**Затула Дмитро Васильович, інженер-математик І катего&shy;рії НДЛ &laquo;Диференціальні рівняння та їх застосування в ме&shy;ханіці&raquo; кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Та&shy;раса Шевченка: &laquo;Оцінки розподілу напівнорм Гельдера від ви&shy;падкових процесів та їх застосування&raquo; (01.01.05 - теорія ймо&shy;вірностей і математична статистика). Спецрада Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевчен&shy;ка**

**Київський нацiональний унiверситет iменi Тараса Шевченка**

**На правах рукопису**

**Затула Дмитро Васильович**

**УДК 519.21**

**Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд**

**випадкових процесiв та їх застосування**

**01.01.05 — теорiя ймовiрностей i математична статистика**

**Дисертацiя на здобуття наукового ступеня**

**кандидата фiзико-математичних наук**

**Науковий керiвник**

**Козаченко Юрiй Васильович,**

**доктор фiзико-математичних наук, професор**

**Київ — 2017**

**2**

**ЗМIСТ**

**Вступ 4**

**Роздiл 1. Огляд лiтератури 28**

**Роздiл 2. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з банахових просторiв Fψ(Ω) випадкових**

**величин 34**

**2.1. Простори випадкових величин Fψ(Ω) та властивiсть Z . . . . . 34**

**2.2. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω), визначених на компактному метричному**

**просторi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46**

**2.3. Модулi неперервностi та умови Гельдера для випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω) випадкових величин . . . . . . . . . . . 54**

**2.4. Приклади . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 56**

**2.5. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв**

**з просторiв Fψ(Ω), визначених на iнтервалi [0,∞) . . . . . . . . 88**

**2.6. Застосування . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 111**

**2.6.1. Наближення процесiв з просторiв Fψ(Ω) цiлими функцiями екпоненцiального типу . . . . . . . . . . . . . . . . . 111**

**2.6.2. Застосування до задач теорiї пружностi . . . . . . . . . . 113**

**2.6.3. Застосування до розв’язання диференцiальних рiвнянь**

**з початковими умовами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 116**

**Висновки до Роздiлу 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 117**

**Роздiл 3. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Lp(Ω) випадкових величин 118**

**3.1. Означення та технiчнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . 118**

**3**

**3.2. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Lp(Ω), визначених на компактному метричному**

**просторi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 119**

**3.3. Модулi неперервностi та умови Гельдера для випадкових процесiв з просторiв Lp(Ω) випадкових величин . . . . . . . . . . . 129**

**3.4. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв**

**з просторiв Lp(Ω) випадкових величин, визначених на iнтервалi**

**[0,∞) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 133**

**3.5. Наближення процесiв з просторiв Lp(Ω) цiлими функцiями екпоненцiального типу . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137**

**Висновки до Роздiлу 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 139**

**Роздiл 4. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Орлiча випадкових величин 140**

**4.1. Означення та технiчнi результати . . . . . . . . . . . . . . . . . 140**

**4.2. Оцiнки розподiлу напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв**

**з просторiв Орлiча, визначених на iнтервалi [0, T] . . . . . . . . 141**

**4.3. Приклади . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149**

**Висновки до Роздiлу 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152**

**Висновки 153**

**Список використаних джерел 154**

**4**

**ВСТУП**

**Актуальнiсть теми.**

**Вивчення рiзних класiв випадкових процесiв, дослiдження їх загальних**

**властивостей та отримання оцiнок розподiлу функцiоналiв вiд них є актуальними задачами теорiї випадкових процесiв. Наскiльки б не був досконалий**

**метод, згiдно iз яким проводяться спостереження, вимiри чи дослiди, практично не можливо уникнути впливу на нього певних випадкових чинникiв.**

**I спочатку вважалося, що всi цi фактори мають гауссовий розподiл. З кiнця 60-х рокiв ХХ столiття науковцi почали враховувати специфiки впливу**

**чинникiв i виявилось, що не всi вони пiдпорядковуються гауссовому розподiлу. Вiдтак з’явились такi класи випадкових величин як субгауссовi, строго**

**субгауссовi, передгауссовi, строго передгауссовi, ϕ-субгауссовi, квадратично**

**гауссовi та деякi iншi.**

**Класичнi результати щодо властивостей гауссових випадкових процесiв, а**

**також дослiдження властивостей розподiлiв функцiоналiв вiд них мiстяться**

**у роботах Н. Вiнера, А. М. Колмогорова, Н. Коно, Ж. П. Кахана, М. Р. Лiдбеттера та Д. Лiндгрена. Аналiтичнi властивостi вибiркових функцiй стацiонарних та нестацiонарних процесiв дослiджували А. В. Скороход, Г. Крамер,**

**М. Р. Лiдбеттер, К. Фернiк та iншi. Р. М. Дадлi у своїй роботi [88] дослiджував**

**питання про отримання оцiнок розподiлу напiвнорм Гельдера та розподiлу**

**супремума вiд гауссових процесiв, визначених на компактi. Його результати**

**були узагальненi та доповненi для деяких класiв процесiв з просторiв Орлiча**

**Ю. В. Козаченком [34, 35]. Слiд зауважити, що у всiх цих роботах як правило**

**розглядалися процеси, визначенi на компактi.**

**Теорiя випадкових процесiв iз просторiв Орлiча, просторiв Subϕ(Ω) та**

**DV,W (Ω)-просторiв пов’язана iз проблемою знаходження норм в цих просторах. Задля вирiшення задачi замiсть норм у цих просторах використовуються**

**5**

**еквiвалентнi їм моментнi норми. При оцiнюваннi розподiлiв рiзних функцiоналiв вiд процесiв iз цих просторiв оцiнки дещо погiршуються, тому виникає**

**необхiднiсть розглядати банаховi простори з моментними нормами. Це дає**

**можливiсть у багатьох випадках отримати кращi оцiнки, нiж iз використанням, наприклад, норм iз просторiв Орлiча.**

**Банаховi простори випадкових величин, що задовольняють певним моментним нерiвностям, Fψ(Ω) були введенi С. В. Єрмаковим та Є. I. Островським**

**у [26]. В їхнiй роботi розглядались граничнi теореми для випадкових процесiв**

**iз цих просторiв. У роботi Ю. В. Козаченка та Ю. Ю. Млавця [36] дослiджено**

**основнi властивостi випадкових величин та процесiв з просторiв Fψ(Ω), а також показано, що простори Fψ(Ω) можна використовувати для знаходження**

**оцiнок наближення при пiдрахунку iнтегралiв методом Монте-Карло. Тому**

**вивчення цих просторiв є актуальною задачею.**

**Основним завданням дисертацiйної роботи є знаходження оцiнок розподiлiв напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв iз просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω),**

**p > 1, визначених на компактi та на нескiнченному промiжку, а також покращення подiбних рзультатiв для процесiв з просторiв Орлiча. Також у дисертацiї знайдено умови, за яких для таких процесiв виконується умова Гельдера. Актуальнiсть дослiджень в цьому напрямку зумовлена застосуванням**

**отриманих результатiв. Зокрема, побудовано наближення процесiв з просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω), p > 1, визначених на нескiнченному промiжку, за допомогою цiлих функцiй експоненцiального типу i т. i.**

**Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами.**

**Дисертацiйна робота виконана в рамках державної бюджетної науководослiдної теми №11БФ038-02 “Еволюцiйнi системи: дослiдження аналiтичних**

**перетворень, випадкових флуктуацiй та статистичних закономiрностей” (номер державної реєстрацiї 0111U006561) i №16БФ038-02 “Дослiдження та статистичний аналiз асимптотичної поведiнки складних стохастичних неоднорiдних динамiчних систем” (номер державної реєстрацiї 0116U002530) кафедри теорiї ймовiрностей, статистики та актуарної математики механiко-**

**6**

**математичного факультету Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослiдних робiт “Сучаснi математичнi проблеми природознавства, економiки та**

**фiнансiв”.**

**Мета i завдання дослiдження.**

**Метою роботи є подальший розвиток теорiї випадкових процесiв з просторiв випадкових величин Fψ(Ω), Lp(Ω) та процесiв з просторiв Орлiча, а**

**також розширення кола теоретичних i практичних застосувань даної теорiї,**

**зокрема, до задачi наближення випадкових процесiв цiлими функцiями експоненцiального типу. В роботi дослiджуються наступнi задачi:**

**• дослiдження аналiтичних властивостей банахових просторiв з моментними нормами Fψ(Ω);**

**• знаходження оцiнок розподiлiв напiвнорм Гельдера вiд випадкових**

**процесiв з просторiв Fψ(Ω), Lp(Ω) та Орлiча, визначених на компактi;**

**• знаходження модулiв неперервностi та умов, за яких виконується умова Гельдера, для випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω), Lp(Ω) та**

**Орлiча, визначених на компактi;**

**• знаходження оцiнок розподiлiв напiвнорм Гельдера та модулiв неперервностi вiд випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω), визначених на нескiнченному промiжку;**

**• наближення процесiв з просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω) за допомогою цiлих**

**функцiй експоненцiального типу.**

**Об’єктом дослiдження є випадковi процеси з просторiв випадкових величин Fψ(Ω), Lp(Ω) та Орлiча.**

**Предметом дослiдження є оцiнки розподiлiв напiвнорм Гельдера, модулi неперервностi та умови Гельдера для випадкових процесiв з просторiв**

**випадкових величин Fψ(Ω), Lp(Ω) та Орлiча.**

**Методи дослiдження.**

**В роботi використано методи теорiї випадкових процесiв, функцiонально-**

**7**

**го аналiзу, а також теорiї випадкових процесiв з просторiв Орлiча та аналiтичний апарат математичного аналiзу.**

**Наукова новизна одержаних результатiв.**

**Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такi:**

**• знайдено умови, за яких в просторах випадкових величин Fψ(Ω) є певнi допущення про розподiл максимума скiнченного числа випадкових**

**величин;**

**• отримано оцiнки розподiлiв напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω), Lp(Ω) та Орлiча, визначених на компактi;**

**• знайдено умови, за яких виконується умова Гельдера, та знайдено модулi неперервностi для випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω), Lp(Ω)**

**та Орлiча, визначених на компактi;**

**• вперше отримано оцiнки розподiлiв напiвнорм Гельдера та модулi неперервностi вiд випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω), визначених на нескiнченному промiжку;**

**• отриманi результати вперше застосовано для побудови точностi та надiйностi наближення процесiв з просторiв Fψ(Ω) та Lp(Ω), визначених**

**на нескiнченному промiжку, за допомогою цiлих функцiй експоненцiального типу.**

**Практичне значення одержаних результатiв.**

**Дисертацiйна робота має теоретичний характер. Результати, отриманi в**

**дисертацiї, можуть застосовуватись у теорiї випадкових процесiв, а також у**

**багатьох природничих та соцiально-економiчних науках, зокрема, у фiнансовiй математицi, метеорологiї, геофiзицi, геологiї, радiотехнiцi, теорiї кодування iнформацiї, стохастичному моделюваннi тощо.**

**Особистий внесок здобувача.**

**Доведення всiх нових результатiв, що виносяться на захист дисертацiї,**

**отриманi автором самостiйно. За результатами дисертацiйного дослiдження**

**опублiковано 5 робiт, з яких одна у спiвавторствi з науковим керiвником,**

**професором Ю. В. Козаченком. У цiй роботi керiвнику належать: постанов-**

**8**

**ка задачi, пропозицiї щодо методiв її розв’язання та загальне керiвництво**

**роботою.**

**Апробацiя результатiв.**

**Основнi результати дисертацiйної роботи доповiдались та обговорювались**

**на таких наукових конференцiях:**

**• П’ятнадцята мiжнародна наукова конференцiя iменi академiка Михайла Кравчука (м. Київ, Україна, 2014);**

**• Всеукраїнська наукова конференцiя “Сучаснi проблеми теорiї ймовiрностей та математичного аналiзу” (м. Iвано-Франкiвськ, 2015);**

**• Мiжнародна мiждисциплiнарна конференцiя студентiв, аспiрантiв та**

**молодих вчених “Шевченкiвська весна — 2015” (м. Київ, Україна, 2015);**

**• International conference “Probability, Reliability and Stochastic Optimization” (Kyiv, Ukraine, 2015);**

**• International scientific and practical conference “Economics, Science, Education: Integration and Synergy” (Bratislava, Slovak Republic, 2016);**

**• Всеукраїнська наукова конференцiя “Сучаснi проблеми теорiї ймовiрностей та математичного аналiзу” (м. Iвано-Франкiвськ, 2016);**

**• Мiжнародна наукова конференцiя “Методика викладання та методи**

**дослiдження в математицi” (м. Берегове, 2016).**

**та наукових семiнарах:**

**• засiданнi наукового семiнару кафедри вищої математики фiзико-математичного iнституту Нацiонального педагогiчного унiверситету iменi М. П. Драгоманова пiд керiвництвом проф. М. В. Працьовитого**

**(м. Київ, Україна, 2016);**

**• засiданнi наукового семiнару “Теорiя стохастичних процесiв та їх застосування” кафедри теоретичної та прикладної статистики механiкоматематичного факультету Львiвського нацiонального унiверситету**

**iменi Iвана Франка пiд керiвництвом проф. Я. I. Єлейка (м. Львiв,**

**Україна, 2016);**

**• засiданнi наукового семiнару “Статистичнi проблеми для випадкових**

**9**

**процесiв i полiв” кафедри математичного аналiзу та теорiї ймовiрностей фiзико-математичного факультету Нацiонального технiчного унiверситету України “Київський полiтехнiчний iнститут iменi Iгоря Сiкорського” пiд керiвництвом проф. О. I. Клесова та проф.**

**О. В. Iванова (м. Київ, Україна, 2016);**

**• засiданнi наукового семiнару вiддiлу математичних методiв дослiдження операцiй Iнституту кiбернетики iменi В. М. Глушкова Нацiональної академiї наук України пiд керiвництвом проф., члена-кореспондента НАН України П. С. Кнопова (м. Київ, Україна, 2016);**

**• засiданнi наукового семiнару “Теорiя ймовiрностей та математична**

**статистика” кафедри теорiї ймовiрностей, статистики та актуарної математики механiко-математичного факультету Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка пiд керiвництвом проф.**

**Ю. С. Мiшури та проф. Ю. В. Козаченка (м. Київ, Україна, 2016).**

**Публiкацiї.**

**За результатами дисертацiйної роботи опублiковано 13 робiт, а саме:**

**• 5 статей, одну з яких [131] надруковано у фаховому виданнi, переклад якого iндексований в наукометричнiй базi SCOPUS, двi статтi**

**[132, 134] опублiковано в мiжнародних журналах та двi статтi [130,**

**133] опублiковано в наукових виданнях з перелiку фахових видань,**

**затвердженого МОН України;**

**• 8 тез доповiдей на мiжнародних i вiтчизняних наукових конференцiях**

**[135]-[142].**

**Структура та обсяг роботи.**

**Дисертацiя складається зi вступу, чотирьох роздiлiв, якi мiстять пiдроздiли, висновкiв та списку використаних джерел, який нараховує 142 найменування. Повний обсяг роботи становить 167 сторiнок, iз них список використаних**

**джерел займає 14 сторiнок.**

**Змiст роботи.**

**У вступi обґрунтовано актуальнiсть обраної теми, сформульовано мету**

**10**

**i завдання дослiдження, об’єкт, предмет та методи дослiдження, висвiтлено**

**наукову новизну, коротко викладенi основнi результати роботи та окреслено**

**можливi практичнi застосування одержаних результатiв, наведено вiдомостi**

**про публiкацiї, особистий внесок здобувача i ступiнь апробацiї роботи.**

**У першому роздiлi наведено огляд лiтератури за темою дисертацiйного**

**дослiдження та по спорiдненим питанням. Висвiтлено сучасний стан вивчення**

**проблем, близьких до тих, що розглядаються у дисертацiйнiй роботi.**

**Другий роздiл присвячено знаходженню оцiнок розподiлiв напiвнорм Гельдера вiд випадкових процесiв з просторiв Fψ(Ω) та їх застосуванню.**

**У першому пiдроздiлi цього роздiлу наведено необхiднi для подальшої**

**роботи означення та твердження, зокрема, означення модуля неперервностi**

**функцiї, метричної масивностi та деякi вiдомi результати стосовно властивостей просторiв Fψ(Ω).**

**Означення 1. ([36]) Нехай ψ(u) > 0, u > 1 — деяка монотонно зростаюча**

**функцiя така, що ψ(u) → ∞ при u → ∞. Випадкова величина ξ належить**

**простору Fψ(Ω), якщо виконується наступна умова:**

**sup**

**u>1**

**(E|ξ|**

**u**

**)**

**1/u**

**ψ(u)**

**< ∞.**

**Подiбне означення було сформульоване в роботi С. В. Єрмакова та**

**Є. I. Островського [26]. Але там вимагалось, щоб Eξ = 0, якщо ξ ∈ Fψ(Ω).**

**Крiм того, розглядались випадковi величини, такi що E |ξ|**

**u = ∞ при певному**

**u > 0.**

**Також у їх роботi доведено, що Fψ(Ω) є простором Банаха з нормою**

**kξkψ = sup**

**u>1**

**(E |ξ|**

**u**

**)**

**1/u**

**ψ(u)**

**.**

**Теорема 1. ([36]) Якщо випадкова величина ξ належить простору Fψ(Ω),**

**то ∀x > 0 виконується наступна нерiвнiсть:**

**P{|ξ| > x} 6 inf**

**u>1**

**kξk**

**u**

**ψ**

**· (ψ(u))u**

**x**

**u**

**.**

**11**

**Далi дослiджується властивiсть Z просторiв Fψ(Ω) для рiзних класiв функцiй ψ.**

**Нехай ξ1, ..., ξn — випадковi величини з простору Fψ(Ω). Позначимо**

**ηn = max**

**16k6n**

**|ξk|, an = max**

**16k6n**

**kξkkψ.**

**Означення 2. Банаховий простiр має властивiсть Z, якщо iснують монотонно неспадна функцiя z(x) > 0, монотонно зростаюча функцiя U(n) та**

**дiйсне число x0 > 0 такi, що для будь-якої послiдовностi випадкових величин (ξk, k = 1, n) з простору Fψ(Ω), ∀x > x0 i для всiх n > 2 виконується**

**наступна нерiвнiсть:**

**P{ηn > x · an · U(n)} 6**

**1**

**n**

**exp{−z(x)}.**

**Теорема 2. Нехай ψ(u) = u**

**α**

**, α > 0. Тодi наступна нерiвнiсть виконується для x > max n**

**1**

**(ln 3)α ,**

**2e ln 3**

**α(ln 3−1)αo**

**:**

**P {ηn > x · an · (ln(n + 2))α**

**} 6**

**1**

**n**

**exp n**

**−**

**α**

**e**

**x**

**1/αo**

**,**

**тобто z(x) = α**

**e**

**x**

**1/α**

**, U(n) = (ln(n + 2))α**

**.**

**Теорема 3. Нехай ψ(u) = (ln(u + 1))λ**

**, λ > 0. Тодi наступна нерiвнiсть**

**виконується для x > e**

**λ**

**· max**

**ln 2 ln(2+e**

**λ/2**

**)**

**λ(ln(2+e**

**λ/2)−1) ·**

**ln 2**

**λ**

**−1**

**λ**

**, 1**

**:**

**P**

**(**

**ηn > x · an ·**

**ln ln**

**n + 1 + e**

**λ/2**

**2/λλ**

**)**

**6**

**6**

**1**

**n**

**exp (**

**−λ**

**exp (**

**x**

**1/λ ln 2**

**λ**

**e**

**)**

**− 1**

**!) ,**

**тобто z(x) = λ**

**exp n**

**x**

**1/λ ln 2**

**λ**

**e**

**o**

**− 1**

**, U(n) =**

**ln ln**

**n + 1 + e**

**λ/2**

**2/λλ**

**.**

**Теорема 4. Нехай ψ(u) = e**

**αuβ**

**, α > 0, β > 0. Тодi наступна нерiвнiсть**

**виконується при ∀x > exp**

**ln 3**

**b**

**√β**

**2(ln 3−1)**

**2β**

**β+1**

**, b =**

**β**

**α1/β · (β + 1)−**

**β+1**

**β :**

**P**

**n**

**ηn > x · an · exp n**

**(ln(n + 2))**

**2β**

**β+1oo 6**

**1**

**n**

**exp (**

**−**

**β**

**α1/β**

**2**

**β + 1β+1**

**β**

**(ln x)**

**β+1**

**2β**

**)**

ВИСНОВКИ

Дисертацйнароботаприсвяченаподальшомурозвиткутеорївипадкових

процесвзпросторввипадковихвеличинψΩΩтапросторвОрлча

атакожзастосуваннюданоїтеорїдозадачнаближеннятакихвипадкових

процесвззаданоюточнстютанадйнстюзадопомогоюцлихфункцйекспоненцальноготипузадачтеорїпружносттадорозв’язаннядиференцальнихрвняньзпочатковимиумовами

Основнрезультатироботиможнапдсумуватинаступнимчином

ЗнайденоумовизаякихвпросторахвипадковихвеличинψΩєпевндопущенняпророзподлмаксимумаскнченногочиславипадкових

величин

ДоведенотеоремиуякихотриманооцнкирозподлвнапвнормГельдеравдвипадковихпроцесвзпросторвψΩΩтаОрлчавизначенихнакомпакт

ЗнайденоумовизаякихвиконуєтьсяумоваГельдератазнайденомодулнеперервностдлявипадковихпроцесвзпросторвψΩΩ

таОрлчавизначенихнакомпакт

ДоведенотеоремиуякихотриманооцнкирозподлвнапвнормГельдератамодулнеперервноствдвипадковихпроцесвзпросторв

ψΩтаΩвизначенихнанескнченномупромжку

ОтриманрезультатизастосованодляпобудовиточносттанадйностнаближенняпроцесвзпросторвψΩтаΩвизначенихна

нескнченномупромжкузадопомогоюцлихфункцйекспоненцальноготипу