то мы, в основном, используем методы теории сингулярных интегральных операторов.

Положения, выносимые на защиту

- Аналитическая в шаре $\mathbb{B}^n$ и непрерывная на $\mathbb{B}^n \cup \mathbb{S}^n$ функция без нулей внутри шара, у которой модуль α-липшицев в некоторой точке на сфере, является $\alpha/2$-липшицевой в той же точке "в среднем".

- Внешняя в шаре функция, удовлетворяющая условию $\int_{\mathbb{S}^n} |\log|f|| < \infty$, модуль которой α-липшицев в некоторой точке на сфере, является $p\alpha/(p+n)$-липшицевой в той же точке "в среднем", причём показатель $p\alpha/(p+n)$ неулучшаемый.

- Пара $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$ K-замкнута, если показатели r и p удовлетворяют неравенствам
$$\frac{n-1}{n} < r < p \leq \infty.$$

- Получено новое описание измеримых неотрицательных функций f, удовлетворяющих условию $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

- Получена новая характеризация пространств Трибеля–Лизоркина $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$ посредством разложений Литтлвуда–Пэли.

Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Отметим также, что результаты работы были доложены на различных семинарах по вещественному, комплексному и гармоническому анализу: Séminaire d'analyse harmonique, Paris 11 (2015), Séminaire d'analyse de Bordeaux (2018), на семинаре по линейному и комплексному анализу ПОМИ РАН (2018), на международной конференции Числа, Формы и Геометрия в Сочи (2017).

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в работах [1–3], в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК.

Личный вклад автора

Все основные новые результаты, приведённые в диссертации, доказаны мной лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Библиография содержит 31 наименование, в число которых включены три работы автора по теме диссертации.

Содержание работы

Первая глава

В первой главе (она же введение) обосновывается актуальность диссертации, формулируются цели работы, аргументируется научная новизна проведённых исследований. Кроме того, в этой главе мы обосновываем теоретическую значимость полученных результатов, а также представляем выносимые на защиту положения. Во введение включён весьма полный исторический обзор.

Вторая глава

Во второй главе диссертации представлены теоремы, обобщающие описанные выше утверждения о падении локальной гладкости в круге на случай единичного шара. В первой из теорем мы доказываем, что локальная граничная гладкость непрерывной вплоть до границы аналитической функции без нулей в открытом шаре падает по отношению к граничной гладкости её модуля не более, чем вдвое. Приведём точную формулировку.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (0,1)$. *Предположим, что* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ *— аналитическая функция, не имеющая нулей внутри* $\mathbb{B}^n$ *и непрерывная вплоть до границы, т.е.* n*-мерной сферы* $\mathbb{S}^n$*, а также, что для всех* $t \in \mathbb{S}^n$ *справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \le C_0 d(t, \mathbb{1})^\alpha,$$

где $\phi := |f|$, $\mathbb{1} := (1, 0, \ldots, 0)$, *а* $d(u, v) := |1 - \langle u, v\rangle|^{1/2}$ *является стандартной (анизотропной) метрикой на* n*-мерной единичной сфере* $\mathbb{S}^n$*. Тогда для всех* *неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$ удовлетворяет следующему условию:*

$$\nu(f,Q) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{2}},$$

где $l\,(Q)$ — радиус анизотропного шара $Q \subseteq \mathbb{S}^n$.

Отметим, что, разумеется, в рассматриваемой многомерной ситуации средняя осцилляция задается формулой

$$\nu\,(f;Q) = \inf_c \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f-c| \right).$$

Напомним определение внешней в шаре функции.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ — ***внешняя***, если для всех $z \in \mathbb{B}^n$,

$$f(z) = \exp\left[\int\limits_{\mathbb{S}^n} (2C(z,\xi)-1)\,\mathrm{Re}(\log f(\xi))d\sigma(\xi) \right].$$

В двух других основных теоремах этой главы мы устанавливаем падение локальной гладкости внешней функции в единичном шаре (определение внешней функции даётся в тексте диссертации), удовлетворяющей некоторым предположениям на модуль граничных значений, по отношению к гладкости её модуля и доказываем точность этого утверждения, соответственно. Вот эти теоремы.

Теорема. *Пусть $\alpha \in (0,1)$. Предположим, что внешняя функция $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ такова, что для всех $t \in \mathbb{S}^n$ справедливо неравенство*

$$|\phi(t) - \phi(\mathbb{1})| \leq C_0 d(t,\mathbb{1})^{\alpha}.$$

Предположим также, что

$$B_p := \int\limits_{\mathbb{S}^n} |\log\phi(z)|^p d\sigma(z) < \infty \text{ для некоторого } p > 1.$$

Тогда для всех неизотропных шаров Q, содержащих точку $\mathbb{1}$, средняя осцилляция $\nu(f,Q)$, измеряющая гладкость, удовлетворяет следующему условию:

$$\nu(f,Q) \leq Cl(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}},$$

где $l(Q)$ — радиус шара Q, а q — сопряжённый с p показатель.

Сравнивая эту теорему с предыдущей, можно заметить, что то там функция f — не внешняя, но почти, в том смысле, что соответствующее интегральное представление можно написать, слегка отступив внутрь круга, чем мы и воспользовались при доказательстве.

Теорема. *Пусть* $p \in (n, +\infty)$. *Тогда для каждого* $\delta > 0$ *существует такая внешняя функция* $f_0 : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$, *что* $\log|f_0| \in L^p(\mathbb{S}^n)$, $|f_0| \in \mathrm{Lip}_\alpha(\mathbb{1})$, *для всех неизотропных шаров* Q, *содержащих точку* $\mathbb{1}$, *выполняется*

$$\nu(f_0, Q) \lesssim l(Q)^{\frac{\alpha p}{p+n}} \left(\equiv l(Q)^{\frac{\alpha}{n+1-\frac{n}{q}}}\right),$$

где $l(Q)$ *— радиус* Q, *а также при этом* $f_0 \notin \mathrm{Lip}_{\frac{\alpha p}{p+n}+\delta}(\mathbb{1})$ *“в среднем.”*

Третья глава

В одной из основных теорем этой главы мы доказываем следующее.

Теорема. *Пусть* $f > 0$ *— измеримая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, *если существуют числа* $c > 1$ *и* $0 < \rho < 1$, *а также функция* $w \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, $p_0 > 1$ *такие, что* $f/c \le w \le cf$ *и* $|\mathcal{R}_j(w^\rho)| \le cw^\rho$ *для всех* j *от 1 до* n, *где* $\mathcal{R}_j$ *—* j*-ое преобразование Рисса в* $\mathbb{R}^n$.

Во второй теореме мы получаем необходимое и достаточное условие того, что логарифм неотрицательной измеримой функции принадлежит пространству $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Пусть* $f > 0$ *— измеримая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$, *если и только если существуют положительные функции* $g_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $\alpha \in \mathbb{R}$ *такие, что* $f = (g_1/g_2)^\alpha$ *и при этом* $|\mathcal{R}_j g_i| \le c g_i$ *для всех* j *от 1 до* n, *и* $i \in \{1, 2\}$.

Четвертая глава

Если показатель p удовлетворяет неравенствам $\frac{n-1}{n} < p < \infty$, то соответствующее пространство Харди на пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть интерпретировано как пространство гармонических векторных полей $(h_0, h_1, \ldots h_n)$ в $\mathbb{R}^{n+1}_+$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t>0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{n} |h_j(x,t)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Подобное векторное поле всегда порождается единственным распределением ϕ на $\mathbb{R}^n$ таким, что функция h_0 представляет собой интеграл Пуассона от ϕ, а функции $h_j, 1 \leq j \leq n$ являются интегралами Пуассона от $\mathcal{R}_j\phi$, где $\mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ суть преобразования Рисса, то есть

$$\mathcal{R}_j(f)(x) = c_n v.p. \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - t_j}{|x-t|^{n+1}} f(t)\, dt,$$

где $c_n = \Gamma[(n+1)/2]/\pi^{(n+1)/2}$. Кроме того, функции $h_0, \ldots, h_n$ имеют граничные значения $u_0, \ldots, u_n$ при $t \to 0$ почти всюду. Хорошо известно, что отображение $(h_0, \ldots, h_n) \to (u_0, \ldots, u_n)$ является изометрическим вложением пространства $H^p(\mathbb{R}^n)$ в пространство $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n) := (L^p(\mathbb{R}^n) \oplus ... \oplus L^p(\mathbb{R}^n))$. Образ этого вложения мы будем обозначать через $\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что если $p \geq 1$, то ϕ и u_0 совпадают как распределения (более того, распределения $\mathcal{R}_j\phi$ равно u_j для каждого $1 \leq j \leq n$). С другой стороны, при $p < 1$ это не будет выполняться в общем случае. Более подробное изложение данного феномена представлено в книге [11].

В основной теореме этой главы мы доказываем, что пара $(\mathbb{H}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n))$ является K-замкнутой в паре $(\mathbb{L}^r(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^n))$.

Теорема. *Пара “вещественных” пространств Харди* $(\mathbb{H}^{p_1}(\mathbb{R}^n), \mathbb{H}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ *является K-замкнутой в паре пространств Лебега* $(\mathbb{L}^{p_1}(\mathbb{R}^n), \mathbb{L}^{p_2}(\mathbb{R}^n))$ *если* $\frac{n-1}{n} < p_1 < p_2 \leq \infty$.

Пятая глава

Напомним определение пространств Трибеля–Лизоркина.

Определение 2. Пусть φ — набор гладких функций на $\mathbb{R}^d$, $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких, что

1) $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{n-1} \leq |x| < 2^{n+1}\}$,

2) $\sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(x) = 1$ *при всех* $x \neq 0$,

3) $2^{-nd} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha \varphi_n(\xi)| d\xi \leq K_\varphi \cdot 2^{-n|\alpha|}$ при всех $0 \leq |\alpha| \leq d+1$.

Зададим пространство ***Трибеля–Лизоркина*** $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$, где $p \in (1, +\infty)$ так: $f \in \mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$ тогда и только тогда, когда

$$||f||^p_\varphi := \sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \sum_{2^{-n} \leq l(Q)} |\Delta_{n,\varphi} f(x)|^p dx \right) < \infty,$$

где sup берётся по всем кубам $Q \subset \mathbb{R}^d$, $l\,(Q)$ — длина ребра куба Q, а операторы $\Delta_{n,\varphi}$ задаются следующим образом:$\widehat{\Delta_{n,\varphi} f}\,(x) = \varphi_n\,(x) \cdot \widehat{f\,(x)}$.

Формально говоря, классические пространства Трибеля–Лизоркина возникают здесь, когда все функции φ_n получаются из одной функции класса Шварца сдвигами и двоичными растяжениями, см. [12]. Основной результат пятой главы говорит о том, что на самом деле любая система $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условиям 1)–3) определения, даёт тот же результат.

Теорема. *Пусть $\varphi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — два набора, удовлетворяющие условиям 1)—3) из определения. Тогда $||f||_{\varphi} \lesssim ||f||_{\psi}$, где постоянная в эквивалентности зависит лишь от p и K_{ψ}*

Заключение

В заключение подведём итоги данной диссертационной работы.

1. Во-первых, мы установили количественный характер падения локальной гладкости внешней функции в шаре по отношению к локальной гладкости её модуля.

2. Во-вторых, мы доказали, что аналитическая в шаре и непрерывная вплоть до границы функция без нулей с α-липшицевым модулем в некоторой точке на сфере, является $\alpha/2$ липшицевой "в среднем" в этой же точке.

3. В-третьих, мы доказали K-замкнутость пары "вещественных" многомерных пространств Харди $(H^p(\mathbb{R}^n), H^q(\mathbb{R}^n))$ в соответствующей паре пространств Лебега (L^p, L^q) при $(n-1)/n \le p \le q \le \infty$.

4. В-четвёртых, мы получили характеризацию условия $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ в терминах поточечных оценок для преобразований Рисса.

5. В-пятых, нами была установлена более общая характеризация вида Литтлвуда–Пэли пространства Трибеля–Лизоркина $\mathfrak{F}^{0,p}_{\infty,\varphi}$.

Список публикаций автора по теме диссертации

[V1] И. Васильев, *О локальной гладкости аналитической функции и её модуля на границе шара: анонс*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 467, вып. 46, с. 30–33, (2018).

[V2] I. Vasilyev, *Some remarks on K-closedness for the couples of real Hardy spaces*, Journal of Functional Analysis, vol. 270, no. 2, p. 705–717, (2016).

[V3] И. Васильев, *Свойство* $\log(f) \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *в терминах преобразований Рисса*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 202, вып. 41, с. 59–69, (2013).

Список литературы

[1] С. Бочкарёв, *Ряды Валле-Пуссена в пространствах* ВМО*,* L_1*, и* $H^1(D)$*, и мультипликативные неравенства*, Труды МИАН, вып. 210, с. 41–64, (1995).

[2] И. Васильев и А. Целищев, *Об эквивалентной норме на пространстве* ВМО, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 456, вып. 45, с. 37–54, (2017).

[3] А. Васин, С. Кисляков и А. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью её модуля*, Алгебра и анализ, т. 25, вып. 3, с. 52–85, (2013).

[4] А. Медведев, *Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью её модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции*, Зап. научн. сем. ПОМИ, т. 434, вып. 43, с. 101–115, (2015).

[5] Д. Руцкий, A_1*-регулярность и ограниченность преобразований Рисса в банаховых решётках измеримых функций*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, вып. 44, с. 113–122, (2016).

[6] В. Хавин и Ф. Шамоян, *Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 19, вып. 1, с. 237–239, (1970).

[7] Н. Широков, *Гладкость голоморфной в шаре функции и её модуля на сфере*, Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, вып. 44, с. 123–128, (2016).

[8] Н. Широков, *Достаточные условия для гёльдеровской гладкости функций*, Алгебра и анализ, т. 25, вып. 3, с. 200–206, (2013).

[9] J. Bourgain, *Some consequences to Pisier's approach to interpolation*, Isr. J.Math, vol. 77, (1992), p. 165–185.

[10] R. DeVore, R. Sharpley, *Maximal functions measuring smoothness*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 47, no. 293, (1984), p. 1–115.

[11] J. Garcia-Cuerva and J. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, (1985), p. ii–viii, 1–604.

[12] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, 3 edition. Springer, (2014), 870 p.

[13] S. Kislyakov and T. Gamelin, *Uniform algebras as Banach spaces*, Handbook of Banach Spaces (W.B.Johnson and J.Lindedstrauss (ed)), Elsevier Science, (2001), p. 671–706.

[14] S. Kisliakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf., vol. 13, (1999), p. 102–140.

[15] J. Mashreghi and M. Shabankhah, *Zero sets and uniqueness sets with one cluster point for the Dirichlet space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 357, no. 2, (2009), p. 498–503.

[16] G. Pisier, *Interpolation between H^p spaces and non-commutative generalizations. I*, Pacific J. Math., vol. 155, no. 2, (1992), p. 341–368.

[17] N. Shirokov, *Analytic functions smooth up to the boundary*, Springer-Verlag, (1988), 214 p.

[18] B. Taylor and D. Williams, *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*, Michigan Math. J., vol. 18, no. 2, (1971), p. 129–139.