На правах рукописи

Побойко Игорь Валерьевич

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В КВАНТОВЫХ НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМАХ

Специальность 01.04.02 —
«Теоретическая физика»

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Черноголовка — 2020

Работа выполнена в Институте теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН и Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Фейгельман Михаил Викторович**
Официальные оппоненты:	**Кравцов Владимир Евгеньевич,** кандидат физико-математических наук, Международный центр теоретической физики, Триест, Италия, профессор
	Аристов Дмитрий Николаевич, доктор физико-математических наук, ПИЯФ им. Б.П. Константинова РАН, ведущий научный сотрудник
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт физических проблем им. П.Л.Капицы» Российской академии наук

Защита состоится 25 декабря 2020 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета 002.207.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау» Российской академии наук по адресу: 142432, Московская обл., г. Черноголовка, проспект академика Семенова, д. 1А.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук или на сайте диссертационного совета http://www.itp.ac.ru/ru/dissertation-council/.

Автореферат разослан «___» ________________ 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
002.207.01, д-р физ.-мат. наук — Всеволод Эдуардович Адлер

Общая характеристика работы

Изучение квантовых когерентных свойств макроскопических систем представляет собой одно из основных направлений исследований в современной физике конденсированного состояния. При этом образцы, изучаемые в различных экспериментах, часто неидеальны — это может быть вызвано как различными примесями и дефектами, которые в том или ином количестве присутствуют в любых образцах, так и полным отсутствием кристаллической структуры (в качестве примера приведём аморфные тонкие плёнки InO_x, изучению которых посвящена часть этой диссертации). В основополагающей работе Андерсона [1] было предсказано, что такой вмороженный беспорядок может значительно повлиять на свойства системы, приводя к так называемой локализации: часть или все волновые функции системы в отсутствие взаимодействия между частицами оказываются локализованными. Это обстоятельство значительно влияет на кинетические свойства таких систем: весь транспорт через систему, будь то транспорт заряда (проводимость), тепла (теплопроводность) или спина, оказывается экспоненциально подавленным по размеру системы (подчеркнём, это обстоятельство относится к случаю отсутствующего взаимодействия).

Андерсоновская локализация по своей природе является квантовым интерференционным эффектом, и поэтому она в значительной мере чувствительна к наличию в системе неупругих процессов — таких как взаимодействие между частицами, или наличие связи с внешним резервуаром. Когда беспорядок в каком-то смысле слаб, взаимодействие приводит к сбою фазы частиц, подавляя интерференционные эффекты, что приводит к слаболокализационным поправкам к проводимости [2]. Изучение этих поправок позволяет приблизится к локализационному переходу со стороны металлической фазы, и демонстрирует ключевую роль пространственной размерности системы. В частности, в одномерных системах слаболокализационные поправки расходятся, что означает, что режим “слабого беспорядка” в одномерии попросту отсутствует; это является проявлением того факта, что в одномерии всякий беспорядок приводит к локализации. Двумерные системы представляют собой пограничный случай: в них слаболокализационные поправки расходятся лишь логарифмически. Хотя сколь угодно слабый беспорядок в отсутствие взаимодействий и приводит к локализации всех волновых функций, длина локализации оказывается экспоненциально большой и различные возмущения (в роли таковых могут выступать взаимодействие между частицами, спин-орбитальное взаимодействие и т.п.) могут привести к изменению этой картины. Наконец, в трёхмерной системе предсказывается наличие квантового фазового перехода металл-изолятор, при котором с одной стороны перехода волновые функции делокализованы, с другой — локализованы, а в самой точке перехода наблюдается явление мультифрактальности волновых функций [3]. Из-за вышеперечисленных обстоятельств, низкоразмерные системы представляют наибольший интерес с точки зрения локализации.

В случае, если беспорядок сильный, взаимодействие всё равно может привести к наличию в системе конечной проводимости при ненулевой температуре, посредством механизма, известного как «прыжковая проводимость», предсказанного Моттом и обобщённым на случай наличия кулоновского дальнодействия Эфросом и Шкловским. В их картине, неупругие процессы, вызванные кулоновским взаимодействием между электронами или взаимодействием с внешней фононной баней, приводят к туннелированию электронов между локализованными состояниями, из-за чего проводимость при $T > 0$ оказывается ненулевой (которая, однако, зануляется при $T = 0$).

Однако, сейчас известно, что и эта картина также может нарушаться. Баско, Алейнер и Альтшулер [4] предсказали, что в замкнутых системах даже при наличии электрон-электронного взаимодействия, но в отсутствии взаимодействия с внешним фононным резервуаром (что является хорошим приближением при очень низких температурах), может существовать переход металл-изолятор при положительных температурах, который был назван многочастичной локализацией. Авторы [4] исследовали многочастичные фоковские состояния, построенные на одночастичных локализованных состояниях, и изучали вопрос, могут ли матричные элементы взаимодействия привести к делокализации этих состояний по всему фоковскому пространству. Из приведённых ими оценок следовало, что это происходит не всегда, и что в системе может присутствовать многочастичный порог мобильности — что, в частности, приводит к занулению проводимости при ненулевых температурах. Многочастичная локализация вызвала бурный интерес в научном сообществе, поскольку она также соответствует нарушению эргодичности и отходу поведения термодинамики таких систем от описываемого распределением

Гиббса — наречённого в литературе «нарушением гипотезы о термальности собственных состояний» (Eigenstate Thermalization Hypothesis). Эта гипотеза представляет собой квантомеханический аналог эквивалентности между микроканоническим и каноническим ансамблями, известной в классической статистической механике.

В свете описанных выше обстоятельств становится понятно, что одновременный учёт эффектов взаимодействия и локализации приводит к богатому многообразию всевозможных физических явлений, наблюдаемых в различных системах. По этой причине, вероятно, построение общей теории, описывающей взаимодействующие неупорядоченные системы, невозможно. Тем самым, целью данной диссертации было избрано оказание посильного вклада в эту область научных знаний путём исследования набора конкретных примеров таких систем, представлявших интерес для автора в течение его работы над диссертацией.

Актуальность темы. Квантовые неупорядоченные одномерные спиновые цепочки представляют живой научный интерес с точки зрения изучения проблемы многочастичной локализации, которая активно изучается в научном сообществе в течение последних лет; поэтому изучение базовых физических свойств таких систем является актуальной и интересной задачей.

Изучение сильно неупорядоченных сверхпроводников в первую очередь мотивировано серией недавних экспериментов на аморфных тонких плёнках InO_x, TiN, NbN и других схожих системах. При этом исследование температурной зависимости проводимости $\sigma(T)$ в таких системах представляет интерес с экспериментальной точки зрения, поскольку такого рода эксперименты позволяют извлекать значения величин, характеризующих сверхпроводящее состояние — к примеру, температуру сверхпроводящего перехода T_c; прямое определение этой величины как температуры, при которой сопротивление обращается в ноль, затруднено из-за того, что сопротивление спадает до нуля в очень широком температурном интервале.

Наконец, необходимость изучения вихревого стекла также вызвана недавними экспериментами на плёнках InO_x, которые демонстрировали наличие в такой системе ненулевого значения величины критического тока при больших величинах приложенного поперечного магнитного поля (вплоть до второго критического).

Степень разработанности темы. Эффекты от нелинейности спектра в одномерных квантовых жидкостях активно изучались с различных позиций, см. недавний обзор [5] и работы [6—9]. К этой задаче есть два различных подхода, соответствующие использованию либо фермионного, либо бозонного представления. В фермионном представлении исходный спектр квазичастиц имеет вид $\epsilon(q) = uq + \delta\epsilon(q)$, где $\delta\epsilon(q) \ll uq$ при малых q. Для слабого взаимодействия между фермионами, спектральная функция $g(\omega,q)$, соответствующая любому бозонному оператору, может быть получена как свёртка двух фермионных спектральных функций, и тем самым в ней будет присутствовать конечная ширина $\delta\varepsilon(q)$. Однако, этот подход неприменим если взаимодействие между фермионами не является слабым. С другой стороны, сильное взаимодействие между фермионами может быть учтено используя бозонное представление, в котором, однако, нелинейность исходного фермионного спектра приводит к наличию нелинейных членов взаимодействия между бозонными модами. Проблема учёта таких членов в рамках приближения жидкости Латтинджера нетривиальна, поскольку все одномерные частицы с линейным спектром обладают одинаковой групповой скоростью, из-за чего их взаимодействие имеет резонансный характер - к примеру, продукты распада находятся в контакте в течение бесконечно долгого времени. Как следствие, прямое применение второго порядка теории возмущений приводит к расходимостям в мнимой части собственной энергетической части на «световом конусе». В пределе $T \to 0$, ширина бозонной спектральной линии исследовалась ранее в работах [5; 8; 10] для случая общего положения, соответствующего наличию приложенного однородного магнитного поля к спиновой цепочке, которое нарушает симметрию по отношению к инверсии. Интересующих нас предел $\omega \ll T$ в присутствие магнитного поля оказывается похож на случай, разобранный в работе А.Ф. Андреева [11] для флуктуационной поправки к вязкости одномерной классической жидкости, и разобранный в контексте жидкости Латтинджера в работе [6]. Автору неизвестны аналогичные вычисления, которые учитывали бы эффекты нелинейности спектра для симметричного случая $h = 0$. Также стоит упомянуть другие работы, связанные с наличием так называемого «веса Друде» — коэффициента при $\delta(\omega)$ при вещественной части проводимости — в таких спиновых цепочках [12].

С экспериментальной точки зрения, неупорядоченные сверхпроводники вблизи перехода сверхпроводник-изолятор привлекают большой интерес в последнее время [13—22]. Среди прочего, это вызвано появлением новых экспериментальных методик, таких как низкотемпературная туннельная спектроскопия. Как следствие, в работах [17; 18] было обнаружено сильное подавление плотности состояний в окрестности уровня Ферми при температурах сильно выше температуры сверхпроводящего перехода T_c. Подробная полуколичественная теория сверхпроводимости, подобная теории Бардина, Купера и Шрифера (БКШ), однако стартующая с локализованных одноэлектронных состояний (в окрестности трёхмерного локализационного перехода Андерсона) была разработана в работах [23; 24]. Флуктуационная проводимость (парапроводимость) является одним из наиболее общих явлений, которое свойственно всем неупорядоченным сверхпроводникам. Это явление было предсказано в работе Асламазова и Ларкина [25], и связано оно с флуктуационными Куперовскими парами, которые при температурах слегка выше критической имеют конечное, но большое время жизни. В непосредственной окрестности сверхпроводящий точки, внутри флуктуационной области $\epsilon = (T - T_c)/T_c \lesssim \mathrm{Gi}$ (число Гинзбурга), взаимодействие между сверхпроводящими флуктуациями оказывается сильным, что приводит к универсальному скейлингу различных термодинамических величин [26], который определяется лишь симметрией параметра порядка и размерностью пространства. Менее известно, однако, что происходит с кинетическими свойствами системы (такими как проводимость). К примеру, в работе [27] приводилась аргументация в пользу того, что парапроводимость, в действительности, более чувствительна к нелинейным эффектам и отличается от результата Асламазова и Ларкина уже при $\mathrm{Gi} \ll \epsilon \ll \sqrt{\mathrm{Gi}}$. Однако, вычисления в этой работе были проведены для случая наличия достаточно сильного распаривания, и наблюдаемый эффект, в действительности, оказывается достаточно слабым. Поэтому вопрос о наличии отдельной параметрической области в температурной зависимости парапроводимости остался выясненным не до конца.

Интерес к изучению сильно неупорядоченных сверхпроводников в сильном приложенном поперечном поле также вызван активными экспериментальными исследованиями в этой области, см. обзор [28] и, к примеру, работу [29]. Энергия кора вихря в таких системах может меняться на величину порядка самой этой энергии при сдвиге вихря на расстояние порядка размера его кора. Столь сильный пиннинг возникает из-за того, что флуктуации параметра порядка в пространстве превышают его среднее значение [24]. Регулярная решётка вихрей при таких условиях не образуется, нет даже и ближнего решёточного порядка, однако плотность вихрей в среднем постоянна и задана магнитным полем с хорошей точностью. Отсутствие даже ближнего решеточного порядка не позволяет строить теорию известными методами, восходящими к работе А.И.Ларкина [30] (см. также статью [31] и обзоры [32—34]), поскольку все они рассматривают потенциал дефектов как возмущение по сравнению с энергией упругой деформации решетки вихрей (в модели коллективного слабого пиннинга), либо же рассматривают пиннинг отдельных вихрей без учета межвихревого взаимодействия; оба эти подхода неприменимы в интересующем нас случае. Отдельно следует также упомянуть теорию сильного пиннинга [35—37], где рассматриваются сильные примеси, а межвихревое взаимодействие учитывается в рамках теории упругости вихревой решетки: это оказывается возможным в силу предположения о малости концентрации сильных дефектов. Отличие нашей ситуации в том, что дефекты сильные, и концентрация их велика. Феноменологический подход к задаче о вихрях в пленке, подобный модели «кулоновского стекла» Эфроса и Шкловского [38; 39], был развит в работе [40], см. также [41]. Мы развиваем другой подход, опирающийся на работу Мюллера и Иоффе [42] (см. также ряд последующих работ [43; 44]), где задача о развитии кулоновской щели изучалась методами теории спиновых стекол, и предсказывался фазовый переход в неэргодическое состояние с нарушенной репличной симметрией.

Целью данной работы является изучение транспортных свойств в квантовых мезоскопических неупорядоченных сильно коррелированных системах на серии конкретных примеров таких систем.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние поправок, возникающих при учёте эффектов нелинейности спектра, на ширину спектральной линии в чистой XXZ спиновой цепочке, а также на спиновый транспорт и транспорт

тепла через такую цепочку при наличии случайных вмороженных магнитных полей.

2. Вывести эффективное действие, описывающее флуктуации сверхпроводящего параметра порядка в сверхпроводниках с развитой псевдощелью.
3. Исходя из выведенного действия, разработать диаграммную технику для систематического изучения динамики флуктуаций и вычислить величину флуктуационной проводимости в такой система.
4. Построить модель, описывающую коллективный пиннинг вихрей в сильно неоднородных сверхпроводящих тонких плёнках. Вывести эффективное описание построенной модели, используя методы квантовой теории поля.
5. Исследовать фазовый переход в стекольную фазу в рамках предложенной модели.
6. Изучить физические свойства стекольной фазы, включая величину сверхтекучей плотности в ней.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Построена процедура самосогласованного учёта эффектов нелинейности спектра на динамику в XXZ спиновой цепочке. Вычислена величина ширины спектральной линии спиновой корреляционной функции при низких частотах в отсутствие и в присутствии приложенного однородного магнитного поля. Изучено асимптотическое поведение спиновой корреляционной функции при больших временах. Произведена оценка влияния этих эффектов на транспортные свойства неупорядоченной цепочки.
2. Выведено динамическое действие, описывающее флуктуации параметра порядка для модели сверхпроводника с сильно развитой псевдощелью. Идентифицировано наличие трёх релевантных температурных областей в окрестности критической температуры: область гауссовых флуктуаций, промежуточная область и область критических флуктуаций. Изучена величина парапроводимости Асламазова-Ларкина в области гауссовых флуктуаций. Приведена оценка той же величины в промежуточной температурной области. Обна-

ружена сильная пространственная неоднородность проводимости в области критических флуктуаций.
3. Предложена модель, описывающая коллективный пиннинг системы сверхпроводящих вихрей, обладающей конечной плотностью, в пространственно сильно неоднородной тонкой сверхпроводящей плёнке. Идентифицировано наличие стекольного фазового перехода в такой системе. Продемонстрировано наличие сильного пиннинга и восстановления сверхтекучего отклика при низких температурах.

Научная новизна:

1. Впервые получено выражение для ширины спектральной линии при низких частотах для чистой XXZ спиновой цепочки в отсутствие магнитного поля.
2. Впервые оценено влияние эффектов нелинейности спектра на транспортные свойства такой цепочки.
3. Впервые изучен теоретически вопрос о виде флуктуационных поправок в сильно неупорядоченных сверхпроводниках с развитой псевдощелью.
4. Впервые разработан систематический аналитический подход к задаче о сильном коллективном пиннинге системы сверхпроводящих вихрей с конечной плотностью в сильно неупорядоченных тонких сверхпроводящих плёнках.

Достоверность и апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

– Симпозиум *«Localization, Interactions and Superconductivity»*, Черноголовка, Россия, 27 июня – 1 июля 2016 г.; постер «Spin correlations and decay of quasiparticles in XXZ model at $T > 0$»
– Симпозиум *CPTGA «Strongly disordered and inhomogeneous superconductivity»*, Гренобль, Франция, 21 – 22 ноября 2016 г.; доклад «Spin correlation functions and quasiparticle decay»
– Симпозиум *Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity*, Черноголовка, Россия, 19 – 22 декабря 2016 г.; доклад «Spin correlation functions and quasiparticle decay»
– Конференция *Landau Days 2017*, Черноголовка, Россия, 26 – 29 июня 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»

– Школа *School on Fundamentals on Quantum Transport*, Триест, Италия, 31 июля – 4 августа 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Школа *Frontiers of condensed matter*, Лез Уш, Франция, 18 – 29 сентября 2017 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Симпозиум *Winter workshop/school on localization, interactions and superconductivity*, Черноголовка, Россия, 18 – 21 декабря 2017 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Симпозиум *Localization, Interactions and Superconductivity*, Черноголовка, Россия, 30 июня – 4 июля 2018 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Школа *Summer School on Collective Behaviour in Quantum Matter*, Триест, Италия, 27 августа – 14 сентября 2018 г.; постер «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Конференция *A. A. Abrikosov Memorial Conference*, Черноголовка, Россия, 24 – 28 июня 2018 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Конференция *International Conference for Professionals & Young Scientists "Low Temperature Physics"*, Харьков, Украина, 3 – 7 июня 2019 г.; доклад «Paraconductivity in pseudogapped superconductors»
– Конференция *Landau Days 2020*, Черноголовка, Россия, 22 – 25 июня 2020 г.; доклад «2D Coulomb glass as a model of strong vortex pinning in thin-film superconductors»

Кроме этого, все результаты докладывались на научных семинарах учёного совета ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН.

Личный вклад. Все результаты, приведённые в данной диссертационной работе, получены лично автором или при его непосредственном участии.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК. Список работ приведён в конце реферата.

Содержание работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения.

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена изучению ширины спектральной линии в квантовой одномерной цепочке спинов 1/2 с XXZ взаимодействием, а также спинового и теплового транспорта через такие цепочки при наличии беспорядка в виде случайных одноузельных магнитных полей. В **первом разделе** приводится обзор литературы и обосновывается актуальность этой задачи. Изучаемая модель формулируется во **втором разделе**, стартуя с исходного гамильтониана:

$$\hat{H} = -J\sum_n \left(\hat{S}^x_n\hat{S}^x_{n+1} + \hat{S}^y_n\hat{S}^y_{n+1} + \Delta\hat{S}^z_n\hat{S}^z_{n+1} + \frac{h_n}{J}\hat{S}^z_n\right), \tag{1}$$

$$\langle h_n\rangle \equiv h, \quad \langle\langle h_n h_m\rangle\rangle \equiv W^2\delta_{nm}, \tag{2}$$

и, посредством преобразования Йордана-Вигнера и последующей бозонизации переходя к полевому описанию в рамках модели жидкости Латтинджера, описывающее динамику флуктуаций спиновой плотности. Квадратичная часть гамильтониана может быть представлена в следующем виде (в отсутствие беспорядка $W = 0$):

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \pi u(R^2 + L^2), \quad \hat{\mathcal{H}}_h = h\sqrt{K}(R + L). \tag{3}$$

Поля R и L описывают непрерывный предел плотности намагниченности (с дополнительным множителем $\sqrt{K}$, введённым для удобства) $\hat{\rho}(x = na) = \hat{S}^z_n/a$ и содержат только Фурье-компоненты $k > 0$ и $k < 0$ соответственно. В свою очередь, учёт эффектов нелинейности приводит к иррелевантным в смысле ренормгруппы поправкам, из которых наиболее важные при низких температурах имеют следующий вид:

$$\hat{\mathcal{H}}^{(4)}_{b.c.} = -\frac{\alpha}{2}(\lambda_+ R^2L^2 + \lambda_-(R^4 + L^4)), \tag{4}$$

Магнитное поле нарушает «частично-дырочную симметрию» (на языке фермионов Йордана-Вигнера) или симметрию по отношению к инверсии $z \mapsto -z$ (на языке исходных спинов); оно может быть убрано из квадратичной части гамильтониана тривиальной сдвижкой $R,L \mapsto R,L - \frac{\sqrt{K}}{2\pi u}h$, которая, с учётом нелинейных членов (4) генерирует кубические вершины взаимодействия:

$$\hat{\mathcal{H}}^{(3)}_{b.c.} = \frac{\alpha_1}{3}(R^3 + L^3) + \frac{\alpha_2}{2}(R^2L + RL^2), \tag{5}$$

(константы $\alpha_{1,2}$ тривиальным образом связаны с $\lambda_\pm$). В **третьем разделе** разрабатывается диаграммная техника для такой взаимодействующей теории поля, основывающаяся на келдышевской диаграммной технике. Изучается ширина $\Gamma(\omega)$ спектральной линии корреляторов плотности намагниченности, которая определяется через вид «одетых» запаздывающих пропагаторов $g^{(\alpha)}_{ret}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -i\theta(t_1 - t_2)\langle[\alpha(\mathbf{x}_1),\alpha(\mathbf{x}_2)]\rangle$ (тут $\alpha = R,L$; $\mathbf{x} = (x,t)$, и $\mathbf{q} = (q,\omega)$):

$$g^{(R/L)}_{ret}(\mathbf{q}) = \pm\frac{q}{2\pi}\frac{1}{\omega \mp uq + i\Gamma^{(R/L)}(\mathbf{q})} \tag{6}$$

Показывается, что в рамках учёта возмущений во втором порядке теории возмущений (по кубическим и четверным вершинам взаимодействия) возникают нефизические сингулярности в величине $\Gamma(\omega,q)$ на “массовой поверхности” вида $\Gamma(\omega,q) \propto \delta(\omega - uq)$. Разрабатывается процедура самосогласованного учёта наиболее сингулярных диаграмм, учитывающих конечность ширины линии «финальных» состояний, в отсутствие магнитного поля (с четверными вершинами взаимодействия) и в его присутствие (кубические вершины). В поддающимся аналитическому изучению случае $\omega \ll T$, в отсутствие магнитного поля ширина линии может быть обезразмерена как $\Gamma_4(\omega = uq) \approx \frac{\alpha\lambda_-}{u^3}T\omega^2 \cdot \gamma_4(z \equiv \frac{\omega}{T})$ и уравнение на $\gamma_4(z)$ принимает следующий вид:

$$\gamma_4(z) \approx \frac{3}{8\pi^6}\int_{|z_i|\lesssim 1}\frac{dz_i}{\gamma_4(z_1)z_1^2 + \gamma_4(z_2)z_2^2 + \gamma_4(z_3)z_3^2} \tag{7}$$

Соответствующее обезразмеривание в присутствие магнитного поля принимает вид $\Gamma_3(\omega) = \frac{|\alpha_1|}{u^2}\omega^2\gamma_3(z \equiv \frac{\omega}{T})$ и уравнение на $\gamma_3(z)$ принимает вид:

$$\gamma_3(z) = \frac{1}{8\pi^4}\int_{|z_i|\lesssim 1}\frac{dz_i}{z_1^2\gamma_3(z_1) + z_2^2\gamma_3(z_2)} \tag{8}$$

Анализ этих уравнений приводит к следующим решениям, которые представляют основной результат первой главы:

$$\Gamma_4(\omega) = C_1 \frac{\alpha\lambda_-}{u^3} T\omega^2 \sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \sim T\frac{\omega^2}{J^2}\sqrt{\ln \frac{T}{|\omega|}} \tag{9}$$

$$\Gamma_3(\omega) = C_2 \frac{|\alpha_1|}{u^2} T^{1/2}|\omega|^{3/2} \sim \frac{|h|T^{1/2}|\omega|^{3/2}}{J^2} \tag{10}$$

Результат (10) оказывается эквивалентен задаче о вязкости классической одномерной жидкости [11], и также был получен в работе [6] в контексте жидкости Латтинджера. Кроме того, данный результат находится в согласии с результатами для скейлинга ширины фононной линии в рамках модели KPZ, асимптотическая эквивалентность которой обсуждалась в работе [45]. Показывается, что переход от результата (9) к результату (10) происходит при величине магнитного поля порядка $h \sim T$. Помимо этого, в третьем разделе также изучаются ведущие поправки, возникающие от диаграмм, которые не были учтены в рамках самосогласованного вычисления. Показывается, что при наличии магнитного поля, поправки, вообще говоря, не содержат малого параметра и обладают таким же скейлингом что и выражение (10) — тем не менее, приводится аргументация в пользу того, что вид ответа сохраняется. В симметричном же случае при отсутствии магнитного поля поправки содержат малость в виде отрицательных степеней $\ln(T/\omega)$. В **четвёртом разделе** изучается влияние найденной ширины спектральной линии на асимптотическое поведение корреляционной функции $\left\langle \hat{S}^z_n(t)\hat{S}^z_0(0)\right\rangle$. Показывается, что она представляет собой пару квазидиффузионных «волновых пакетов», центрированных около $n = \pm ut/a$, и которые имеют характерную ширину в $l_D(t)/a$ узлов, где:

$$l_D(t) = \begin{cases} (C_1\alpha\lambda_- T|t|/u)^{1/2} \sim a\cdot(T|t|)^{1/2}, & h \ll T, \\ (T/u)^{1/3}(C_2\alpha_1|t|)^{2/3} \sim a\cdot(T/J)^{1/3}(h|t|)^{2/3}, & h \gg T. \end{cases} \tag{11}$$

Характерная высота этого «волнового пакета» определяется из значения этой корреляционной функции при $|na \mp ut| \ll l_D$ и даётся:

$$\langle S^z_n(t)S^z_0(0)\rangle = \frac{1}{4\pi^{3/2}}\frac{a^2}{l_T l_D}\frac{1}{\ln^{1/4}(l_D/l_T)}, \quad h \ll T, \tag{12}$$

$$\langle S_n^z(t)S_0^z(0)\rangle \approx \frac{\Gamma(5/3)}{2\pi^2}\cdot\frac{a^2}{l_T l_D}, \quad h\gg T, \tag{13}$$

а “хвосты”, соответствующие $|na\mp ut|\gg l_D$ даются:

$$\langle S_n^z(t)S_0^z(0)\rangle = \frac{1}{4\pi^{3/2}}\frac{a^2}{l_T l_D}\ln^{-1/4}\left(\frac{|na\mp ut|}{l_T}\right)\times \\ \times\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{(na\mp ut)^2}{l_D^2}\ln^{-1/4}\left(\frac{|na\mp ut|}{l_T}\right)\right), \tag{14}$$

$$\langle S_n^z(t)S_0^z(0)\rangle \approx \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^{3/2}}\frac{l_D^{3/2}}{l_T a^{1/2}}\frac{1}{|n\mp ut/a|^{5/2}} \tag{15}$$

Асимптотики (12-15) применимы лишь при достаточно больших временах, таких что $l_D(t)\gg l_T\equiv u/T$. В **пятом разделе** обсуждается влияние учтённых нелинейных вершин на спиновый транспорт и теплопроводность спиновой цепочки. При $K>3/2$, полная ширина линии может быть определена из правила Матиссена, $\Gamma(\omega)=\Gamma_{\mathrm{dis}}+\Gamma_{\mathrm{nl}}(\omega)$ (где Γ_{nl} даётся формулами (9,10), где вклад в ширину от беспорядка имеет вид [46]:

$$\Gamma_{\mathrm{dis}} = \frac{DK}{u}\frac{\Gamma^2(K)}{\Gamma(2K)}\left(\frac{2\pi aT}{u}\right)^{2K-2}\sim\frac{\langle h^2\rangle}{J}\left(\frac{T}{J}\right)^{2K-2}. \tag{16}$$

Спиновый транспорт (соответствующий обычной проводимости на языке фермионов Йордана-Вигнера) определяется величиной $\Gamma(\omega=0)$ и поэтому вклада от нелинейности спектра в него нет:

$$\sigma = \frac{uK}{2\pi\Gamma_{\mathrm{dis}}}\underset{T\to 0}{\sim} a\frac{J^2}{\langle\langle h^2\rangle\rangle}\left(\frac{J}{T}\right)^{2-2K}, \tag{17}$$

В свою очередь, теплопроводность определяется $\Gamma(\omega\sim T)$ и может быть оценена как:

$$\kappa\sim\frac{uT}{\Gamma(\omega\sim T)}\underset{T\to 0}{\sim}\begin{cases} J^3a/T^2, & K>5/2,\quad h\simeq 0,\\ J^3a/|h|T, & K>2,\quad h\gtrsim T,\\ J^3a(J/T)^{2K-3}/\left\langle\langle h^2\rangle\right\rangle, & \text{иначе.}\end{cases}, \tag{18}$$

Наконец, в **шестом разделе** приведено заключение, в котором приведены общие выводы.

Вторая глава посвящена изучению флуктуационной проводимости в сильно неупорядоченных сверхпроводниках с развитой псевдощелью, величина которой предполагается большой $\Delta_P \gg T_c$. В **первом разделе** приводится экспериментальная мотивация данного исследования, обосновывающая его актуальность. Во **втором разделе** формулируется модель, описывающая преформированные куперовские пары, которые могут занимать отдельные локализованные одноэлектронные состояния $\psi_i(\boldsymbol{r})$, на языке андерсоновских псевдоспинов:

$$H = -2\sum_i \varepsilon_i S_i^z - \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}(S_i^+ S_j^- + h.c), \tag{19}$$

где величины ε_i представляют собой случайные величины, распределённые по закону $P(\varepsilon) = \nu_0\theta(W - |\varepsilon|)$, $\nu_0 \equiv P(0) = 1/2W$, а J_{ij} представляет собой матрицу взаимодействия с большим характерным радиусом $|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j| \sim R \gg 1$ (длины измеряются в единицах $n^{-1/d}$, где n — концентрация локализованных состояний). Проводится статический среднеполевой анализ данной модели, который сводится к уравнению самосогласования, описывающее среднее значения сверхпроводящего параметра порядка, который соответствует внутриплоскостной «поляризации» псевдоспинов $\Phi_i^\alpha = \sum_j J_{ij} S_j^\alpha$ $(\alpha = x{,}y)$:

$$\sum_j J_{ij}\eta_j \Phi_j^\alpha = \Phi_i^\alpha, \quad \eta_j = \frac{\tanh\beta\sqrt{\varepsilon_j^2 + \Phi_j^2}}{2\sqrt{\varepsilon_j^2 + \Phi_j^2}}, \tag{20}$$

анализ которого в приближении $R \to \infty$ даёт оценку для температуры перехода

$$T_c = \frac{4e^\gamma}{\pi} W e^{-1/g}, \quad g = \nu_0 J. \tag{21}$$

Кроме того, во втором разделе строится теоретико-полевое описание данной модели с использованием семионного представления для спиновых переменных через переменные $\bar{\psi}, \psi$ и базирующееся на келдышевской диаграммной технике, со следующим действием:

$$iS[\bar{\psi},\psi,\Phi] = i\int dt\Big(- \Phi^\alpha \hat{J}^{-1}\check{\tau}_x \Phi^\alpha + \bar{\psi}\left(i\partial_t + \varepsilon_i\hat{\sigma}^z + \frac{1}{\sqrt{2}}\check{\Gamma}_\mu \hat{\sigma}^\alpha \Phi_\mu^\alpha\right)\psi\Big), \tag{22}$$

где $\check{\tau}_\alpha$ представляет собой матрицы Паули, действующие на келдышевском пространстве, $\check{\Gamma}_{cl} = \check{\tau}_0$, $\check{\Gamma}_q = \check{\tau}_x$, а σ^α — матрицы Паули, действующие на семионном пространстве. Взаимодействие с калибровочным электромагнитным полем описывается заменой $\hat{J}^{-1} \equiv \hat{J}^{-1}(\hat{\boldsymbol{P}}) \approx J^{-1}(1 + \hat{\boldsymbol{P}}^2 R^2)$, где $\hat{\boldsymbol{P}} = \hat{\boldsymbol{p}} - 2e\boldsymbol{A}\hat{\sigma}^y$. В **третьем разделе** проводится анализ модели (22) в рамках гауссового приближения по Φ, которое оказывается применимо при достаточном удалении от точки перехода, при $1 \gg \epsilon \equiv \ln\frac{T}{T_c} \gg \epsilon_1 \equiv Z^{-a_1}$ ($a_1 = 1/2$ при $d = 2$ и $a_1 = 2/3$ при $d = 3$), где $Z = \nu_0 T_c \xi_0^d$ представляет собой эффективное координационное число — число взаимодействующих соседей, а величина $\xi_0 = R/\sqrt{g}$ соответствует сверхпроводящей длине когерентности. Показывается, что в гауссовой области динамика флуктуаций параметра порядка может быть описана в рамках стандартного релаксационного уравнения Гинзбурга-Ландау; флуктуационный пропагатор $L = \langle\Phi\Phi\rangle$ принимает вид:

$$L_R(\omega,\boldsymbol{q}) = \frac{1/2\nu_0}{\epsilon + q^2\xi_0^2 - i\omega\tau}, \tag{23}$$

где величина $\tau = \pi/4T$, что приводит к применимости результата Асламазова и Ларкина [25] в этой области (с точностью до фактора 2, возникшего из-за бÓльшей в два раза величины τ по сравнению со стандартными сверхпроводниками):

$$\sigma_{AL} = \frac{e^2}{\hbar} \times \begin{cases} 1/8\epsilon, & (2D), \\ 1/16\xi_0\sqrt{\epsilon}, & (3D). \end{cases} \tag{24}$$

Четвёртый раздел посвящён выходу за гауссово приближение и изучению обратного влияния флуктуаций параметра порядка на псевдоспиновые переменные, предполагая, что имеет место пространственное самоусреднение — что оказывается верным вдали от области Гинзбурга $\epsilon \gg \epsilon_2 = \mathrm{Gi} \sim Z^{-2/(4-d)}$. Основной изучаемый в этом разделе эффект состоит в возникновении диссипативной динамики псевдоспиновых переменных с достаточно маленькими величинами ε_i из-за того, что они взаимодействуют с флуктуирующим полем параметра порядка Φ. Эта диссипативная динамика в конечном итоге приводит к модификации диссипативного члена в релаксационном уравнении Гинзбурга-Ландау с возникающей нетривиальной зависимостью $\tau(\omega)$, что, в свою очередь, влияет на величину парапроводимости, в общем виде пропорциональную произведению $T\tau$. В промежуточной области $\epsilon_2 \gg \epsilon \gg \epsilon_1$ данный эффект уже существенно непертурбативный и не поддаётся аналитическому изучению; однако, приведённые оценки показывают, что он не нарушает степенную сингулярность результата (24), но приводит к нарушению его универсального вида, приводя к возникновению дополнительного множителя $\sigma(T) = C(T)\sigma_{AL}(T)$, и $C(T) = O(1)$. В **пятом разделе** показывается, что критерий нарушения пространственной самоусредняемости в данной задаче совпадает с критерием Гинзбурга, $\epsilon \lesssim \epsilon_2$. Как следствие, эта область не только характеризуется наличием критических флуктуаций термодинамических величин, но ещё и возникновением сильных пространственных флуктуаций динамических величин, таких как парапроводимость. В частности, вычисляется корреляционная функция

$$K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\sigma_{AL}^2} \int d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \, \langle \delta\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{x}) \delta\sigma(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{y}) \rangle \tag{25}$$

и показывается, что условие малости пространственных флуктуаций $K(0) \ll 1$ совпадает с критерием Гинзбурга. Наконец, в **шестом разделе** приводятся выводы, в которых обсуждается возможная применимость результатов к экспериментам, а также возможность ослабить некоторые из теоретических предположений, заложенных в модель.

Третья глава данной диссертации посвящена изучению вопроса о сильном коллективном пиннинге системы вихрей, возникающих в сильно неупорядоченной тонкой сверхпроводящей плёнке, помещённой в большое магнитное поле $H_{c2} \gg B \gg H_{c1}$. В **первом разделе** обосновывается релевантность этой задачи по отношению к недавним экспериментам, а также приводится краткий обзор существующих теорий вихревого пиннинга. Во **втором разделе** формулируется изучаемая модель, в которой вихри могут занимать узлы дискретной регулярной решётки с шагом $a \sim \xi_0$, и взаимодействуют по логарифмическому закону $J_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} = U_0 \ln \frac{L}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$. Кроме того, узлам соответствуют случайные энергии пиннинга, без пространственных корреляций и характеризующиеся большим разбросом $\overline{u_{\boldsymbol{r}} u_{\boldsymbol{r}'}} = W^2 \delta_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'}$, где $W \gg U_0$:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'} n_{\boldsymbol{r}} J_{\boldsymbol{r}\boldsymbol{r}'} n_{\boldsymbol{r}'} + \sum_{\boldsymbol{r}} (u_{\boldsymbol{r}} - \mu) n_{\boldsymbol{r}}, \tag{26}$$

и величина μ, играющая роль химического потенциала, фиксирует среднюю плотность вихрей $\langle n_{\boldsymbol{r}}\rangle \equiv K = Ba^2/\Phi_0$. Используя стандартную репличную технику, для этой модели строится длинноволновое теоретико-полевое описания в терминах пары матричных в репличном пространстве полей $\mathcal{G}_{ab}(\boldsymbol{r})$ и $\mathcal{Q}_{ab}(\boldsymbol{r})$; первое определяет эффективную одноузельную энергию вихрей, возникающую за счёт взаимодействия, а второе определяет локальную корреляционную функцию $\mathcal{Q}_{ab} \simeq \langle\langle n_a n_b\rangle\rangle$, определяющую, в частности, эффективную длину экранировки межвихревого взаимодействия. Действие для полученной теории поля принимает вид ($\delta n \equiv n - K$):

$$nS[\hat{\mathcal{G}},\hat{\mathcal{Q}}] = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\hat{\mathcal{G}}\hat{\mathcal{Q}}) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln(1+\beta\hat{J}\hat{\mathcal{Q}}) + \beta n\sum_{\boldsymbol{r}} F_{\mathrm{v}}[\hat{\mathcal{G}}_{\boldsymbol{r}}] \tag{27}$$

$$e^{-\beta n F_{\mathrm{v}}[\hat{\mathcal{G}}]} = \operatorname{Tr}_{\mathrm{v}}\exp\left(\frac{1}{2}\delta n(\beta^2 W^2\hat{\mathcal{I}} + \hat{\mathcal{G}})\delta n + \beta\mu\sum_a \delta n^a\right) \tag{28}$$

В **третьем разделе** проводится седловой анализ полученной теории поля, и показывается, что высокотемпературная реплично-симметричная фаза «вихревой жидкости» обладает конечной длиной экранировки эффективного межвихревого взаимодействия $l = a(2\pi\nu_0 U_0)^{-1/2} \sim a\sqrt{W/U_0}$, и, как следствие, нулевой сверхтекучей плотностью. Анализ стабильности этого решения приводит к выводу о возникновении фазы с нарушенной репличной симметрией, и, как следствие, с нарушенной эргодичностью при $T < T_c \equiv U_0/12$. Эффективная теория Гинзбурга-Ландау, описывающая флуктуации мягких мод параметра порядка, соответствующего этому нарушение в окрестности T_c, описывается следующим функционалом:

$$\begin{aligned} nS[\hat{\Psi}] = \nu_0 T_c\Bigg(&\frac{1}{24}\operatorname{Tr}(\tau\hat{\Psi}^2 + (\nabla\hat{\Psi})^2 l^2/6) \\ &- \frac{1}{2160}\left(7\operatorname{Tr}\hat{\Psi}^3 + 6\sum_{ab,\boldsymbol{r}}\Psi^3_{ab,\boldsymbol{r}}\right) - \frac{1}{2016}\sum_{ab,\boldsymbol{r}}\Psi^4_{ab,\boldsymbol{r}}\Bigg) \end{aligned} \tag{29}$$

Вид функционала показывает, что эффективное число Гинзбурга, описывающее ширину области критических флуктуаций, имеет порядок $\mathrm{Gi} = O(1)$, из-за чего аналитическое изучение окрестности перехода оказывается невозможным. **Четвёртый раздел** носит технический характер, в нём проводится анализ седловых уравнений при низких температурах $T \ll T_c$ в приближении одноступенчатого нарушения репличной симметрии. В **пятом разделе** приводится физический анализ полученных результатов. Демонстрируется, что в стекольной низкотемпературной фазе возникает отличие эффективной энергии взаимодействия пары пробных вихрей в зависимости от того, были ли они внесены в систему *до замерзания* ("Field Cooled" отклик) или *после* ("Zero Field Cooled" отклик). Полученное выражения для FC отклика демонстрирует аналогичное высокотемпературной фазе экранирование поведение; однако в ZFC отклике эффективная длина экранировки оказывается очень большой $l_{\mathrm{ZFC}} \approx 260 l_{\mathrm{FC}}$, что позволяет утверждать об эффективном отсутствии экранировки и восстановлении сверхтекучего отклика системы. Кроме того, в пятом разделе приводится результат вычисления функции распределения локальных энергий пиннинга, которая принимает вид:

$$P\left(h \equiv \frac{u-\mu}{T_c}\right) \approx \nu_0 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(3.03 - 0.09|h|\right). \tag{30}$$

Хотя формально это выражение отлично от нуля всюду, однако фактически оно заметно отличается от нуля лишь при заметном удалении от химического потенциала $|u-\mu| \gtrsim 30T_c = 2.5U_0$ — что означает, что вероятность найти слабо запиннингованный вихрь крайне мала. В заключении к пятому разделу обсуждается вопрос о стабильности полученного решения: хотя формально оно неустойчиво (коэффициенты при кубических членах в (29) предсказывают непрерывное нарушение репличной симметрии в рамках иерархической схемы Паризи), фактически отрицательное собственное число гессиана оказывается очень малым. Как следствие, значение энтропии при нуле температур хоть и получается отрицательным (что сигнализирует о неустойчивости решения), но крайне малым $S(T=0) = -3\beta T_c \mathcal{Q}_0 \approx -4.29 \cdot 10^{-5} \nu_0 T_c$, что позволяет нам ожидать, что точное решение будет очень слабо отличаться от приведённого в диссертации приближённого. В **шестом разделе** приводятся выводы и обсуждается возможная применимость полученной теории к экспериментам.

Наконец, в **заключении** приведены основные результаты и выводы данной работы. Некоторые технические детали трёх глав вынесены в **приложения А,Б,В** соответственно.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Poboiko I.*, *Feigel'man M.* Spin correlation functions and decay of quasiparticles in XXZ spin chain at T > 0 // Phys. Rev. B. — 2016. — нояб. — т. 94, вып. 19. — с. 195420. — DOI: 10.1103/PhysRevB.94.195420.

A2. *Poboiko I.*, *Feigel'man M.* Paraconductivity of pseudogapped superconductors // Phys. Rev. B. — 2018. — янв. — т. 97, вып. 1. — с. 014506. — DOI: 10.1103/PhysRevB.97.014506.

A3. *Побойко И.*, *Фейгельман М.* Двумерное кулоновское стекло как модель пиннинга вихрей в сверхпроводящих пленках // Письма в ЖЭТФ. — 2020. — т. 112, вып. 4. — DOI: 10.31857/S1234567820160065.

Список литературы

1. *Anderson P. W.* Absence of Diffusion in Certain Random Lattices // Phys. Rev. — 1958. — март. — т. 109, вып. 5. — с. 1492—1505. — DOI: 10.1103/PhysRev.109.1492.
2. *Gor'kov L.*, *Larkin A.*, *Khmelnitskii D.* Particle conductivity in a two-dimensional random potential // JETP Letters. — 1979. — т. 30, вып. 4. — с. 228.
3. *Janssen M.* Statistics and scaling in disordered mesoscopic electron systems // Physics Reports. — 1998. — т. 295, № 1. — с. 1—91. — DOI: https://doi.org/10.1016/S0370-1573(97)00050-1.
4. *Basko D.*, *Aleiner I.*, *Altshuler B.* Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states // Annals of Physics. — 2006. — т. 321, № 5. — с. 1126—1205. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.aop.2005.11.014.
5. *Imambekov A.*, *Schmidt T. L.*, *Glazman L. I.* One-dimensional quantum liquids: Beyond the Luttinger liquid paradigm // Rev. Mod. Phys. — 2012. — сент. — т. 84, вып. 3. — с. 1253—1306. — DOI: 10.1103/RevModPhys.84.1253.

6. *Samokhin K.* Lifetime of excitations in a clean Luttinger liquid // Journal of Physics: Condensed Matter. — 1998. — авг. — т. 10, № 31. — с. L533–L538. — DOI: 10.1088/0953-8984/10/31/002.

7. *Aristov D. N.* Luttinger liquids with curvature: Density correlations and Coulomb drag effect // Phys. Rev. B. — 2007. — авг. — т. 76, вып. 8. — с. 085327. — DOI: 10.1103/PhysRevB.76.085327.

8. *Arzamasovs M.*, *Bovo F.*, *Gangardt D. M.* Kinetics of Mobile Impurities and Correlation Functions in One-Dimensional Superfluids at Finite Temperature // Phys. Rev. Lett. — 2014. — апр. — т. 112, вып. 17. — с. 170602. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.112.170602.

9. *Protopopov I. V.*, *Gutman D. B.*, *Mirlin A. D.* Equilibration in a chiral Luttinger liquid // Phys. Rev. B. — 2015. — май. — т. 91, вып. 19. — с. 195110. — DOI: 10.1103/PhysRevB.91.195110.

10. *Ristivojevic Z.*, *Matveev K. A.* Decay of Bogoliubov excitations in one-dimensional Bose gases // Phys. Rev. B. — 2016. — июль. — т. 94, вып. 2. — с. 024506. — DOI: 10.1103/PhysRevB.94.024506.

11. *Andreev A.* The hydrodynamics of two- and one-dimensional liquids // Sov. Phys. JETP. — 1980. — май. — т. 51, вып. 5. — с. 1038.

12. *Sirker J.*, *Pereira R. G.*, *Affleck I.* Conservation laws, integrability, and transport in one-dimensional quantum systems // Phys. Rev. B. — 2011. — янв. — т. 83, вып. 3. — с. 035115. — DOI: 10.1103/PhysRevB.83.035115.

13. *Chockalingam S. P.*, *Chand M.*, *Kamlapure A.*, *Jesudasan J.*, *Mishra A.*, *Tripathi V.*, *Raychaudhuri P.* Tunneling studies in a homogeneously disordered s-wave superconductor: NbN // Phys. Rev. B. — 2009. — март. — т. 79, вып. 9. — с. 094509. — DOI: 10.1103/PhysRevB.79.094509.

14. *Sambandamurthy G.*, *Engel L. W.*, *Johansson A.*, *Shahar D.* Superconductivity-Related Insulating Behavior // Phys. Rev. Lett. — 2004. — март. — т. 92, вып. 10. — с. 107005. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.107005.

15. *Gantmakher V. F.*, *Dolgopolov V. T.* Superconductor–insulator quantum phase transition // Physics-Uspekhi. — 2010. — янв. — т. 53, № 1. — с. 1–49. — DOI: 10.3367/ufne.0180.201001a.0003.

16. *Goldman A. M., Marković N.* Superconductor-Insulator Transitions in the Two-Dimensional Limit // Physics Today. — 1998. — нояб. — т. 51, № 11. — с. 39. — DOI: 10.1063/1.882069.

17. *Sacépé B., Dubouchet T., Chapelier C., Sanquer M., Ovadia M., Shahar D., Feigel'man M., Ioffe L.* Localization of preformed Cooper pairs in disordered superconductors // Nature Physics. — 2011. — март. — т. 7, № 3. — с. 239—244. — DOI: 10.1038/nphys1892.

18. *Sacépé B., Chapelier C., Baturina T. I., Vinokur V. M., Baklanov M. R., Sanquer M.* Disorder-Induced Inhomogeneities of the Superconducting State Close to the Superconductor-Insulator Transition // Phys. Rev. Lett. — 2008. — окт. — т. 101, вып. 15. — с. 157006. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.157006.

19. *Ovadia M., Sacépé B., Shahar D.* Electron-Phonon Decoupling in Disordered Insulators // Phys. Rev. Lett. — 2009. — апр. — т. 102, вып. 17. — с. 176802. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.102.176802.

20. *Chand M., Saraswat G., Kamlapure A., Mondal M., Kumar S., Jesudasan J., Bagwe V., Benfatto L., Tripathi V., Raychaudhuri P.* Phase diagram of the strongly disordered *s*-wave superconductor NbN close to the metal-insulator transition // Phys. Rev. B. — 2012. — янв. — т. 85, вып. 1. — с. 014508. — DOI: 10.1103/PhysRevB.85.014508.

21. *Dubouchet T.* Local spectroscopy at low temperature of disordered superconducting systems : дис. ... канд. / Dubouchet Thomas. — Neel Institute, Grenoble, 10.2010.

22. *Driessen E. F. C., Coumou P. C. J. J., Tromp R. R., Visser P. J. de, Klapwijk T. M.* Strongly Disordered TiN and NbTiN *s*-Wave Superconductors Probed by Microwave Electrodynamics // Phys. Rev. Lett. — 2012. — сент. — т. 109, вып. 10. — с. 107003. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.107003.

23. *Feigel'man M. V., Ioffe L. B., Kravtsov V. E., Yuzbashyan E. A.* Eigenfunction Fractality and Pseudogap State near the Superconductor-Insulator Transition // Phys. Rev. Lett. — 2007. — янв. — т. 98, вып. 2. — с. 027001. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.027001.

24. *Feigel'man M., Ioffe L., Kravtsov V., Cuevas E.* Fractal superconductivity near localization threshold // Annals of Physics. — 2010. — т. 325, № 7. — с. 1390—1478. — DOI: https://doi.org/10.1016/j.aop.2010.04.001. — July 2010 Special Issue.

25. *Aslamazov L., Larkin A.* Effect of Fluctuations on the Properties of a Superconductor Above the Critical Temperature // Sov. Phys. Solid State. — 1968. — т. 10, вып. 4. — с. 875—880.

26. *Patashinskiĭ A. Z., Pokrovskii V.* Fluctuation Theory of Phase Transitions. — Pergamon Press, 1979. — (International series in natural philosophy). — ISBN 0080216641.

27. *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Nonlinear fluctuation phenomena in the transport properties of superconductors // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 2001. — март. — т. 92, № 3. — с. 519—528. — DOI: 10.1134/1.1364749.

28. *Sacépé B., Feigel'man M., Klapwijk T. M.* Quantum breakdown of superconductivity in low-dimensional materials // Nature Physics. — 2020. — июль. — т. 16, № 7. — с. 734—746. — DOI: 10.1038/s41567-020-0905-x.

29. *Sacépé B., Seidemann J., Gay F., Davenport K., Rogachev A., Ovadia M., Michaeli K., Feigel'man M. V.* Low-temperature anomaly in disordered superconductors near B_{c2} as a vortex-glass property // Nature Physics. — 2019. — янв. — т. 15, № 1. — с. 48—53. — DOI: 10.1038/s41567-018-0294-6.

30. *Larkin A.* Effect of inhomogeneities on the structure of the mixed state of superconductors // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1970. — т. 31, вып. 4. — с. 784.

31. *Larkin A. I., Ovchinnikov Y. N.* Pinning in type II superconductors // Journal of Low Temperature Physics. — 1979. — февр. — т. 34, № 3. — с. 409—428. — DOI: 10.1007/BF00117160.

32. *Brandt E. H.* Order parameter and magnetic field of the distorted vortex lattice and their application to flux pinning in type II superconductors. II.

Curved flux lines // Journal of Low Temperature Physics. — 1977. — авг. — т. 28, № 3. — с. 291—315. — DOI: 10.1007/BF00668219.

33. *Blatter G.*, *Feigel'man M. V.*, *Geshkenbein V. B.*, *Larkin A. I.*, *Vinokur V. M.* Vortices in high-temperature superconductors // Rev. Mod. Phys. — 1994. — окт. — т. 66, вып. 4. — с. 1125—1388. — DOI: 10.1103/RevModPhys.66.1125.

34. *Kwok W.-K.*, *Welp U.*, *Glatz A.*, *Koshelev A. E.*, *Kihlstrom K. J.*, *Crabtree G. W.* Vortices in high-performance high-temperature superconductors // Reports on Progress in Physics. — 2016. — сент. — т. 79, № 11. — с. 116501. — DOI: 10.1088/0034-4885/79/11/116501.

35. *Labusch R.* Calculation of the Critical Field Gradient in Type-II Superconductors // Cryst. Lattice Defects. — 1969. — дек. — т. 1, вып. 1. — с. 1—16.

36. *Blatter G.*, *Geshkenbein V. B.*, *Koopmann J. A. G.* Weak to Strong Pinning Crossover // Phys. Rev. Lett. — 2004. — февр. — т. 92, вып. 6. — с. 067009. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.067009.

37. *Buchacek M.*, *Willa R.*, *Geshkenbein V. B.*, *Blatter G.* Persistence of pinning and creep beyond critical drive within the strong pinning paradigm // Phys. Rev. B. — 2018. — сент. — т. 98, вып. 9. — с. 094510. — DOI: 10.1103/PhysRevB.98.094510.

38. *Efros A. L.*, *Shklovskii B. I.* Coulomb gap and low temperature conductivity of disordered systems // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1975. — февр. — т. 8, № 4. — с. L49—L51. — DOI: 10.1088/0022-3719/8/4/003.

39. *Efros A.* Coulomb gap in disordered systems // Journal of Physics C: Solid State Physics. — 1976. — июнь. — т. 9, № 11. — с. 2021—2030. — DOI: 10.1088/0022-3719/9/11/012.

40. *Täuber U. C.*, *Nelson D. R.* Interactions and pinning energies in the Bose glass phase of vortices in superconductors // Phys. Rev. B. — 1995. — дек. — т. 52, вып. 22. — с. 16106—16124. — DOI: 10.1103/PhysRevB.52.16106.

41. *Larkin A., Khmel'nitskii D.* Activation conductivity in disordered systems with large localization length // Journal of Experimental and Theoretical Physics. — 1982. — сент. — т. 56, вып. 3. — с. 647.

42. *Müller M., Ioffe L. B.* Glass Transition and the Coulomb Gap in Electron Glasses // Phys. Rev. Lett. — 2004. — дек. — т. 93, вып. 25. — с. 256403. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.256403.

43. *Pankov S., Dobrosavljević V.* Nonlinear Screening Theory of the Coulomb Glass // Phys. Rev. Lett. — 2005. — февр. — т. 94, вып. 4. — с. 046402. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.94.046402.

44. *Müller M., Pankov S.* Mean-field theory for the three-dimensional Coulomb glass // Phys. Rev. B. — 2007. — апр. — т. 75, вып. 14. — с. 144201. — DOI: 10.1103/PhysRevB.75.144201.

45. *Kulkarni M., Lamacraft A.* Finite-temperature dynamical structure factor of the one-dimensional Bose gas: From the Gross-Pitaevskii equation to the Kardar-Parisi-Zhang universality class of dynamical critical phenomena // Phys. Rev. A. — 2013. — авг. — т. 88, вып. 2. — с. 021603. — DOI: 10.1103/PhysRevA.88.021603.

46. *Poboiko I., Feigel'man M.* Thermal transport in disordered one-dimensional spin chains // Phys. Rev. B. — 2015. — дек. — т. 92, вып. 23. — с. 235448. — DOI: 10.1103/PhysRevB.92.235448.