*ТИЩУК Тетяна Володимирівна. Назва дисертаційної роботи: "СПІВІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ КУСКОВО-СТАЛИХ РОЗВ’ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ"*

*МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ*

*КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ*

*ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА*

*На правах рукопису*

*ТИЩУК Тетяна Володимирівна*

*УДК 517.9*

*СПІВІСНУВАННЯ*

*ПЕРІОДИЧНИХ КУСКОВО-СТАЛИХ РОЗВ’ЯЗКІВ*

*НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ*

*ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ*

*З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ*

*01.01.02 — диференціальні рівняння*

*Дисертація на здобуття наукового ступеня*

*кандидата фізико-математичних наук*

*Науковий керівник*

*Самойленко Валерій Григорович,*

*доктор фізико-математичних наук, професор*

*Київ — 2016*

*2*

*ЗМІСТ*

*Вступ 4*

*Розділ 1. Oгляд літератури 13*

*1.1. Висновки до першого розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . 24*

*Розділ 2. Унімодальні цикли неперервних відображень інтервалу 25*

*2.1. Моделі опуклої циклічної перестановки . . . . . . . . . . . . 27*

*2.2. Існування моделі опуклої циклічної перестановки . . . . . . 40*

*2.3. Вага опуклої циклічної перестановки . . . . . . . . . . . . . 55*

*2.4. Інтерпретація поняття ваги опуклої циклічної перестановки*

*з точки зору одновимірної динаміки . . . . . . . . . . . . . . 57*

*2.5. Доведення теореми 2.1.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62*

*2.6. Доведення твердження 2.1.3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65*

*2.7. Відношення лінійного порядку на множині опуклих циклічних перестановок . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 67*

*2.8. Висновки до другого розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72*

*Розділ 3. Періодичні кусково-сталі розв’язки нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку 74*

*3.1. Попередні зауваження з приводу розривних розв’язків деяких початкових задач . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77*

*3.2. Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайової задачі для лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними і нелінійною крайовою*

*умовою . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 81*

*3*

*3.3. Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з частинними похідними . . . . . . . . . . . . . . . . . 90*

*3.4. Приклад узагальненого періодичного розв’язку крайової задачі для симетричної гіперболічної системи двох рівнянь з*

*частинними похідними . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 102*

*3.5. Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з*

*частинними похідними з однаковими функціями у нелінійних крайових умовах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 104*

*3.6. Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайової задачі для симетричної гіперболічної системи рівнянь з*

*частинними похідними з різними функціями у нелінійних*

*крайових умовах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 110*

*3.7. Висновки до третього розділу . . . . . . . . . . . . . . . . . 117*

*Висновки 119*

*Список використаних джерел 120*

*4*

*ВСТУП*

*Актуальність теми*

*У даний час науковці-математики та спеціалісти з інших галузей знань*

*приділяють значну увагу дослідженню моделей об’єктів, функціонування яких пов’язано з передачею (отриманням) чи зберіганням інформації*

*у цифровому вигляді. Часто в якості феноменологічних моделей таких*

*об’єктів використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними і нелінійними крайовими умовами [76].*

*Такі нелінійні крайові задачі у випадку лінійних диференціальних рівнянь спеціальним чином редукуються до (нелінійних) різницевих рівнянь з*

*неперервним часом, вивчення яких проводиться за допомогою методів теорії одновимірних динамічних систем, що дає можливість дослідити властивості розглядуваних реальних динамічних процесів, від зовсім простих,*

*до хаотичних і навіть турбулентних, і тим самим отримати важливу інформацію про їх властивості.*

*На важливості дослідження подібних задач наголошує академік НАН*

*України Шарковський О.М., який зазначив таке: “Сведение краевых задач к разностным уравнениям позволяет осмыслить важные особенности*

*пространственно-временной эволюции реальных систем, в частности, понять, как зарождается и развивается каскадный процесс образования когерентных структур убывающих масштабов, почему в системе осуществляется переход к состоянию хаотического перемешивания, как со временем*

*может происходить стохастизация полностью детерминированной системы.” (передмова до книги Романенко Е.Ю. Разностные уравнения с непре-*

*5*

*рывным аргументом. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2014. –*

*347 с. [13]).*

*Крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними*

*похідними та нелінійними крайовими умовами плідно досліджуються у*

*відділі теорії динамічних систем Інституту математики НАН України, де*

*отримано низку фундаментальних результатів у цій галузі. Так, Шарковський О.М. і Романенко О.Ю. показали, що траєкторії розв’язків нелінійних крайових задач (у загальному випадку) можуть демонструвати дуже*

*складну поведінку, наприклад, володіти властивістю автостохастичності.*

*Шарковський О.М. і Сівак А.Г. розглянули класи нелінійних крайових задач, періодичні розв’язки яких мають ті ж самі якісні та кількісні універсальні біфуркаційні властивості, що й траєкторії відповідних одновимірних динамічних систем.*

*При цьому в якості початкових функцій у випадку згаданих крайових*

*задач розглядалися неперервно диференційовні функції. Природно виникає питання про вивчення властивостей розв’язків нелінійних крайових*

*задач зі сталими початковими умовами, наприклад, для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зауважимо, що такі задачі досі не досліджувалися, можливо тому, що не мають, взагалі кажучи, класичних розв’язків. Природно в якості їх розв’язків розглядати узагальнені*

*розв’язки.*

*Тому дослідження нелінійних крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є актуальною задачею, тим більше, що подібні крайові задачі можуть використовуватися в якості феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових періодичних*

*сигналів, які (математично) описуються кусково-сталими функціями [76].*

*Широкосмуговість згаданих генераторів вимагає від крайової задачі наявності у неї нескінченної множини “несхожих” один на одного періодичних*

*розв’язків, що для багатьох класів динамічних систем є ознакою хаотич-*

*6*

*ності системи, а отже певний інтерес становить задача про співіснування*

*узагальнених періодичних розв’язків згаданих вище нелінійних крайових*

*задач.*

*Як зазначено вище, при дослідженні нелінійних крайових задач суттєво використовується теорія одновимірних динамічних систем і, зокрема,*

*комбінаторна динаміка, які активно розвиваються з 60-их років ХХ-го століття. Фактично зародження комбінаторної динаміки, як розділу теорії динамічних систем, почалося з праць Шарковського О.М., який запропонував*

*розглядати новий тип взаємозв’язку між траєкторіями динамічної системи*

*– їх співіснування.*

*Одним з перших фундаментальних результатів в комбінаторній динаміці стала теорема, яка опублікована в 1964 році і яка в даний час широко*

*відома як теорема Шарковського, про співіснування циклів різних періодів*

*для неперервних відображень відрізка в себе [37]. З моменту опублікування цієї теореми інтерес до неї не згасає, про що свідчать численні публікації різних авторів, якими запропоновано нові варіанти її доведення, а також*

*аналоги та узагальнення даної теореми для різних класів відображень, фазових просторів і навіть для складніших структур, ніж цикл відображення*

*відрізка в себе.*

*У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами. Але, як відомо, відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду, а тому такої класифікації, взагалі кажучи,*

*недостатньо. Природно, крім класифікації циклів за періодами, розглядати їх класифікацію за типами (циклічними перестановками). Хоча у цьому*

*напрямі отримано цілу низки вагомих результатів у працях Шарковського О.М., Федоренка В.В., Alsedà L., Baldwin S., Llibre J., Misiurewicz M.*

*та інших, але питання про класифікацію циклів (деякого фіксованого періоду) неперервного відображення за їх типами є актуальним. Саме питання про співіснування циклів неперервного відображення відрізка в себе*

*7*

*не за періодом (як у теоремі Шарковського), а за запропонованим у дисертаційній роботі новим поняттям моделі типу циклу розглядається у даній*

*дисертації. Отримані результати щодо класифікації таких циклів суттєво*

*використовуються у даній дисертації при вивченні питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.*

*Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами*

*Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичної фізики механіко-математичного факультету Київського нацiонального унiверситету імені Тараса Шевченка в рамках державної бюджетної наукової теми № 11*

*БФ 038-04 “Варiацiйнi та асимптотичнi методи в задачах механiки суцiльних середовищ” (номер державної реєстрацiї 0111U004956).*

*Мета і задачі дослідження*

*Основною метою роботи є дослідження питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.*

*Об’єктом дослідження є крайові задачі для лінійних диференціальних*

*рівнянь першого порядку з частинними похідними.*

*Предметом дослідження є періодичні кусково-сталі розв’язки лінійних*

*диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.*

*Методи дослідження*

*У дисертації використано результати і методи теорії одновимірних динамічних систем, комбінаторної динаміки, диференціальних рівнянь з частинними похідними.*

*Наукова новизна одержаних результатів*

*Всі результати дисертаційної роботи є новими. У ній вперше:*

*8*

*– запропоновано поняття моделі типу циклу і поняття ваги моделі типу*

*циклу для неперервного відображення відрізка в себе, за допомогою яких*

*описано множину типів циклів, що має довільне неперервне відображення відрізку в себе з L-схемою, і встановлено співіснування унімодальних*

*циклів неперервного відображення відрізка в себе;*

*– запропоновано поняття узагальненого кусково-сталого періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими*

*умовами;*

*– запропоновано поняття типу узагальненого кусково-сталого n-періодичного розв’язку нелінійної крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку;*

*– для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (одного рівняння, системи двох рівнянь і систем 2n рівнянь)*

*з нелінійними крайовими умовами встановлено співіснування (за типами)*

*їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.*

*Практичне значення одержаних результатів*

*Результати дисертації мають теоретичний характер і можуть бути використані для побудови феноменологічних моделей широкосмугових генераторів цифрових сигналів. Вони також можуть використовуватися при*

*читанні спеціальних курсів з теорії диференціальних рівнянь, зокрема, теорії одновимірних динамічних систем.*

*Особистий внесок здобувача*

*Всі наукові результати дисертації, які виносяться на захист, отримані*

*здобувачем особисто. При формулюванні означення 2.3.1 і леми 2.4.1 використано результати статті Федоренка В.В. “Канонические периодические*

*траектории одномерных динамических систем” // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений, К.:*

*Ин-т математики АН УРСР, 1983, c. 106–109. У працях, які опубліковано*

*9*

*спільно з науковим керівником доктором фіз.-мат. наук, професором Самойленком В.Г., кандидатом фіз.-мат. наук, старшим науковим співробітником Федоренком В.В. і асистентом Федоренко Ю.В., Самойленку В.Г.*

*належить визначення напрямку дослiдження i постановка задач, а Федоренку В.В. та Федоренко Ю.В. – постійна участь у обговореннях отриманих результатів.*

*Апробація результатів дисертації*

*Результати дисертації неодноразово доповідалися на науковому семінарі “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики”*

*кафедри математичної фiзики Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка (керiвники: професор Мельник Т.А., професор Самойленко В.Г.; м. Київ, 2013, 2014, 2015), науковому семінарі кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського нацiонального унiверситету iменi Тараса Шевченка (керiвники: академік НАН України Самойленко А.М., академік НАН України Перестюк М.О.; м. Київ, 2015) та на міжнародних і всеукраїнських наукових конференціях:*

*– Міжнародна математична конференція “Диференціальні рівняння,*

*обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки” до 100-річчя від дня народження члена-кореспондента НАН України*

*Положого Г.М. (Київ, 2014).*

*– П’ятнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2014).*

*– Четверта міжнародна ганська конференція присвячена 135 річниці від*

*дня народження Ганса Гана (Чернівці, 2014).*

*– Сьома міжнародна конференція імені Ляшка І.І. (Київ, 2014).*

*– Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного*

*моделювання та обчислювальних методів” (Рівне, 2015).*

*10*

*– Third International Conference on memory of corresponding member of*

*National Academy of Science of Ukraine Melnik V.S. “Nonlinear analysis and*

*applications” (Kyiv, 2015).*

*– Шістнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука (Київ, 2015).*

*Публікації*

*Основні результати роботи опубліковано в 6 статтях у виданнях, що*

*входять до переліку наукових фахових видань МОН України, серед яких*

*1 стаття в зарубіжному виданні, та 7 тезах доповідей міжнародних конференцій.*

*Структура дисертації*

*Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків*

*та переліку використаних джерел. Обсяг дисертаційної роботи становить*

*129 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел містить*

*86 найменувань і займає 10 сторінок.*

*У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, сформульовано мету і завдання дослідження, наведено результати, які визначають наукову новизну роботи, викладено основні результати та описано*

*структуру дисертаційної роботи.*

*Перший розділ дисертаційної роботи присвячено огляду літератури за*

*темою дисертації. Розкрито історію питань, пов’язаних з тематикою роботи, та подано огляд основних праць з теми дисертації.*

*Другий розділ дисертаційного дослідження присвячено вивченню унімодальних циклів неперервних відображень інтервалу в себе. Тут запропоновано класифікацію унімодальних циклів одновимірних неперервних*

*відображень відрізка в себе за моделлю типу циклу. Дано означення моделі типу циклу та ваги моделі типу циклу, які використовуються для опису унімодальних циклів неперервного відображення. Визначено множину*

*типів циклів, яку має будь-яке неперервне відображення відрізка в себе,*

*11*

*що містить L-схему. На множині опуклих циклічних перестановок описано відношення лінійного порядку, що індукується вагою опуклої циклічної*

*перестановки.*

*Отримані результати щодо класифікації унімодальних циклів суттєво*

*використовуються у даній дисертації при вивченні питання про співіснування узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку з нелінійними крайовими умовами.*

*У третьому розділі розглянуто нелінійні крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними та досліджено питання про співіснування їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.*

*Дослідження таких узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків здійснено шляхом зведення крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними до відповідного різницевого рівняння*

*з неперервним часом, причому крайові умови та початкові дані забезпечують редукцію отриманого різницевого рівняння до неперервного відображення інтервалу.*

*Співіснування узагальнених періодичних розв’язків крайових задач*

*встановлено не за періодами, як у теоремі Шарковського при вивченні питання про співіснування циклів одновимірного відображення відрізка в себе, а за спеціальним чином вибраними типами цих узагальнених періодичних розв’язків.*

*Для лінійного диференціального рівняння з частинними похідними*

*першого порядку, для системи двох лінійних диференціальних рівнянь з*

*частинними похідними першого порядку та для систем 2n лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку, встановлено співіснування (за типами) їх узагальнених кусково-сталих періодичних розв’язків.*

*12*

*Після кожного з розділів дисертаційної роботи сформульовано висновки, а наприкінці основного тексту дисертації – висновки до дисертаційного*

*дослідження в цілому.*

*Автор щиро вдячна академіку НАН України Шарковському Олександру Миколайовичу за формулювання проблем, що пов’язані з вивченням*

*нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методами теорії одновимірних динамічних систем, та своєму науковому керівникові доктору фізико-математичних наук, професору Самойленку Валерію Григоровичу за постійну увагу, поради та підтримку при*

*роботі над дисертацією.*

ВИСНОВКИ

Дисертаційнароботаприсвяченавивченнюперіодичнихкусковосталихрозв’язківнелінійнихкрайовихзадачдлялінійногодиференціальногорівняннязчастиннимипохіднимипершогопорядкуідлясистемлінійнихдиференціальнихрівняньзчастиннимипохіднимипершогопорядкутадослідженнюпитанняпроїхспівіснування

Запропонованопоняттямоделітипуциклуіпоняттявагимоделітипу

циклудлянеперервноговідображеннявідрізкавсебезадопомогоюяких

описаномножинутипівциклівщомаєдовільненеперервневідображеннявідрізкувсебезсхемоюівстановленоспівіснуванняунімодальних

циклівнеперервноговідображеннявідрізкавсебеТакожзапропонованопоняттяузагальненогокусковосталогоперіодичногорозв’язкунелінійноїкрайовоїзадачідлялінійнихдиференціальнихрівняньзчастиннимипохіднимипершогопорядкузнелінійнимикрайовимиумовамитапоняттятипуузагальненогокусковосталогоперіодичногорозв’язкунелінійноїкрайовоїзадачідлялінійнихдиференціальнихрівняньзчастиннимипохіднимипершогопорядкуДлялінійногодиференціальногорівняннязчастиннимипохіднимипершогопорядкудлясистемидвохлінійнихдиференціальнихрівняньзчастиннимипохіднимипершогопорядку

тадлясистемлінійнихдиференціальнихрівняньзчастиннимипохіднимипершогопорядкувстановленоспівіснуваннязатипамиїхузагальненихкусковосталихперіодичнихрозв’язків

Доведеніудисертаціїтвердженнядоповнюютьірозширюютьіснуючі

результатизякісноїтеоріїдиференціальнихрівняньіможутьбутивикористанимидляподальшогоїїрозвитку