Лыков Константин Владимирович. Теория экстраполяции для шкал типа Лебега и ее приложения: диссертация ... доктора Физико-математических наук: 01.01.01 / Лыков Константин Владимирович;[Место защиты: ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов»], 2018.- 404 с.

**Введение к работе**

**Актуальность темы.** Диссертация посвящена теории экстраполяции пространств и операторов. В работе исследуются экстраполяционные свойства некоторых шкал банаховых пространств и приложения этих свойств к различным проблемам анализа. В большей части работы используется шкала пространств Lp[0,1]. Кроме этой шкалы рассматриваются шкалы пространств LP;g[0,1], *р,* классов Шаттена-фон Неймана *Sp,* а также абстракт-

**—\***

ных пространств Лионса-Петре *Aqa.* В работе представлены экстраполяционные описания предельных для рассматриваемых шкал пространств, приведены доказательства полученных автором новых экстраполяционных теорем для линейных, сублинейных и произвольных операторов, а также описаны применения построенной теории в некоторых разделах анализа.

Отправной точкой теории экстраполяции принято считать работу японского математика Шигеки Яно1, опубликованную в 1951 году. В этой работе была доказана следующая экстраполяционная теорема, связывающая Lp-оценки на оператор при *р >* 1 с оценками в более широких пространствах (специальный случай этого результата рассматривался ранее Титчмаршем и Марцинкевичем2'3).

**Теорема Яно.** *Предположим, что оператор Т определен на пространстве* Li[0,1] *и принимает значения в множестве измеримых функций на* [О,1], *и пусть Т удовлетворяет условию сублинейности: для некоторого В >* 0 *и любых Xj* Є Li[0,1] *таких, что ряд Y^Li* *хз сходится в* Li[0,1] *справедливо неравенство*

***\Tiy^Xj)(t)*** ^ ***В 2\_,*** *\Txj(t)\ почти всюду на* [0,1].  
***з=і*** ***з=і***

*Предположим также, что оператор Т ограничен в Lp[0,*1] *для каждого* ***р*** **Є (1,ро),** ***Ро*** **> 1,** ***и***

*\\T\\L* *\_^L* *^С(р—1)~', р* Є (1,\_ро), (1)

*для некоторых (3 >* 0 *и С > 0, не зависящих от р. Тогда*

***Т*** : **L(logL)^ —> Li,**

1Yano S. Notes on Fourier Analysis (XXIX): An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. - 1951. -V. 3. - No. 2. - P. 296-305.

2Titchmarsh E. C. Additional note on conjugate functions // J. London Math. Soc. - 1929. - V. 4. - No. 3 - P. 204-206.

3Marcinkiewicz J. Sur l’interpolation II // Studia Mathematica. - 1936. - V. 6. - No. 1. – P. 67-81.

*где пространство* ***LilogL)13*** *состоит из всех измеримых на* **[0,1]** *функций* *x(t)* *таких, что*

і

II^IUfiogL)/3 = / *log'(e/t)x\*(t) dt <* оо о

*(x\*(t)* *означает непрерывную слева невозрастающую перестановку функции* *\x(t)\).*

В своей работе Яно показал, что оценки для многих важных операторов анализа (таких, как максимальный оператор Харди-Литлвуда, оператор перехода к сопряженной функции в гармоническом анализе и др., см. примеры операторов в 4) в пространствах, близких к *L\* (логарифмических пространствах Лоренца) могут быть получены из Lp-неравенств для этих операторов, в то время как до работы Яно оценки в шкале *{Lp}* и в пространствах *LilogL)13* получались независимо. Теорема Яно может также рассматриваться как обратное утверждение к хорошо теперь известным интерполяционным теоремам: оценки на нормы оператора в пространствах *Lp* влекут оценки в соответствующих предельных для этой шкалы пространствах. Поэтому теорема Яно называется *экстраполяционной теоремой.* В классической монографии А. Зигмунда5 представлена как теорема Яно, так и двойственный к ней результат, также иногда называмый теоремой Яно.

**Теорема Зигмунда.** *Если оператор Т ограничен в Lp[0,1] для всех р > Ро и*

*\\Т\\т .т ^Ср''3* ює(юо,оо), (2)

*для некоторого (3 >* 0 *с константой С >* 0, *не зависящей от р, то*

*Т* : Loo *-^* Ехр *и* ,

*где пространство* **Expiv6** *состоит из всех измеримых функций x{t) таких, что*

||ж||Е *L/3 =* sup log- *'P(e/t)x\*(t) <* оо.

Позже эти результаты неоднократно переоткрывались (см., например, работы И.Б. Симоненко6 и В.И. Юдовича7), доказывались некоторые обоб-

4Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications // Acta Mathematica. - 1930. - V. 48. - P. 81-116.

5Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 2. – М.: Мир, 1965. - 538 с.

6Симоненко И. Б. Интерполяция и экстраполяция линейных операторов в пространствах Орлича // Матем. сб. - 1964. - Т. 63. - № 4. - С. 536-553.

7Юдович В. И. О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений // ДАН СССР. - 1961. - Т.138. - № 4. - С. 805-803.

щения и уточнения (см., например, 8,9), но общей теории не было (ср. с развитием теории интерполяции от теорем Рисса-Торина и Марцинкевича до абстрактной теории). В конце 80-х – начале 90-х годов в серии работ Б. Яверса и М. Мильмана были заложены основы общей (абстрактной) теории экстрапо-ляции10,11,12,13,14,15, которая изучает естественные предельные пространства, ассоциированные с различными интерполяционными шкалами, и допускающие распространение оценок на нормы соответствующих операторов. В этих работах было представлено много новых идей, перспективных связей с другими разделами анализа и интересных приложений. Следует сказать, что работы эти, имея фундаментальный характер, написаны "широкими мазками" и являются скорее программой для действий, чем законченным исследованием. В связи с этим "потребители" экстраполяционной теории зачастую вынуждены сами получать нужные им конкретные результаты. Отметим здесь результаты новосибирского математика А.Е. Мамонтова16,17,18,19,20,21, построившего на основе интегральных преобразований теорию экстраполяции пространств Орлича относительно шкалы Lp для нужд дифференциальных уравнений

8Flett T. M. A note on some inequalities // Glasgow Mathematical Journal. – 1958. – V. 4. – No. 1. – P. 7–15.

9Kerman R. A. An integral extrapolation theorem with applications // Studia Mathematica. – 1983. – V. 76. – No. 3. – P. 183–195.

10Jawerth B. Extrapolation theory and applications // in Conference at Special Year in Harmonic Analysis, MSRI, Berkeley, 1987.

11Jawerth B., Milman M. A theory of extrapolation spaces. First applications // C. R. Acad. Sci. Paris, Series I. – 1989. – V. 308. – P. 175–179.

12Jawerth B., Milman M. A theory of extrapolation spaces. Further applications // C. R. Acad. Sci. Paris, Series I. – 1989. – V. 309. – P. 225–229.

13Jawerth B., Milman M. Extrapolation Spaces with applications // Mem. of the Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 89. – No. 440. – IV+82 pp.

14Jawerth B., Milman M. New Results and Applications of Extrapolation Theory // Interpolation spaces and related topics, Haifa, 1990. Israel Math. Conference Proc., 5. – 1992. – P. 81–105.

15Milman M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1994. – 162 pp. (Lecture Notes in Math., V. 1580)

16Мамонтов А. E. Экстраполяция линейных операторов из Lp в пространства Орлича, порожденные быстро или медленно растущими N-функциями // Актуальные проблемы современной математики, Новосибирск, НГУ, 2. – 1996. – С. 95–103.

17Мамонтов А. E. Шкалы пространств Lp и их связь с пространствами Орлича // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2006. – Т. 6. – В. 2. – С. 33–56.

18Мамонтов А. E. Интегральные представления и преобразования N–функций, I // Сиб. матем. ж. – 2006. – Т. 47. – № 1. – С. 123–145.

19Мамонтов А. E. Интегральные представления и преобразования N–функций, II // Сиб. матем. ж. – 2006. – Т. 47. – № 4. – С. 811–830.

20Mamontov A. E. Extrapolation from Lp into Orlicz spaces via integral transforms of Young functions // Journal of Analysis and Applications. – 2006. – V. 4. – No. 42. – P. 77–118.

21Мамонтов А. E. Глобальная разрешимость многомерных уравнений сжимаемой неньютоновской жидкости, транспортное уравнение и пространства Орлича // Сиб. электрон. матем. изв. – 2009. – Т. 6. – C. 120–165.

гидродинамики, а также моментные пространства израильского математика Е.И. Островского22'23'24, используемые им и другими авторами25 в задачах случайных полей и математической статистики. Кроме того, работы Б. Яверса и М. Мильмана написаны на языке абстрактной теории интерполяции, доказательства не всегда полны, интерпретация для конкретных шкал представлена только в редких случаях. Последнее обстоятельство побудило некоторых математиков дать независимые формулировки и доказательства результатов Яверса и Мильмана для специальных шкал, в основном для шкалы пространств *Lp.* Здесь следует отметить работы ярославского математика Е.И. Бережного26'27'28'29, получившего простые доказательства точных экс-траполяционных теорем для классических пространств Лоренца и Марцин-кевича. Наконец, в работах Яверса и Мильмана исследованы только самые простые экстраполяционные функторы суммы и пересечения, предложенные ранее Н. Ароншайном и Э. Гальярдо в теории интерполяции30. Эти функторы, а также их прямые обобщения, появившиеся в абстрактном виде в работе31, а в одном частном случае ранее в32'33, не исчерпывают все экстраполяционные конструкции и не всегда удобны. Они легко вычисляются на крайних интерполяционных шкалах степенного типа, но обладают устойчивостью к замене шкалы только при некоторых ограничительных условиях на веса конструкции. СВ. Асташкиным было введено новое семейство экстра-

22Козаченко Ю. В., Островский Е. И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских // Теория вероятн. и матем. стат. (Киев). - 1985. - Т. 32. - C. 42-53.

23Островский Е. И. Экспоненциальные оценки для случайных полей и их применения. - Обнинск: Обнинский институт атомной энергетики, 1999. - 350 с.

24Ostrovsky E., Sirota L. Moment Banach spaces: Theory and applications // HAIT Journal of Science and Engineering C. - 2007. - V. 4. - No. 1-2. - P. 233-262.

25Kozachenko Yu. V., Mlavets’ Yu. Yu. The Banach spaces F^(f2) of random variables // Theor. Probability and Math.Statist. - 2013. - No. 86. - P. 105-121.

26Бережной Е. И., Перфильев А. А. Точная теорема экстраполяции для операторов // Функц. анализ и его прил. - 2000. - Т. 34. - No. 3. - C. 66-68.

27Бережной Е. И. Простое доказательсво теоремы экстраполяции для пространств Марцинкевича //

Матем. заметки. - 2013. - Т. 93. - No. 6. - C. 939-943.

28Бережной Е. И. Точная теорема экстраполяции для пространств Лоренца // Сиб. матем. журн. -

2013. - Т. 54. - No. 3. - C. 520-535.

29Бережной Е. И. Можно ли усилить экстраполяционную теорему Яно? // Функц. анализ и его прил.

- 2015. - Т. 49. - No. 2. - C. 82-85.

30Aronszajn N., Gagliardo E. Interpolation spaces and interpolation methods // Ann. Mat. Pura Appl. -

1965. - V. 68. - No. 1. - P. 51-118.

31Karadzhov G., Milman M. Extrapolation theory: New results and applications // J. Approx. Theory. -2005. - V. 133. - No. 1. - P. 38-99.

32Лукомский С. Ф. О сходимости рядов Уолша в пространствах, близких к *L^ //* Матем. заметки. -2001. - Т. 70. - No. 6. - С. 882-889.

33Lukomskii S. F. Convergence of Fourier series in Lorentz spaces // East J. on Approx. - 2003. – V. 9. – No. 2. - P. 229-238.

поляционных функторов, названных позже F-методом34'35'36, и совместно с автором настоящей работы начато их детальное изучение37'38'39'40. В настоящей диссертации теория экстраполяции развивается преимущественно на основе этих функторов.

Опишем кратко некоторые идеи и конструкции Б. Яверса и М. Миль-мана. В теории экстраполяции рассматривается семейство банаховых пространств А = *{Ао}оео,* индексированное с помощью некоторого множества индексов G. Эти пространства предполагаются *совместимыми,* т.е. предполагается наличие некоторого хаусдорфова топологического векторного пространства 7а такого, что имеют место непрерывные вложения *Aq* С 7а, *в* Є Q. Пусть В = *{Во}оео —* другое семейство банаховых пространств, индексированное тем же множеством 6, и 5^ С 7в, ^ Є Q. Будем писать *Т* : *{Ао}оео* —> {>б>}б>єб, если *Т* — непрерывный линейный оператор из 7а в 7в, а его сужения на *Aq* отображают *Aq* в *В о* с нормой ^ 1 для каждого *9* є О. Будем говорить, что банаховы пространства *А* и *В* являются *экстраполяци-онными пространствами* по отношению к семействам {А#}#єе и {>#}б»єб, если из условия *Т* : {А#}#єе —> {-Е>б»}б>єб следует, что *Т* : *А —> В. Экстра-поляционный метод* Е означает функтор, определенный на наборе Dom(E) семейств совместимых пространств, и такой, что Е({А#}#єе) и Е({>#}б»єб) будут экстраполяционными пространствами для любых {А#}#єе и {>#}б»єб из Dom(E).

Простейшими, но, в то же время, достаточно важными экстраполяционными методами являются функторы суммы и пересечения семейства банаховых пространств. Предположим, что {А#}#єе — такое семейство совместимых пространств, что для некоторого банахова пространства Е имеют место непрерывные вложения *Aq* С , *в* Є G, с равномерно ограниченными норма-

34Асташкин С. В. Новые экстраполяционные соотношения в шкале Lp-пространств // Функцион. анализ и его прил. - 2003. - Т. 37. - No. 3. - C. 73-77.

35Асташкин С. В. Об экстраполяционных свойствах шкалы Lp-пространств // Матем. сборник. - 2003. - Т. 194. - No. 6. - С. 23-42.

36Асташкин С. В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции // Сиб. матем. журн. - 2005. - Т. 46. - No. 2. - C. 264-289.

37Асташкин С. В., Лыков К. В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича,

близких к *Loo //* Сиб. матем. журн. - 2006. - Т. 47. - № 5. - C. 974-992.

38Асташкин С. В., Лыков К. В. Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция // Сиб. матем.

журн. - 2009. - Т. 50. - № 2. - C. 250-266.

39Astashkin S., Lykov K. Extrapolation description of rearrangement invariant spaces and related problems // Banach and function spaces III (ISBFS 2009) (Kitakyushu, Japan, 2009). - Yokohama: Yokohama Publisher,

2011. - P. 1-52.

40Astashkin S. V., Lykov K. V. Jawerth-Milman extrapolation theory: some recent developments with

applications // Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Image Processing: A Collection of Papers in Honor

of Bjorn Jawerth, Contemporary Mathematics, 693, eds. Michael Cwikel, Mario Milman. - Providence, Rhode

Island: AMS, 2017. - P. 7-53.

ми. Тогда множество

*Ті (Ад) = аєТ: а = У* а7-и> НоиІІл? < (для каких-то *6л* єО),

***3=1*** ***з=і***

с нормой ||а||і;(Ае) = inf 5Z7' llajlUe-, где инфимум берется по всем представлениям *а* Є *T{Aq)* в виде *а* = ^ *a,j* (со сходимостью в Е), является банаховым пространством (при этом пространство *T(Aq)* не зависит от объемлющего пространства *Т).* Аналогично, если имеют место равномерно ограниченные вложения А С *Aq, 6* Є G, для некоторого банахова пространства А, мы можем определить пересечение *A(Aq)* семейства {А#}#єе, которое состоит из всех *а* Є Пб>єб *А$* таких, что

*Наш* = supIHU <-

Пусть теперь *{Ао}оео* и {>#}#єе — два семейства банаховых пространств такие, что для некоторых банаховых пространств *Та* и Ев имеют место равномерные вложения *Aq* С Ед и *В о* С Ев, и, следовательно, корректно определены пространства *T{Aq)* и *T{Bq).* Если *Т —* непрерывный

линейный оператор из 7а в 7в такой, что *Т* : {А#}#єе —> {-Е>б»}б>єб, то из определения конструкции суммы Е следует, что *Т* ограничен из *T{Aq)* в *T{Bq).* Таким образом функтор Е действительно является экстраполяционным методом. Аналогичное утверждение верно для функтора А, при этом линейность оператора *Т* уже не нужна, так как

ІІТ«ІІД(ВЄ) = SUP *\\Та\\вв* ^ SUP IMU = *\\а\ІА(Аву*6»єв *веО*

В частности, используя шкалу пространств *{Ьр}* на отрезке [0,1], несложно получить следующие соотношения:

*Т\<р<Ро* ((р — *1)~' Lp ^* = L(logL) , *Ti<p<po< sub=""></p<po<>* *(Lp) = Li,*

и

*Ap>Po* *(Lp)* = Loo, *Ар>Ро(р Lp)* = ExpiA

Поэтому теоремы Яно и Зигмунда являются простым следствием общего подхода Яверса и Мильмана. Привлечение новых экстраполяционных функторов дает, естественно, больше возможностей. В работе 31подробно рассмотрены функторы ДМ и Е^, являющиеся обобщением функторов А и Е. Авторы рассматривают совместимую пару квазибанаховых пространств *(Ао,А\)* и шкалу пространств *Aq^*вещественного метода интерполяции с фиксированным г. Пространство, получаемое в результате применения функтора *А^'* к

шкале {(Л^(#)^4б>,г)}б>є(б>0,б>і), где *М{6) —* положительная непрерывная функция на (#o,#i), определяется нормой:

*{мШШлвУde*

В частном случае *г* = оо получаем функтор А. В статье Караджова и Миль-мана рассмотрены также различные приложения описанных конструкций, в частности, позволяющие получать экстраполяционные утверждения типа теоремы Яно. Еще больше возможностей возникает, если Тг-норму в рассмотренной конструкции заменить произвольным банаховым пространством *F.* Соответствующий экстраполяционный функтор, называемый по аналогии с теорией интерполяции F-методом, был впервые предложен СВ. Асташки-ным 35. Опишем F-метод точнее.

Пусть *F —* банахово идеальное пространство на множестве индексов G (которое предполагается измеримым пространством). Для заданного семейства совместимых банаховых пространств {А#}#єе, индексированного множеством G, определим банахово пространство F({A#}#e) всех таких *а* Є Та, что функция *в* Є G ь-> *\\а\\ л* принадлежит *F,* и снабдим это пространство

**II** **II*I\Q***

нормой

HalL/гл г n := II *\\а\\ л* || „.

Ясно, что F-метод обобщает экстраполяционный функтор А, который получается при *F = Lqq.* В диссертации F-метод применяется к шкалам {Тр[0,1]}р<0О, {Тм[0,1]}р<0О, {ТР;ОО[0,1]}р<0О, в которых роль *в* играет параметр *р,* а G = [1,оо), а также к шкалам *{p}p>i, {Sp}p>i* и *{Авл}вє{о,\).* Мы описываем результирующие пространства (которые мы называем *Т-*экстраполяционными), решая как прямые, так и обратные задачи экстра-поляционного представления, формулируем и доказываем соответствующие экстраполяционные теоремы для операторов, а также применяем полученные результаты к некоторым классическим проблемам анализа.

Закладывая фундамент абстрактной теории экстраполяции в конце 80-х годов прошлого века, Б. Яверс и М. Мильман, по-видимому, предполагали, что их идеи привлекут новые молодые силы, и вскоре на этой основе будет построено полноценное здание. Однако известный кризис математической науки, спад интереса к абстрактной математике, компьютерная революция и соответствующее смещение приоритетов в сторону дискретной математики, не позволили осуществиться их планам. Автор настоящей диссертационной работы рассчитывает, что его исследования позволят придать теории экстраполяции новый импульс. Следует отметить также, что наибольший спрос

у потребителей теории экстраполяции имеет именно шкала пространств *Ьр,*

экстраполяционные свойства которой преимущественно и рассматриваются в настоящей работе, в то время как абстрактная теория не во всех вопросах позволяет продвинуться достаточно глубоко при изучении специальных вопросов. Автор считает, что ему удалось придать некоторым разделам теории экстраполяции в шкале пространств Lp и в близких шкалах завершенную форму. Кроме того, результаты диссертации делают теорию более ясной и, одновременно, более доступной специалистам из других областей математики. Анализ работ по дифференциальным уравнениям, математической физике, теории вероятностей и др. разделам математики, в которых используются различные варианты экстраполяционных теорем,показывает, что имеется назревшая необходимость в более точных и более конкретных результатах, чем имеющиеся в абстрактной теории. Все отмеченное, несомненно, доказывает актуальность выбранного в работе направления исследований и полученных результатов.

Отметим также, что работа автора по теме диссертации была поддержана в разные годы грантами РФФИ 07-01-96603-р\_поволжье\_а, 10-01-00077-а, 12-01-00198-а, 14-01-31452-мол-а, 16-41-630676-р\_а, 17-01-00138-а, 18-01-00414-a, а также Министерством образования и науки РФ (проект 5-100).

**Цели и задачи диссертационной работы.** Основной целью диссертационной работы является построение теории экстраполяции для шкалы пространств {Lp[0,1]}р<0О и близких шкал, учитывающей особенности этих шкал, и получение как специальных для этих шкал результатов, не вытекающих из общей теории экстраполяции, так и результатов, которые могут быть полезны и для развития общей теории. Под теорией экстраполяции мы понимаем структурированный набор понятий, определений, строго доказанных утверждений и свойств изучаемых объектов, каковыми являются экстраполяционные функторы и экстраполяционные пространства, с обозначенными внутренними связями, позволяющий эффективно использовать свои компоненты для приложений в различных разделах математики. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Изучить свойства Т-'-экстраполяционных пространств.
2. Описать симметричные пространства, которые можно получить F-методом экстраполяции.
3. Получить соотношения, позволяющие по симметричному пространству восстанавливать параметр экстраполяции.
4. Установить связь между экстраполяционным и интерполяционным описанием симметричного пространства.
5. Охарактеризовать Т-'-экстраполяционные пространства из специальных классов симметричных пространств с помощью условий на параметры, идентифицирующие конкретное пространство в классе.
6. Исследовать свойство устойчивости F-метода по отношению к замене шкалы *{Lp[0, 1]}p<qo< sub=""></qo<>* на шкалу *{LPjq[0, 1]}p<oo,q=q(p).*
7. Получить экстраполяционные теоремы для линейных и сублинейных операторов.
8. Получить эффективные приложения построенной теории к некоторым классическим задачам анализа.

Следует отметить также, что некоторые специальные конструкции, первоначально использованные автором для работы со шкалой пространств {Lp[0,1]}р<0О, удалось перенести и на общие интерполяционные шкалы, что также отражено в настоящей работе.

**Методы исследования.** В работе используются методы теории интерполяции пространств и операторов, теории симметричных пространств, теории банаховых решеток, а также общие методы функционального анализа и теории функций. В отдельных местах работы применяются комбинаторные и вероятностные методы. Важным инструментарием в доказательствах основных теорем является также разработанный автором метод оценок норм интерполяционных пространств через суммы значений /С-функционалов в специальных точках, определяемых оператором степенного растяжения.

**Основные положения, выносимые на защиту. В** работе получены следующие основные результаты, которые выносятся на защиту.

1. Доказана теорема о характеризации сильно экстраполяционных симметричных пространств на отрезке [0,1]. В теореме доказана равносильность различных условий, среди которых сильная экстраполяционность, а также условия на параметр интерполяции, на параметр экстраполяции и на само симметричное пространство, сформулированные в терминах ограниченности специальных операторов. Как следствие получена ха-рактеризация сильно экстраполяционных пространств Орлича, Лоренца, Марцинкевича, Орлича-Лоренца в терминах условий на параметры этих пространств.
2. Понятие сильно экстраполяционного пространства перенесено на симметричные пространства последовательностей. Как следствие получено экстраполяционное описание предельных для шкалы классов Шаттена-фон Неймана симметрично-нормированных идеалов. Доказана теорема о

принадлежности действительной и мнимой компоненты вольтеррова оператора определенным предельным симметрично-нормированным идеалам, аналогичная теореме Мацаева для классов Шаттена-фон Неймана.

1. Понятие сильно экстраполяционного пространства перенесено на абстрактные интерполяционные шкалы. Доказана теорема, характеризующая абстрактные сильно экстраполяционные пространства в терминах параметра интерполяции.
2. Доказаны теоремы об устойчивости экстраполяционных конструкций по отношению к замене шкалы пространств *{Ьр}* на шкалу пространств *LPyq,* позволяющие во многих случаях вычислять явно значения специальных экстраполяционных функторов.
3. Доказаны новые экстраполяционные теоремы для операторов, действующих в пространствах *Lp*при *р Є (ро,оо).*
4. Доказаны экстраполяционные теоремы о линейных и сублинейных операторах, действующих из шкалы *{Ьр}* в фиксированное квазинормиро-ванное полное пространство с операторной нормой, растущей при *р —>* 1.
5. На основе экстраполяционного описания симметричных пространств получены новые условия единственности в классических степенных проблемах моментов Стильтьеса и Гамбургера.
6. С привлечением экстраполяционной техники доказана теорема, характеризующая симметричные пространства, в которых разреженный хаос Радемахера образует безусловную базисную последовательность.

**Научная новизна.** Все выносимые на защиту диссертации результаты являются новыми. Автором впервые выделена явная и простая связь между параметрами интерполяции и экстраполяции, которая позволила дать новые экстраполяционные представления для важных в анализе пространств, а также объединить под единой конструкцией известные разрозненные результаты других авторов и объяснить общее происхождение возникавших ранее отдельных экстраполяционных соотношений.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Теория экстраполяции имеет многочисленные приложения к классическим проблемам анализа, теории вероятностей и дифференциальных уравнений 13-25'32'33. В диссертации получила существенное развитие теория экстраполяции для шкалы пространств *Lp* на отрезке, что нашло

отражение в эффективных приложениях теории, найденных автором, и также представленных в работе. Среди этих приложений особенно отметим новые условия определенности в классической проблеме моментов, важные для теории вероятностей и математической статистики. Ожидается, что результаты работы найдут и другие полезные применения в теории вероятностей, так как позволяют получать из моментных оценок случайных величин более важные оценки для распределений. Доказанные в работе теоремы об описании пространств и экстраполяции операторов могут быть использованы также в теории функций, гармоническом анализе, математической физике, дифференциальных уравнениях, так как в этих разделах анализа традиционно использование Lp-оценок на нормы функций и специальных операторов. Следует отметить также, что построенные в работе разделы теории экстраполяции хорошо дополняют теорию интерполяции, предоставляют последней новые методы и позволяют обозначить границы применения и обратимости соответствующих интерполяционных конструкций.

Степень достоверности результатов. Все результаты работы представлены в виде математических утверждений (леммы, теоремы, предложения и следствия из них) вместе со строгими математическими доказательствами. Используемые в доказательствах методы и вспомогательные утверждения взяты автором из известных книг или авторитетных математических журналов. Все выносимые на защиту результаты опубликованы в рецензируемых научных изданиях.

Апробация результатов.

Основные результаты диссертационной работы докладывались автором на всероссийских и международных конференциях и математических школах: Воронежской зимней математической школе С.Г. Крейна (2006 г.), Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (2015, 2017 гг.), Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (2005, 2007, 2011, 2015 гг.), Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (2014, 2015 гг.), Международной конференций "Математическая физика и ее приложения" в г.Самара (2008, 2010 гг.), Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" в г. Самара (2009, 2011 гг.), Международной конференции "Harmonic Analysis and Approximations" в г. Цахкадзор, Армения (2008 г.), Международной конференции "The Jozef Marcinkiewicz Centenary Conference" в г. Познань, Польша (2010 г.), Международной конференции "Banach Spaces Geometry" в г. Санкт-Петербург (2010 г.), Международной конференции "Современные методы и проблемы теории операто-13

ров и гармонического анализа и их приложения" в г. Ростов-на-Дону (2015 г.), Международной конференции Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения"(2018 г.). Основные положения теории представлялись автором на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (Семинар СМ. Никольского, руководитель семинара чл.-корр. РАН О.В. Бесов, 2007, 2016 гг.), на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций (руководитель семинара академик СВ. Кисляков, 2017, 2018 гг.), на семинаре по теории функций действительного переменного МГУ (руководитель семинара академик Б.С. Кашин, 2017 г.). О приложениях к проблеме моментов автор рассказывал на семинаре Лаборатории Чебышева СПбГУ "Теория вероятностей"(2015 г.) и на Большом семинаре кафедры Теории вероятностей МГУ им М.В. Ломоносова (руководитель семинара академик РАН А.Н. Ширяев, 2017 г.). Кроме того, результаты работы неоднократно докладывались на семинаре кафедры Функционального анализа и теории функций Самарского университета (руководитель семинара профессор СВ. Асташкин).

**Личный вклад автора.** Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие основное содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Для полноты изложения и лучшей иллюстрации важных положений работы в текст диссертации включены некоторые результаты, полученные СВ. Асташкиным в совместных работах, а также результаты, в которых точно выделить роль каждого из соавторов не представляется возможным. Во всех таких местах автором сделаны соответствующие пояснения.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 публикациях — это статьи в журналах, соответствующих требованиям ВАК. Все эти работы опубликованы в изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования. При этом работы [3,6-12,14,15] (или их переводы) включены в базу данных Web of Science Core Collection. Отметим еще, что работы [13,15] являются обзорными статьями в книгах, и написаны по заказу редколлегий соответствующих изданий.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы, параграфы глав 3, 4 и 5 разбиты над подпараграфы (разделы). Результаты автора изложены в главах 3, 4 и 5. Общий объем диссертации составляет 404 страницы. Библиография включает 213 наименований.