Нацiональний педагогiчний унiверситет iменi М. П. Драгоманова На правах рукопису Iбрагiм Муслiм Х. УДК 519.21 Фрактальнi властивостi випадкових величин з незалежними Q∗ -символами та їх застосування 01.01.05 — Теорiя ймовiрностей i математична статистика Дисертацiя на здобуття наукового ступеня кандидата фiзико-математичних наук Науковий керiвник Торбiн Григорiй Мирославович, доктор фiзико-математичних наук, професор Київ — 2016 2 ЗМIСТ Вступ 4 Роздiл 1. Сингулярно неперервнi ймовiрноснi мiри та їх фрактальний аналiз 29 1.1. Мiра Хаусдорфа i розмiрнiсть Хаусдорфа - Безиковича та їх властивостi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29 1.2. Мiра Хаусдорфа та розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича вiдносно сiмейств покриттiв. Порiвняльнi та довiрчi локально тонкi системи покриттiв. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 33 1.3. Мiра Хаусдорфа-Бiллiнгслi та розмiрнiсть Хаусдорфа-Бiллiнгслi . . 37 1.4. Сингулярнi ймовiрнiснi мiри та випадковi величини з незалежними символами розкладiв зi змiнним алфавiтом . . . . . . . . . . . . . . 38 Роздiл 2. Випадковi величини з незалежними Q∗ -символами та їх фрактальнi властивостi 44 2.1. Про хаусдорфову довiрчiсть сiмейств покриттiв, породжених Q∗ - зображеннями дiйсних чисел . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45 2.2. Новi достатнi умови фрактальної довiрчостi для сiмейств цилiндрiв Q∗ -розкладiв . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 51 2.3. Про загальнi достатнi умови фрактальної довiрчостi сiмей цилiндрiв, породжених Q∗ -зображенням дiйсних чисел . . . . . . . . . . . 57 2.4. Тонкi фрактальнi властивостi розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗−символами. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64 Роздiл 3. Застосування фрактальних властивостей випадкових величин з незалежними Q∗ -символами 69 3.1. DP-перетворення, що породженi випадковими величинами з незалежними Q∗ -символами . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69 3 3.1.1. Огляд результатiв по теорiї перетворень, що зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича . . . . . . . . . . . . . . . . 69 3.1.2. DP-перетворення, що породженi DB-розподiлами випадкових величин з незалежними Q∗ -символами . . . . . . . . . . 71 3.1.3. DP-перетворення, що породженi B-розподiлами випадкових величин з незалежними Q∗ -символами . . . . . . . . . . . . . 82 3.2. Властивостi пiдмножин анормальних чисел, породжених Q∗ -зображеннями дiйсних чисел . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 95 3.3. Метричнi та фрактальнi властивостi пiдмножин Q∗ -анормальних чисел . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99 Висновки 107 Список використаних джерел 109 4 ВСТУП Актуальнiсть теми. Дисертацiя присвячена розвитку фрактального пiдходу до дослiдження сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр, який в Українi був започаткований М.В.Працьовитим, розвинений М.В.Працьовитим, Г.М. Торбiним та їх учнями. Як вiдомо, сiмейство сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр є найменш дослiдженим сiмейством чистих (в сенсi розкладу Лебега) мiр, хоча дослiдження таких здiйснювалось протягом майже всього 20-го столiття (див., наприклад, [1–42]). Як зазначалось М.Працьовитим, Г. Торбiним та Р.Нiкiфоровим, збiльшення iнтересу до дослiдження таких мiр було тiсно пов’язано або з появою нових методiв задання та дослiдження таких мiр (створення теорiї мiри Лебега простимулювало початок конструктивного етапу розвитку теорiї сингулярних мiр (H. Lebesgue, W. Sierpi´nski, E. Hellinger, H. Minkowski, Д. Меньшов, Н. Барi, М. Лузiн); становлення теорiї ймовiрностей як повноправної математичної дисциплiни пiсля створення А. М. Колмогоровим її аксiоматичної бази в 30-х роках та розвиток теорiї граничних теорем в 50-х роках значною мiрою сприяло iнтенсифiкацiї дослiджень сингулярних мiр у цi перiоди (B. Jessen, A. Wintner, R. Kershner, P. L´evy, R. Salem, P. Erd¨os, R. Gilman, E. Hille та J. Tamarkin, J. Littlewood; P. Billingsley, S. Chatterji, P. Halmos, О. С. Iвашев-Мусатов, J.-P. Kahane, J. Kinney, G. Marsaglia, T. Pitcher, A. Renyi, C. Rogers, H. Tucker); розвиток теорiї динамiчних систем i “фрактальний бум” у математицi та природознавствi ([43–57]) призвiв до iнтенсивного застосування методiв цих теорiй при вивченнi сингулярних мiр (М. Працьовитий, Я. Виннишин, В. Морока, О. Лещинський, А. Турбiн, К. Макаров, Ch. Bandt, F. Cater, M. Cooper, Yu. Peres, D. Hensley, F. Hofbauer, T. Hu, K. Lau, F. Ledrappier, M. Moran, N. Patzschke, A. Porzio, J. Reich, J. Rey, B. Solomyak, R. Strichartz, T. Zamfirescu)), так i з розвитком можливого їх застосування в гармонiчному аналiзi [58,59], теорiї динамiчних систем ([60]), метричнiй теорiї чисел ([13,14,25,45,48,61–77]), фрактальнiй геометрiї ([14,78–83]). Було до- 5 ведено (T.Zamfirescu, [84]), що майже всi (у топологiчному розумiннi) неперервнi монотоннi функцiї є сингулярними, тому що множина сингулярно неперервних монотонних функцiй є множиною другої категорiї Бера у метричному просторi всiх неперервних монотонних функцiй iз супремум-метрикою. Аналогiчнi результати про топологiчну масивнiсть операторiв шредiнгерiвського типу були отриманi Б.Саймоном, що дає додатковi мотивацiї для вивчення розподiлiв такого виду ([58, 85–87]). Протягом двох останнiх десятилiть проводяться досить iнтенсивнi дослiдження iз загальної теорiї сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр та методiв встановлення сингулярностi, створення нових методiв фрактального та мультифрактального аналiзу та їх реалiзацiя в певних класах мiр, класифiкацiї сингулярних мiр. Значна кiлькiсть робiт присвячена створенню iндивiдуальної теорiї певних класiв сингулярних мiр та дослiдженню їх властивостей. Варто вiдзначити, що нетривiальнi складнощi на цьому шляху виникають навiть для класiв самоподiбних та самоафiнних мiр. Вищезгаданi дослiдження та їх застосування пов’язанi як з iменами вiтчизняних математикiв (М. Працьовитий, О. Барановський, Я. Виннишин, Я. Гончаренко, В. Королюк, В. Кошманенко, Д. Кюрчев, О. Лещинський, А. Литвинюк, Р. Нiкiфоров, О. Слуцький, Г. Торбiн, О. Школьний), так iз широким колом закордонних математикiв (K. Dajani, D. Damanik, M. Das, K. Falconer, D. Feng, M. Iosifescu, S. Jitomirskaya, Yu. Kifer, R. Killip, A. Kiselev, C. Kraaikamp, D. Krutikov, N. Makarov, Yu. Peres, R. del Rio, Ch. Remling, E. Olivier, L. Olsen, W. Schlag, B. Simon, K. Simon, B. Solomyak, B. Weiss). Значна кiлькiсть робiт присвячена дослiдженню фрактальних властивостей ймовiрнiсних мiр, якi породжуються рiзними розкладами дiйсних чисел, цифри яких є незалежними випадковими величинами (див., наприклад, [1,3,6–10,12–14, 17,23,25,32,35,38,88–92]). Найпростiшими у цьому вiдношеннi є мiри, якi породженi розкладами, що мають властивiсть самоподiбностi (iнварiантну структуру побудову системи подрiбнюючих розбиттiв): s-адичними розкладами, Q-розкладами тощо. Значно бiльш складним є дослiдження таких мiр, якi породжуються розкладами з нескiнченним алфавiтом та розкладами зi скiнченним алфавiтом, але змiнною процедурою розкладу. Всi класичнi методи фрактального аналiзу таких 6 мiр стають незастосовними, що пояснюється декiлькома феноменами: можливою нескiнченною ентропiєю розкладу, можливою недовiрчiстю породжених локально тонких систем покриттiв тощо. Особливу роль серед таких розкладiв займають Q∗ -розклади дiйсних чисел, якi почали систематично дослiджуватись з початку 90-х рокiв 20-го столiття (хоча з’являлись в лiтературi i ранiше [93, 94]) i принесли багато несподiваних ймовiрнiсних, фрактальних та теоретико-числових несподiванок, i стали своєрiдним полiгоном для побудови контрприкладiв в теорiї фракталiв та сингулярних ймовiрнiсних мiр (в якостi таких можна назвати приклади таких Q∗ -розкладiв, для яких множина тих дiйсних чисел, якi не мають частоти жодної цифри, мають повну мiру Лебега (G.Torbin); та приклади таких Q∗ -розкладiв, для яких множина тих дiйсних чисел, якi не мають частоти жодної цифри, мають нульову розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича (I. Garko)). Q∗ - розклади породили перший приклад недовiрчих локально тонких систем покриттiв цилiндричними вiдрiзками, що породженi розкладами зi скiнченним алфавiтом (Yu. Peres, G. Torbin). Окрiм важливостi дослiдження фрактальних властивостей розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗ -символами для розвитку теорiї сингулярних ймовiрнiсних мiр та теорiї фракталiв, вони є критично важливими для розвитку ймовiрнiсного пiдходу до вивчення перетворень, що зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича, та для метричної та ймовiрнiсної теорiї чисел, що додатково пiдкреслює актуальнiсть цих дослiджень. Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у рамках дослiджень математичних об’єктiв зi складною локальною будовою, що проводяться у вiддiлi фрактального аналiзу Iнституту математики НАН України та на кафедрi математичного аналiзу та диференцiальних рiвнянь Нацiонального педагогiчного унiверситету iменi М.П. Драгоманова. Автор дисертацiї брав участь у розробцi держбюджетної теми «Багаторiвневий аналiз сингулярних ймовiрнiсних мiр та його застосування» (номер державної реєстрацiї 0113U003005) та науково–дослiдного проекту STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС). 7 Мета i завдання дослiдження. Метою дослiдження є розвиток методiв фрактального аналiзу сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр, вивчення тонких фрактальних властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗ -символами та використання отриманих результатiв для ймовiрнiсного пiдходу до вивчення перетворень, що зберiгають фрактальну розмiрнiсть, та до фрактального аналiзу пiдмножин множини анормальних чисел. Основними завданнями дисертацiйної роботи є: — розробка нових методiв доведення довiрчостi локально тонких систем покриттiв для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича пiдмножин одиничного вiдрiзка та застосування цих методiв для знаходження умов довiрчостi систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича (у тому числi i для тих моделей, коли елементи стохастичної матрицi Q∗ задовольняють екстремальним умовам inf qik = 0,sup qik = 1); — дослiдження тонких фрактальних властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*-символами; — розвиток ймовiрнiсного пiдходу до дослiдження перетворень, що зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича; дослiдження DP-перетворень одиничного вiдрiзка, що iндукуються функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами; — дослiдження зв’язкiв мiж DP-властивостями функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами, вiдносною ентропiєю таких розподiлiв та довiрчiстю систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича; — розвиток ймовiрнiсного пiдходу (на основi дослiдження властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*-символами) до вивчення залежностi метричних та фрактальних властивостей множин Q\*-нормальних, Q\*-квазi- 8 нормальних, Q\*-частково нормальних та Q\*-суттєво анормальних дiйсних чисел вiд обраної системи числення. Об’єктом дослiдження є фрактальнi властивостi сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр. Предметом дослiдження є фрактальнi властивостi розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗ -символами та їх застосування в теорiї DP-перетворень та в метричнiй теорiї чисел. Методи дослiдження. У роботi використовувалися методи теорiї ймовiрностей, математичного аналiзу, теорiї функцiй дiйсної змiнної, метричної теорiї чисел, фрактального аналiзу та запропонованi автором конструктивнi прийоми та методи. Наукова новизна одержаних результатiв. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такi: — розроблено новi методи доведення довiрчостi локально тонких систем покриттiв для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича пiдмножин одиничного вiдрiзка; — розробленi методи застосовано для знаходження широких достатнiх умов довiрчостi систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича (у тому числi i для тих моделей, коли елементи стохастичної матрицi Q\* задовольняють екстремальним умовам inf qik = 0,sup qik = 1); — дослiджено тополого-метричнi та фрактальнi властивостi спектрiв випадкових величин з незалежними Q\*-символами; — дослiджено тонкi фрактальнi властивостi ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*-символами; знайдено явну формулу для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича мiнiмальних розмiрнiсних носiїв таких мiр; 9 — на основi дослiдження властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*- символами вивчено DP-перетворення одиничного вiдрiзка, що iндукуються функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами; — знайдено зв’язок мiж DP-властивостями функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами, вiдносною ентропiєю таких розподiлiв та довiрчiстю систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича; для DB- та B-розподiлiв випадкових величин з незалежними Q\*-символами знайдено необхiднi та достатнi умови належностi їх функцiй розподiлу до DP-класу; — на основi дослiдження властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*- символами вивчено залежнiсть метричних та фрактальних властивостей множин Q\*-нормальних, Q\*-квазiнормальних, Q\*-частково нормальних та Q\*-суттєво анормальних дiйсних чисел вiд обраної системи числення; доведено, зокрема, що при умовi вiдокремленостi елементiв стохастичної матрицi Q\* вiд нуля, множина Q\*-суттєво анормальних дiйсних чисел є суперфрактальною (тобто множиною нульової мiри Лебега, розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича якої дорiвнює одиницi). Практичне значення одержаних результатiв. Робота має теоретичний характер. Отриманi результати є внеском у теорiю сингулярних розподiлiв ймовiрностей, фрактальний аналiз, метричну теорiю чисел, теорiю функцiй дiйсної змiнної та теорiю DP-перетворень. Запропонованi в дисертацiї методи можуть бути корисними як при дослiдженнi тонких фрактальних властивостей ймовiрнiсних мiр, породжених рiзними представленнями дiйсних чисел над скiнченними та змiнними алфавiтами, так i при застосуваннi вiдповiдних результатiв в метричнiй теорiї чисел та теорiї DP-перетворень. Особистий внесок здобувача. Основнi результати, що виносяться на захист, отриманi автором самостiйно. Зi статей, опублiкованих у спiвавторствi, до дисертацiї включенi лише тi результати, що належать автору. 10 Апробацiя результатiв дисертацiї. Основнi результати дослiдження доповiдалися на наукових конференцiях рiзного рiвня та наукових семiнарах. Це такi конференцiї: — Чотирнадцята мiжнародна конференцiя iменi академiка Михайла Кравчука, Київ, 19 квiтня 2012 року; — International Conference «Modern Stochastics: Theory and Applications 3», Київ, 10-14 вересня 2012 року; — П’ята мiжнародна конференцiя пам’ятi Г.Вороного, Київ, 12-19 вересня 2013 року; — Конференцiя «Методика викладання математики в середнiй та вищiй школi». (присвячена 75-рiччю лауреата Державної премiї України в галузi науки i технiки, академiка Академiї наук вищої освiти, професора Колесник Тамари Всеволодiвни), Секцiя 3: Вибранi питання сучасної математики, 04–05 грудня 2013 року; — Всеукраїнська науково-методична конференцiя «Сучаснi науково-методичнi проблеми математики у вищiй школi», пам’ятi професора С. С. Левiщенка, Київ, 7–8 жовтня 2016. — International Conference «Fractal geometry and Stochastics V», Jena, Germany, 24-29 березня 2014 року. Основнi результати дисертацiйного дослiдження були оприлюдненi на засiданнях наступних наукових семiнарiв: — науковий семiнар "Теорiя ймовiрностей та математична статистика"при кафедрi теорiї ймовiрностей, статистики та актуарної математики КНУ iменi Тараса Шевченка (керiвники семiнару - проф. Мiшура Ю.С. та проф. Козаченко Ю.В.); 11 — науковий семiнар вiддiлу випадкових процесiв Iнституту математики НАН України (керiвники семiнару - проф. Дороговцев А.А., проф. Портенко М.I.); — науковий семiнар з фрактального аналiзу (спiльний семiнар НПУ iменi М.П.Драгоманова та Iнституту математики НАН України, керiвник семiнару - проф. Працьовитий М.В.); — науковий семiнар кафедри математичного аналiзу та диференцiальних рiвнянь НПУ iменi М.П.Драгоманова (керiвник семiнару - проф. Торбiн Г.М.). Публiкацiї. Основнi результати роботи викладено у 12 наукових публiкацiях, серед яких 7 статей у фахових виданнях [95–101] та 5 тез доповiдей на конференцiях [102–106]. Чотири статтi [95–98] опублiковано у наукових виданнях, якi включено до перелiку фахових видань МОН України. Одна стаття [99] опублiкована у науковому перiодичному виданнi iншої держави з напряму, з якого пiдготовлено дисертацiю. Одна стаття [100] опублiкована у журналi, що iндексуєтьcя мiжнародною наукометричною базою Scopus. Одна стаття [101] опублiкована у фаховому виданнi, переклад якої iндексований в наукометричнiй базi Scopus. Основний змiст роботи. Робота складається зi вступу, трьох роздiлiв, висновкiв та списку використаної лiтератури. У вступi обґрунтовано актуальнiсть теми дисертацiйної роботи, визначенi мета i задачi дослiдження, об’єкт та предмет дослiдження, видiлено наукову новизну, практичну значущiсть отриманих результатiв, особистий внесок здобувача, апробацiю отриманих результатiв та представлено основний змiст дисертацiйного дослiдження. Перший роздiл дисертацiї мiстить опис основних понять, фактiв та методыв, якi вiдiграють важливу роль у дослiдженнi. У пiдроздiлi 1.1 висвiтлено основнi властивостi мiри Хаусдорфа та розмiрностi Хаусдорфа–Безиковича, показано вiдмiннiсть мiж розмiрнiстю Хаусдорфа та розмiрнiстю Хаусдорфа–Безиковича. Задача обчислення розмiрностi Хаусдорфа– Безиковича множини або ймовiрнiсної мiри, будучи однiєю з основних задач фра- 12 ктального аналiзу, є досить нетривiальною проблемою, розв’язанню якої для рiзних множин та мiр присвячено значну кiлькiсть дослiдницьких статей у провiдних математичних журналах свiту. Це стало причиною розвитку методiв знаходження точних або хоча б наближених значень розмiрностi Хаусдорфа–Безиковича. Один з таких методiв полягає у суттєвому зменшеннi класу допустимих покриттiв при обчисленнi розмiрностi до деякого специфiчного (зчисленного) класу покриттiв, який є достатнiм (довiрчим) для правильного обчислення розмiрностi, що дає дослiднику суттєвi технiчнi переваги. Саме з цiєю метою у пiдроздiлi 1.2 даються означення локально тонких систем покриттiв, якi є довiрчими для обчислення розмiрностi Хаусдорфа–Безиковича. Сiмейство Φ пiдмножин метричного простору (M, ρ) називається локально тонкою системою покриттiв обмеженої множини W, якщо для довiльного ε > 0 iснує таке покриття множини W пiдмножинами Ej ∈ Φ, що |Ej | < ε i W ⊂ S j Ej . Нехай α — деяке додатне число. Тодi α-мiрною мiрою Хаусдорфа множини E вiдносно сiмейства Φ називається H α (E, Φ) = lim ε→0 " inf |Ej |6ε (X j |Ej | α )# , де iнфiмум береться за всiма не бiльш як злiченними ε-покриттями {Ej} множини E множинами Ej ∈ Φ. Оскiльки при зменшеннi ε iнфiмум визначається за «бiднiшим» класом εпокриттiв, то границя (скiнченна чи нескiнченна) lim ε→0 Hα ε (E, Φ) завжди iснує. Означення 1.2.1. Розмiрнiстю Хаусдорфа–Безиковича множини E вiдносно сiмейства пiдмножин Φ називається таке невiд’ємне число, що dimH(E, Φ) = inf{α : H α (E, Φ) = 0}. Означення 1.2.2. Локально тонка система покриттiв Φ називається довiрчою системою покриттiв на W, якщо dimH(E, Φ) = dimH(E), ∀E ⊂ W. 13 Перевiрка довiрчостi чи знаходження достатнiх умов довiрчостi сiмейств покриттiв є важливою задачею фрактального аналiзу. Умови при яких локально тонка сiм’я покриттiв є довiрчою для обчислення розмiрностi Хаусдорфа - Безиковича на [0, 1], дослiджувались багатьма вченими (див., наприклад, [107–112]). Першi кроки у цьому напрямку зробив А. С. Безикович ([107]), довiвши довiрчiсть сiм’ї цилiндричних вiдрiзкiв двiйкового представлення. Його результати узагальнили: П. Бiллiнслей ([113]) для сiмейств цилiндрiв, що породжуються s-адичним представленням; M. В. Працьовитий ([108]) для сiмейств покриттiв, що породжуються Q - представленням; С. Альбеверiо та Г. М. Торбiн ([112]) для сiмейств покриттiв, що породжуються Q∗ - представленням для яких inf k {q0k, q(n−1)k} > 0. У цьому ж пiдроздiлi подано детальнiшу iсторiю дослiджень умов довiрчостi сiмейств цилiндрiв, породжених рiзними розкладами дiйсних чисел, порiвняння пiдходiв до доведення довiрчостi та недовiрчостi рiзних локально тонких сiмейств покриттiв. Окреслено нерозв’язанi проблеми у цьому напрямi. Додатковим аргументом дослiдження проблем довiрчостi локально тонких систем покриттiв є необхiднiсть розвитку ймовiрнiсного пiдходу до обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича фрактальних множин на основi розвинутого П.Бiллiнгслi методу (на основi теорем Бiллiнгслi оцiнки хаусдорфової розмiрностi), суть якого коротко викладена в пiдроздiлi 1.3 дисертацiї. У пiдроздiлi 1.4 наведено базовi означення, що стосуються теорiї сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр, описано клас Q∗ -зображень дiйсних чисел та ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗ -символами, якi є основним об’єктом вивчення у даному дисертацiйному дослiдженнi; наведено необхiднi та достатнi умови абсолютної неперервностi, дискртностi та сингулярної неперервностi таких мiр. Роздiл 2 присвячений дослiдженню фрактальних властивостей розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗ -символами. Нехай {ξk} - послiдовнiсть незалежних випадкових величин, якi набувають значення 0, 1, ..., s − 1 з ймовiрностями p0k, p1k, ..., ps−1k вiдповiдно. Випадкова величина ξ = ∆Q∗ ξ1ξ2...ξk... (1) 14 називається випадковою величиною з незалежними Q∗ -символами, а вiдповiдна їй ймовiрнiсна мiра νξ називається ймовiрнiсною мiрою з незалежними Q∗ - символами. Для вивчення тонких фрактальних властивостей таких розподiлiв принципову роль вiдiграють питання довiрчостi (недовiрчостi) локально тонких систем цилiндрiв, породжених Q∗ -розкладами дiйсних чисел, вивченню яких присвячений пiдроздiл 2.1 дисертацiї. Нехай Q∗ -стохастична матриця Q∗ = ||qik|| , така, що 1)qik > 0 (∀i ∈ {0, 1, . . . , s − 1}, ∀k ∈ N) ; 2) s P−1 i=0 qik = 1 , ∀k ∈ N ; 3) Q ∞ k=1 max i qik = 0 . Використовуючи алгоритм, що досить детально описаний в роботах [112,114], за допомогою матрицi Q∗ отримується Q∗ - розклад числа x: x = βα1(x) + X ∞ k=2 βαk(x) . Y k−1 j=1 qαj (x)j , де βαk(x)=    0, αk(x) = 0; αk P (x)−1 i=0 qik, αk(x) > 0 Формальний запис: x = ∆Q∗ α1(x)α2(x) ...αk(x) ... . Дослiдження достатнiх умов довiрчостi для системи Φ(Q∗ ) цилиндрiчних множин Q∗ -розкладу проводились в роботах S. Albeverio та Г. Торбiна (див., наприклад, [112] та огляд в данiй роботi). Наступна теорема дає широкi достатнi умови довiрчостi системи Φ(Q∗ ). Теорема 2.1.1 Нехай q ∗ k := max{q0k, q1k, . . . , qs−1k}. Якщо    lim k→∞ ln q0,k ln(q ∗ 1 q ∗ 2 ...q∗ k ) = 0, lim k→∞ ln qs−1,k ln(q ∗ 1 q ∗ 2 ...q∗ k ) = 0, (2) 15 то dimH(E) = dimH(E, Φ(Q ∗ )), ∀E ⊂ [0, 1]. Тут же показується як отримати доведенi ранiше iншими авторами достатнi умови довiрчостi як простi наслiдки даної теореми. Наводяться приклади Q∗- зображень, проблема довiрчостi для яких ранiше була вiдкритою i яку дозволяє вирiшити вказана вище теорема. Попередня теорема також дозволила дослiдити тонкi фрактальнi властивостi ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗ -символами для випадку, коли елементи матрицi Q∗ не вiддiленi вiд нуля. У той же час, якщо елементи першого та останнього рядка матрицi Q∗ прямують до 0 досить швидко (наприклад, при s=4, q0k = q3k = 1 10k , , q1k = q2k = 1 2 − 1 10k ) навiть вказана теорема не дає вiдповiдi стосовно того чи є сiмейство цилiндрiв такого Q∗ -розкладу довiрчим. Тому у пiдроздiлi 2.2, використовуючи новий пiдхiд до доведення довiрчостi сiмейств покриттiв, доведено принципово новi достатнi умови довiрчостi для сiмейства цилiндрiв Q∗ -розкладу, якi зовсiм не використовують вiддiленiсть елементiв першого та останнього рядкiв матрицi Q∗ вiд нуля (чи швидкiсть їх прямування до нуля). Теорема 2.2.1. Нехай q := sup ik qik < 1. Тодi сiмейство Φ(Q∗ ) цилiндрiв, породжених Q∗−розкладом дiйсних чисел, є довiрчим для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича на одиничному вiдрiзку, тобто, dimH E = dimH(E, Φ(Q ∗ )), ∀E ⊂ [0, 1]. У пiдроздiлi "Про загальнi достатнi умови фрактальної довiрчостi сiмей цилiндрiв, породжених Q∗ -зображенням дiйсних чисел"вивчається найскладнiша ситуацiя коли елементи стохастичної матрицi можуть бути невiддiленими як вiд нуля, так i вiд одиницi, та доводиться результат, який дає широкi загальнi умови довiрчостi сiмейства Q∗ -цилiндрiв для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича. 16 Теорема 2.3.1 Нехай qk := max i qik, нехай S(m, δ) := X ∞ k=1 m Y +k i=m+1 qi !δ , i нехай S(δ) := sup m S(m, δ). Якщо S(δ) < +∞, ∀δ > 0, (3) то сiмейство Φ(Q∗ ) цмлiндрiв, породжених Q∗−розкладом дiйсних чисел, є довiрчим для обчислення розмiрностi Хаусдорфа на одиничному вiдрiзку, тобто, dimH E = dimH(E, Φ(Q ∗ )), ∀E ⊂ [0, 1]. У цьому ж роздiлi наводяться приклади, якi демонструють кориснiсть та ефективнiсть цiєї теореми при дослiдженнi питання довiрчостi. У роздiлi 2.4. дослiджуються тонкi фрактальнi властивостi ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗−символами. Основним завданням цього роздiлу є знаходження розмiрностi Хаусдорфа dimH νξ ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗ -символами, тобто, знаходження розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича мiнiмальних розмiрнiсних носiїв вказаних ймовiрнiсних мiр. Бiльш строго: розмiрнiстю Хаусдорфа розподiлу випадкової величини τ називається число dimH(τ ) = inf {dimH(E), E ∈ Bτ} , де Bτ – клас всеможливих носiїв (не обов’язково замкнених) випадкової величини τ , тобто Bτ = {E : E ∈ B, Pτ (E) = 1} . Для доведення основного результату даного роздiлу вводиться поняття розмiрностi Хаусдорфа-Бiллiнгслi множини вiдносно ймовiрнiсної мiри i системи розбиттiв. Нехай υ – неперервна ймовiрнiсна мiра на [0, 1], i нехай Φ – деяке локально 17 тонке семейство цилiндрiв. Тодi (υ − α) - мiра Хаусдорфа множини E ⊂ [0, 1] вiдносно сiмейства Φ визначається наступним чином: H α (E, υ, Φ) = lim ε→0 " inf υ(Ej )6ε (X j υ α (Ej ) )# = lim ε→0 H α ε (E, υ, Φ), де Ej ∈ Φ, S j Ej ⊃ E . Число dimυ(E, Φ) = inf{α : H α (E, υ, Φ) = 0} називається розмiрнiстю Хаусдорфа – Бiллiнгслi множини E вiдносно мiри υ i сiмейства Φ. Нехай hj := − X s−1 i=0 pij ln pij , 0 ln 0 := 0; Hn := X n j=1 hj . bj := − X s−1 i=0 pij ln qij ; Bn := X n j=1 bj . dj := −b 2 j + X s−1 i=0 pij ln2 qij . Теорема 2.4.1 Якщо матриця Q∗ задовольняє умову (2.9) i виконуються наступнi два припущення: X ∞ j=1 dj j 2 < +∞; (4) lim n→∞ Bn n > 0; (5) то розмiрнiсть Хаусдорфа ймовiрнiсної мiри з незалежними Q∗ -символами дорiвнює dimH νξ = lim n→∞ Hn Bn . (6) 18 Третiй роздiл "Застосування фрактальних властивостей випадкових величин з незалежними Q∗ -символами"дисертацiйного дослiдження присвячений розвитку ймовiрнiсного пiдходу до дослiдження перетворень, що зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича, та до вивчення фрактальних властивостей пiдмножин анормальних чисел. У пiдроздiлi 3.1. здiйснено огляд результатiв по теорiї перетворень, що зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича; обгрунтовано актуальнiсть таких дослiджень та пояснено суть ймовiрнiсного пiдходу до вивчення таких перетворень Нехай (M1, ρ1) та (M2, ρ2) — метричнi простори, а f — бiєкцiя M1 → M2. Означення 3.1.2. Вiдображення f називається вiдображенням, що зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича (DP-вiдображенням), якщо dimH1 (E) = dimH2 (f(E)) , ∀E ⊂ M1 . Важливим є випадок, коли (M1, ρ1) = (M2, ρ2). У цьому випадку говорять про DPперетворення простору. Найпростiшими прикладами DP-пертворень є бi-лiпишцевi перетворення, тобто такi, для яких виконується умова 1 C ρ(x, y) 6 ρ(f(x), f(y)) 6 C ρ(x, y), ∀x, y i деякої додатної константи C. Прикладами таких перетворень можуть слугувати афiннi перетворення, а, отже, всi рухи простору та перетворення подiбностi. K. Falconer в роботi [49] запропонував розглядати множини як фрактально еквiвалентнi, якщо iснує бiлiпшицеве вiдображення однiєї множини на iншу. В роботi [115] запропоновано DP-пiдхiд до фрактальної геометрiї як математичної дисциплiни, яка вивчає iнварiанти групи DP-перетворень. Як показано в [115], група DP-перетворень є значно ширшою за групу бi-лiпишцевих перетворень. Проблеми характеризацiї всiх DP-перетворень є дуже складною навiть для випадку R1 . В [115] показано, що проблема вивчення неперервних DP-перетворень R1 рiвносильна проблемi вивчення строго зростаючих функцiй розподiлу на одиничному вiдрiзку та їх фрактальних властивостей. Основним завданням пiдроздiлу 3.1.2. є знаходження необхiдних i достатнiх умов збереження розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича функцiями розподiлу ви- 19 падкових величин з незалежними Q∗ -символами при умовi вiддiленостi елементiв стохастичних матриць Q∗ та P ∗ вiд нуля (у цьому випадку говоритимемо про так званий DB-випадок). Зауважимо, що результати робiт [115, 116] можна отримати як простi наслiдки наведених далi результатiв. Нехай Q∗ -стохастична матриця, така, що: Q∗=   q01 q02 . . . q0k . . . q11 q12 . . . q1k . . . . . . . . . . . . . . . . . . qs−11 qs−12 . . . qs−1k . . .   ; 1)qik > 0 (∀i ∈ {0, 1, . . . , s − 1}, ∀k ∈ N) ; 2) s P−1 i=0 qik = 1 , ∀k ∈ N ; 3) Q ∞ k=1 max i qik = 0 . Розглянемо випадкову величину ξ з незалежними Q∗ -символами ξ = ∆Q∗ ξ1ξ2...ξk... , (7) де ξk набуває значень {0, 1, . . . , s − 1} з ймовiрностями {p0k, p1k, . . . , ps−1k} вiдповiдно, (pik > 0 , s P−1 i=0 pik = 1). Зрозумiло, що властивостi Fξ(x) визначаються матрицями Q∗ та P ∗ , P ∗ = ||pik||, i ∈ {0, 1, . . . , s − 1}, k ∈ N. Оскiльки кожна DP-функцiя не має iнтервалiв постiйностi, то матриця Q∗ не мiстить нулiв. Отже, спектр випадкової величини ξ спiвпадає з [0, 1], тобто ∀x ∈ [0, 1] , ∀ǫ > 0 : Fξ(x + ǫ) − Fξ(x − ǫ) > 0 . Теорема 3.1.1 Нехай Fξ(x) - функцiя розподiлу випадкової величини з незалежними Q∗ -символами. Якщо Fξ(x) зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на [0, 1], то dimH νξ = 1 , 20 де dimH νξ = inf E∈B(νξ) {dimH E} , B(νξ) = {E : νξ(E) = 1} . Теорема 3.1.2 Нехай inf ik pik > 0 i inf ik qik > 0. Тодi функцiя розподiлу випадкової величини ξ з незалежними Q∗ -символами зберiгає розмiрнiсть ХаусдорфаБезиковича на одиничному вiдрiзку тодi i тiльки тодi, коли dimH νξ = 1 . У цьому ж пiдроздiлi показано як, використовуючи дану теорему, можна отримати результати робiт [115, 116] та новi важливi наслiдки. Наслiдок 3.1.1 Нехай ξ - випадкова величина з незалежними Q- символами ξk, якi набувають значень {0, 1, . . . , s − 1} з ймовiрностями {p0k, p1k, . . . , ps−1k} вiдповiдно, причому inf ik pik > 0. Тодi функцiя розподiлу Fξ(x) випадкової величини ξ зберiгає розмiрнiсть ХаусдорфаБезиковича на [0, 1] тодi i тiльки тодi, коли dimH νξ = 1. Наслiдок 3.1.2 Якщо inf ik qik > 0 i lim k→∞ qik pik = 1, ∀i, то Fξ зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на [0, 1] . Наслiдок 3.1.3 Якщо inf ik qik > 0, inf ik pik > 0 i ξ має абсолютно неперервний розподiл на [0, 1], то Fξ зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на [0, 1] . За допомогою доведеної теореми можна легко конструювати сингулярно неперервнi функцiї розподiлу, якi зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на [0, 1] . Для прикладу можна розглянути випадок, коли s = 3 i q0k = q1k = q2k = 1 3 ; p0k = 1 3 − 1 10√ k , p1k = 1 3 , p2k = 1 3 + 1 10√ k . 21 У цьому випадку iнтеграл Хеллiнгера ρk = Z [0,1] s dν dµ dµ = X 2 i=0 √ qik pik = s 1 3 ( 1 3 − 1 10√ k ) + 1 3 + s 1 3 ( 1 3 + 1 10√ k ) має властивiсть Y ∞ k=1 ρk = Y ∞ k=1 % s 1 3 ( 1 3 − 1 10√ k ) + 1 3 + s 1 3 ( 1 3 + 1 10√ k ) = 0 . Тому µξ ⊥ λ (див. [112]). При цьому hk = − X 2 i=0 pik ln pik = (1 3 − 1 10√ k ) ln(1 3 − 1 10√ k )+ 1 3 ln1 3 +(1 3 + 1 10√ k ) ln(1 3 + 1 10√ k ) , bk = − X 2 i=0 pik ln qik = − ln 1 3 ( X 2 i=0 pik) = ln 3 . Отже, dimH µξ = lim k→∞ h1 + h2 + . . . + hk b1 + b2 + . . . + bk = lim k→∞ h1 + h2 + . . . + hk k ln 3 = 1 , оскiльки lim k→∞ hk = ln 3 . Тому Fξ зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на [0, 1] . Цей приклад цiкавий тим, що Fξ не зберiгає мiру Хаусдорфа (бiльше того, iснує множина нульової 1- мiри Хаусдорфа така, що її Fξ- образ має повну мiру Лебега (1- мiру Хаусдорфа), але при цьому Fξ зберiгає розмiрнiсть ХаусдорфаБезиковича. Цей приклад також показує, що умова бiлiпшицевостi є лише грубою достатньою умовою збереження розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича. Справдi, дана DP-функцiя Fξ(x), являючись строго зростаючою i сингулярно неперервною, є суттєво небiлiпшицевою: з одного боку F ′ ξ (x) = 0 на множинi повної мiри Лебега; з iншого боку, lim ε→0 Fξ(x + ε) − Fξ(x) ε = +∞ 22 на скрiзь щiльнiй множинi потужностi континуум. Пiдроздiл 3.1.3 присвячений вивченню DP-перетворень, що породженi розподiлами випадкових величин з незалежними Q∗ -символами без будь-яких додаткових обмежень на матрицю P ∗ (у цьому випадку говоритимемо про так званий Bвипадок). З цiєю метою доведено лему, яка пов’язує властивiсть довiрчостi образу сiм’ї покриттiв Φ ′ := {Fξ(E) : E ∈ Φ} для обчислення розмiростi Хаусдорфа - Безиковича на [0, 1] та властивiсть "бути DP - перетворенням"функцiї розподiлу Fξ. Нехай Fξ - функцiя розподiлу випадкової величини з незалежними s - адичними символами, P ∗ = ||pik|| – вiдповiдна матриця, pik > 0, Y ∞ k=1 max i pik = 0. Нехай Φ – сiмейство цилiндрiв s - адичного розкладу, Φ ′ := {Fξ(E) : E ∈ Φ} – сiмейство цилiндрiв Q∗ - розкладу, який породжений матрицею Q∗ = P ∗ . Лема 3.1.2 Нахай для довiльного x ∈ [0, 1] виконується умова lim k→∞ ln νξ(∆α1(x)...αk(x)) ln λ(∆α1(x)...αk(x)) = 1. (8) Тодi 1. Φ ′ – довiрча для обчислення розмiрностi Хаусдорфа - Безиковича на [0, 1]; 2. Fξ – DP - перетворення [0,1]; 3. твердження (1) i (2) еквiвалентнi. Наступна теорема є основним результатом даного пiдроздiлу. Припустимо, що inf ik qik > 0. Нехай pk := min i pik, qmin := inf ik qik, qmax := sup ik qik. Позначимо T (1) := k : k ∈ N, pk < 1 2 qmin , 23 T (1) k := T (1) ∩ {1, 2, ..., k}. Нехай A := lim k→∞ P j∈T (1) k ln 1 pj k Теорема 3.1.3 Нехай inf ik qik > 0. Тодi функцiя розподiлу Fξ зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича довiльної пiдмножини одиничного вiдрiзка тодi i тiльки тодi, коли ( dimH νη = 1; A = 0. (9) Як наслiдки з отриманої теореми випливають наступнi результати. Наслiдок 1. Якщо функцiя розподiлу Fξ зберiгає розмiрнiсть ХаусдорфаБезиковича довiльної пiдмножини одиничного вiдрiзка, то ймовiрнiсна мiра ν має повну розмiрнiсть Хаусдорфа. Наслiдок 2. Якщо елементи матрицi P вiддiленi вiд нуля деякою додатною константою, тобто якщо inf ij pij > 0, то Fξ є DP-перетворенням одиничного вiдрiзка тодi i тiльки тодi, коли вiдповiдна ймовiрнiсна мiра ν є мiрою повної Хаусдорфової розмiрностi. Наслiдок 3. Якщо lim k→∞ pik = qi , ∀i ∈ N s−1 0 , то Fξ зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на одиничному вiдрiзку. Наслiдок 4. Довiльна строго зростаюча абсолютно неперервна функцiя розподiлу Fξ випадкової величини з незалежними Q−символами зберiгає розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на одиничному вiдрiзку. Наслiдок 5. При довiльному виборi стохастичного вектора Q iснують сингулярно неперервнi функцiї розподiлу випадкових величин з незалежними Q−символами, якi зберiгають розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича на одиничному вiдрiзку. Пiдроздiли 3.2 та 3.3. присвяченi розвитку ймовiрнiсного пiдходу до вивчення метричних властивостей анормальних чисел та застосуванню тонких фракталь- 24 них властивостей ймовiрнiнсних мiр з незалежними Q∗ -символами до дослiдження фрактальних властивостей пiдмножин множини Q∗−анормальних чисел. Вiдома теорема Бореля (E.Borel, 1909) стверджує, що для класичного s-адичного зображення дiйсних чисел для майже всiх x ∈ [0, 1] вiдносно мiри Лебега i для будь-якої цифри i з алфавiту A = {0, 1, ..., s − 1} асимптотична частота νi(x) iснує i дорiвнює 1 s , тобто, νi(x) = lim k→∞ Ni(x, k) k = 1 s , ∀i ∈ {0, 1, . . . , s − 1}, (10) де Ni(x, k) — кiлькiсть цифри «i» серед перших k цифр s-адичного зображення x, i ∈ A. Множину N(s) = {x|(∀i ∈ A) lim k→∞ Ni(x, k) k = 1 s } називають множиною s-нормальних чисел (або множиною дiйсних чисел, якi просто нормальнi вiдносно основи s). Одиничний вiдрiзок [0, 1] може бути представлений як [0, 1] = E(s) [ D(s), де E(s) = {x|νi(x) iснує, ∀i ∈ A}, D(s) = {x|∃i ∈ A, lim k→∞ Ni(x, k) k не iснує}. Множину D(s) називають множиною s-анормальних дiйсних чисел. Кожна з цих множин може бути розкладена на пiдмножини наступним чином. Множину W(s) = {x|(∀i ∈ A) : νi(x) iснує, (∃j ∈ A) : νj (x) 6= 1 s } називають множиною s-квазiнормальних чисел. Очевидно, що E(s) = W(s) [ N(s), W(s) \ N(s) = ∅. 25 Множину P(s) = {x|(∃i ∈ A) : lim k→∞ Ni(x, k) k не iснує, i (∃j ∈ A) : lim k→∞ Nj (x, k) k iснує} називають множиною s-частково анормальних чисел. Множину L(s) = {x|(∀i ∈ A) lim k→∞ Ni(x, k) k не iснує} називають множиною s-суттєво анормальних чисел. Очевидно, що D(s) = L(s) [ P(s), L(s) \ P(s) = ∅. Множини N(s), W(s), P(s), L(s) є всюди щiльними на [0, 1], оскiльки частоти νi(x) не залежать вiд скiнченної кiлькостi перших s-адичних цифр числа x. Також зрозумiлим є те, що цi множини континуальнi. Фрактальнi властивостi пiдмножин множини W(s) вивчалися A. Besicovitch i H. Eggleston ([117, 118]). Використовуючи їхнi результати легко показати, що dimH W(s) = 1. Властивостi пiдмножин множини анормальних чисел iнтенсивно вивчались останнi роки з використанням рiзних пiдходiв у роботах S. Albeverio , L. Barreira, Yu. Kondratiev, Р. Нiкiфорова, L. Olsen, М. Працьвитого, B. Saussol, J. Schmeling, N. Snigireva, Г. Торбiна, S.Winter та iнших (див. [72–75, 119–128] та посилання в них). Зокрема, цiкавi пiдмножини множини D(s) дослiджувалися у [72] з використанням технiки та результатiв теорiї мультифрактальних дивергентних точок. У [127] було показано, що множина D(s) є суперфрактальною (тобто dimH D(s) = 1). У роботах [121, 122] доведено, що множини L(s) i P(s)(s > 2) також мають розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича рiвною одиницi. Добре вiдомим є факт, що множина L(s) є множиною другої категорiї Бера (бiльше того, L(s) мiстить всюди щiльну Gδ-множину). Тому множини N(s), W(s), P(s) є множинами першої 26 категорiї Бера. З вище сказаного слiдує, що суттєво анормальнi числа є домiнуючими як у топологiчному розумiннi, так i у розумiннi фрактальної геометрiї. Мiж тим множина L(s) є малою у розумiннi мiри Лебега: Мiра Лебега Розмiрнiсть Хаусдорфа Категорiя Бера N(s) 1 1 перша W(s) 0 1 перша P(s) (для s > 2) 0 1 перша L(s) 0 1 друга Подiбнi результати були отриманi для декiлькох iнших зображень дiйсних чисел (див., наприклад,[119] та огляд результатiв там). При дослiдженнi фрактальних властивостей пiдмножин Q∞-анормальних чисел для цього випадку не можна застосувати традицiйнi ймовiрнiснi методи та методи теорiї динамiчних систем з низки причин: потенцiйно можлива нескiнченна ентропiя стохастичного вектора Q∞, який визначає метричнi спiввiдношення розбиття; потенцiйна недовiрчiсть системи цилiндрiв Φ(Q∞); вiдсутнiсть загальної формули для обчислення розмiрностi Хаусдорфа–Безиковича навiть для ймовiрнiсної мiри з незалежними однаково розподiленими символами узагальненого зображення Люрота. Також не можемо застосувати технiку дивергентних точок, оскiльки вона не розроблена для мiр, породжених нескiнченними IFS. Не зважаючи на перелiченi складнощi, у [119, 120] було розроблено новий пiдхiд дослiдження Q∞-анормальних чисел i, зокрема, було доведено, що множина Q∞-суттєво анормальних чисел має розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича рiвну одиницi (без будь-яких додаткових обмежень на стохастичний вектор Q∞). Нехай Ωk = {0, 1, 2, . . . , s−1} i Ω = Q ∞ k=1 Ωk = {ω : ω = (ω1, ω2, . . . , ωk, . . .), ωk ∈ Ωk}. Для довiльного ω ∈ Ω означимо νi(ω) = lim k→∞ Ni(ω, k) k (якщо границя iснує) i розглянемо множини: E(Ω) = {ω : νi(ω) iснує ∀i ∈ A = {0, 1, . . . , s − 1}}, 27 P(Ω) = {ω : (∃ i ∈ A) : νi(ω) iснує, (∃ j ∈ A) : νj (ω) не iснує}, L(Ω) = {ω : (∀i ∈ A) : νi(ω) не iснує}. Оскiльки на просторi Ω не введено нi метрики, нi мiри, нi топологiї, то питання про метричнi, топологiчнi чи фрактальнi властивостi множин E(Ω), P(Ω), L(Ω) не може бути вирiшеним. З iншого боку, зрозумiло, що всi цi множини є континуальними. Розглянемо тепер вiдображення f : Ω → R1 . Нехай f(E), f(P), f(L) будуть образами E(Ω), P(Ω), L(Ω) при вiдображеннi f. Властивостi цих множин суттєво залежать вiд вiдображення f. Насправдi, f породжує топологiю та метрику на просторi Ω ∗ , який отриманий з простору Ω злиттям тих точок з Ω, якi мають однаковi f-образи. Якщо, для прикладу, f(ω) = P ∞ k=1 ωk s k , тодi f(E) = E(s), f(P) = P(s), f(L) = L(s), i iснує така пiдмножина N(s) ⊂ E(s), що λ(N(s)) = 1 (де λ — мiра Лебега на [0, 1].) У [119] було сформульоване питання про залежнiсть метричних, топологiчних та фрактальних властивостей пiдмножин дiйсних чисел вiд вибраного зображення f. Зокрема, було поставлено два питання: «Суперфрактальнiсть (тобто, рiвнiсть розмiрностi Хаусдорфа–Безиковича одиницi) множини суттєво анормальних чисел була доведена для ряду рiзних зображень дiйсних чисел (див., [72–75,119–122,127]). Тому природно запитати чи iснує таке зображення f, що: 2.1. для вiдповiдної множини L(f) f-суттєво анормальних чисел розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича не рiвна одиницi; 2.2. вся множина D(f) f-анормальних чисел має розмiрнiсть Хаусдорфа–Безиковича не рiвну одиницi?» Основна мета роздiлу 3.3. "Метричнi та фрактальнi властивостi пiдмножин Q∗ -анормальних чисел"полягає у вивченнi метричних, топологiчних та фрактальних властивостей множин f(E), f(P), f(L) для випадку коли вiдображення f iндуковане Q∗ -зображенням дiйсних чисел. 28 У роботi [121] було показано, що для майже всiх x ∈ [0, 1] вiдносно мiри Лебега i для довiльної цифри i ∈ {0, 1, . . . , s − 1} виконується рiвнiсть lim k→∞ ( Ni(x, k) k − qi1 + qi2 + . . . + qik k ) = 0. (11) У цьому пiдроздiлi показано, що будь-яка з множин E(Q∗ ), P(Q∗ ), L(Q∗ ) може бути одиничної мiри Лебега при вiдповiдному пiдборi матрицi Q∗

ВИСНОВКИ Дисертацiйна робота присвячена розвитку методiв фрактального аналiзу сингулярно неперервних ймовiрнiсних мiр, вивченню тонких фрактальних властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q∗ -символами та використанню отриманих результатiв для розвитку ймовiрнiсного пiдходу до вивчення перетворень, що зберiгають фрактальну розмiрнiсть, та до фрактального аналiзу пiдмножин множини анормальних чисел. З метою дослiдження тонких фрактальних властивостей розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗ -символами та з метою розвитку методiв обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича в дисертацiї запропоновано новi пiдходи до доведення довiрчостi (для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича) локально тонких систем покриттiв, що породжуються полiосновними Q∗ -розкладами дiйсних чисел. Вивчення фрактальних властивостей мiнiмальних розмiрнiсних носiїв розподiлiв випадкових величин з незалежними Q∗ -символами та знаходження явних формул для обчислення розмiрностi Хаусдорфа вiдповiдних ймовiрнiсних мiр дозволило в останньому роздiлi дисертацiї на основi розвиненого в роботi ймовiрнiсного пiдходу до перетворень, що зберiгають розмiрнiсть ХаусдорфаБезиковича, знайти критерiї належностi функцiй розподiлу випадкових величин з незалежними Q∗ -символами до DP-класу, та довести гiпотезу про суперфрактальнiсть множини Q∗ -суттєво анормальних дiйсних чисел. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такi: — розроблено новi методи доведення довiрчостi локально тонких систем покриттiв для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича пiдмножин одиничного вiдрiзка; — розробленi методи застосовано для знаходження широких достатнiх умов довiрчостi систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення 108 розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича (у тому числi i для тих моделей, коли елементи стохастичної матрицi Q\* задовольняють екстремальним умовам inf qik = 0,sup qik = 1); — дослiджено тополого-метричнi та фрактальнi властивостi спектрiв випадкових величин з незалежними Q\*-символами; — дослiджено тонкi фрактальнi властивостi ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*-символами; знайдено явну формулу для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича мiнiмальних розмiрнiсних носiїв таких мiр; — на основi дослiдження властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*- символами вивчено DP-перетворення одиничного вiдрiзка, що iндукуються функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами; — знайдено зв’язок мiж DP-властивостями функцiями розподiлу випадкових величин з незалежними Q\*-символами, вiдносною ентропiєю таких розподiлiв та довiрчiстю систем цилiндрiв Q\*-зображення дiйсних чисел для обчислення розмiрностi Хаусдорфа-Безиковича; для DB- та B-розподiлiв випадкових величин з незалежними Q\*-символами знайдено необхiднi та достатнi умови належностi їх функцiй розподiлу до DP-класу; — на основi дослiдження властивостей ймовiрнiсних мiр з незалежними Q\*- символами вивчено залежнiсть метричних та фрактальних властивостей множин Q\*-нормальних, Q\*-квазiнормальних, Q\*-частково нормальних та Q\*-суттєво анормальних дiйсних чисел вiд обраної системи числення; доведено, зокрема, що при умовi вiдокремленостi елементiв стохастичної матрицi Q\* вiд нуля, множина Q\*-суттєво анормальних дiйсних чисел є суперфрактальною (тобто множиною нульової мiри Лебега, розмiрнiсть Хаусдорфа-Безиковича якої дорiвнює одиницi).