Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Злотников Илья Константинович

# Идеалы алгебры ограниченных аналитических функций: интерполяция и уравнение Безу

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2019

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Научный руководитель:

КИСЛЯКОВ Сергей Витальевич,
доктор физико–математических наук, академик РАН,
директор ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

ШАМОЯН Файзо Агитович,
доктор физико–математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,

КОМЛОВ Александр Владимирович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

Защита состоится ________ ____________________ в ________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.r

Автореферат разослан ________ ____________________ 2019 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-
математических наук А. Ю. Зайцев

# Общая характеристика работы

## Цели и задачи диссертационной работы

Данная диссертация посвящена решению некоторых задач гармонического и комплексного анализа. В работе изучаются свойства идеалов алгебры ограниченных аналитических функций.

В первой части диссертации исследуются вопросы вещественной интерполяции пространств, образованных в результате пересечения идеалов, а в более общей ситуации — модулей над замкнутыми в $w^*$-топологии подалгебрами алгебры $L^\infty(\mu)$. В качестве примера пространств, для которых методы этой работы дают интерполяционные результаты (частично новые, частично известные) можно привести пространства, коинвариантные относительно действия оператора сдвига, и пространства Харди на двумерном торе. В процессе исследования изучаются возможности применения модификаций двух методов, ставших стандартными в теории вещественной интерполяции. Эти методы — разложение Кальдерона–Зигмунда и аналитические срезающие функции. Также в первой части работы изучается вещественная интерполяция *весовых* пространств, коинвариантных относительно оператора сдвига.

Вторая часть диссертации посвящена решению задачи об идеалах (или уравнения Безу) для ограниченных аналитических функций, принимающих значения в банаховой решётке последовательностей, удовлетворяющей некоторым дополнительным ограничениям. Примером такой решётки может служить пространство $l^p$ при $p \in [1, \infty)$.

## Актуальность работы

При изучении вопросов вещественной интерполяции различных пространств оказалось очень удобным понятие $K$-замкнутости.

Подпару $(F_0, F_1)$ пары $(X_0, X_1)$ совместимых квазибанаховых пространств называют $K$-замкнутой, если существует такая универсальная постоянная $C$, что для всякого элемента $f$, лежащего в пространстве $F_0 + F_1$, и представления $f = x_0 + x_1$, где $x_i \in X_i$, найдётся такое представление $f = f_0 + f_1$, где $f_i \in F_i$, что выполняются оценки $\|f_i\|_{F_i} \le C\|x_i\|_{X_i}$.

Стоит отметить, что информация о $K$-замкнутости подпары подпространств помогает распространить на них интерполяционные утверждения, если такие утверждения известны для исходной пары пространств. Например, для $K$-замкнутых пар можно легко вычислить вещественные интерполяционные пространства (громоздкое определение см., например, в [8]) по формуле

$$(F_0, F_1)_{\alpha,r} = (F_0 + F_1) \cap (X_0, X_1)_{\alpha,r}.$$

Вопросы интерполяции давно исследовались для различных функциональных пространств. В этой связи следует особо выделить классы Харди (которые в дальнейшем обозначены через $H^p$), интерполяционные свойства которых исследовали такие математики, как П. Джонс, Ж. Пизье, Ж. Бургейн, С.В. Кисляков, Ч. Фефферман, К. Шу и другие, см. [18], [6], [12], [28], [9]. Для пространств Харди на единичной окружности $\mathbb{T}$ справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пара $(H^p(\mathbb{T}), H^q(\mathbb{T}))$ $K$-замкнута в паре $(L^p(\mathbb{T}), L^q(\mathbb{T}))$ при $1 \le p < q \le \infty$.*

Следует отметить, что для показателей $1 < p, q < \infty$ утверждение теоремы очевидно в виду ограниченности проектора $\mathbb{P} : L^r \to H^r$ для $1 < r < \infty$. Таким образом, теорема 1 нетривиальна, когда либо $p = 1$, либо $q = \infty$. Существуют по крайней мере три различных подхода к доказательству этой теоремы, каждый из которых применим при некоторых ограничениях на значения параметров $p$ и $q$. Первый подход принадлежит Ж. Бургейну и основан на применении разложения Кальдерона–Зигмунда. В основе подхода С.В. Кислякова лежит построение подходящей аналитической срезающей функции. Метод Ж. Пизье существенно использует алгебраическую структуру пространств Харди (следует отметить, что этот метод позволяет установить $K$-замкнутость пространств Харди на единичной окружности для показателей, меньших 1, однако эта тема лежит несколько в стороне от вопросов, изучаемых в этой диссертации). Все эти способы доказательства теоремы 1 подробно изложены в обзоре [18]. В этой диссертации методы С.В. Кислякова и Ж. Бургейна удаётся применить для получения интерполяционных теорем для пространств, имеющих более сложную (с точки зрения теории интерполяции) структуру.

Задача становится сложнее с повышением размерности. Как обычно, пространство $H^p(\mathbb{T}^2)$ определяется как замыкание линейной оболочки мономов $z_1^k z_2^m$, где $k$ и $m$ — неотрицательные целые числа. При $p = \infty$ замыкание берётся в слабой топологии. С.В. Кисляков и К.Шу в работе [6] доказали следующую теорему о $K$-замкнутости пары пространств Харди на двумерном торе $\mathbb{T}^2$.

**Теорема 2.** *Пусть $p > 1$. Тогда пара пространств $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$ $K$-замкнута в паре пространств $(H^p(\mathbb{T}^2), H^\infty(\mathbb{T}^2))$.*

Ранее в статье [28] К. Шу показал, что пара $(H^1(\mathbb{T}^2), H^p(\mathbb{T}^2))$ $K$-замкнута в паре $(L^1(\mathbb{T}^2), L^p(\mathbb{T}^2))$ для $1 < p < \infty$. Более того, последнее утверждение остаётся справедливым и для пространств Харди на $\mathbb{T}^n$ с $3 \le n < \infty$. Однако, на сегодняшний момент неизвестно, справедлив ли аналог теоремы 2 для пространств Харди на $n$-мерном торе с $n \ge 3$. Эти и другие интерполяционные результаты для различных пространств применяются при решении широкого класса задач гармонического, комплексного и функционального анализа.

Результаты первой части диссертации продолжают предыдущие исследования в этой области. В работе рассматриваются пространства, образованные в результате пересечений двух модулей (или модуля и пространства, при дополнительных ограничениях) над некоторыми подалгебрами алгебры $L^\infty$. Точная формулировка основной теоремы первой части диссертации достаточно громоздка, поэтому в этом разделе для обсуждения актуальности мы ограничимся её общей схемой и некоторыми интересными частными случаями.

Пусть $(X, \mu)$ — пространство с конечной мерой, $C$ — подпространство в $L^\infty(X, \mu)$, $B$ — подалгебра алгебры $L^\infty(X, \mu)$. Пусть $D$ — модуль над алгеброй $B$, который, в свою очередь, тоже вложен в пространство $L^\infty(X, \mu)$. Пусть ещё $p > 1$, а $q$ — сопряжённый с $p$ показатель. Пара $(\mathrm{clos}_{L^p}(C \cap D), C \cap D)$ K-замкнута в паре $(L^p(X, \mu), L^\infty(X, \mu))$, если $A, B, C, D$ удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Эти требования к алгебрам и модулям (иногда к подпространствам) можно проверить для некоторых интересных примеров. Например, если положить $B = H^\infty(\mathbb{T}^2)$, а в качестве $C$ и $D$ взять подпространства $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, состоящие из функций аналитических по первой и второй переменной соответственно, то получается, что из основной теоремы первой части этой работы следует теорема 2.

Вторым интересным (и новым) примером служат пространства, коинвариантные относительно сдвига (другое название: модельные пространства).

Пусть $\theta$ — внутренняя функция на $\mathbb{T}$, то есть $\theta \in H^\infty(\mathbb{T})$ и $|\theta(z)| = 1$ для п.в. $z \in \mathbb{T}$. Для $1 \le p \le \infty$ положим

$$K_\theta^p = H^p(\mathbb{T}) \cap (\theta \overline{H_0^p}(\mathbb{T})),$$

где под чертой понимаем обычную операцию комплексного сопряжения, а под $H^p_0(\mathbb{T})$ следует понимать пространство $\{f \in H^p(\mathbb{T}) : \hat{f}(0) = 0\}$.

Знаменитая теорема Бёрлинга утверждает, что подпространство в $H^2(\mathbb{T})$, инвариантное относительно оператора обратного сдвига, можно представить в виде $K^2_\theta$ для некоторой внутренней функции $\theta$. На самом деле, и при $1 \le p < \infty$ коинвариантные подпространства оператора сдвига представляются в виде пространств $K^p_\theta$ (см., например, статью [11] или книгу [21]). Подобные пространства возникают во многих задачах современного анализа. В качестве примера можно привести функциональную модель Надя–Фойяша для операторов сжатия в гильбертовых пространствах (см. [20] и [21]). Другое применение пространств $K^p_\theta$ можно найти в задачах, связанных с теоремой Бёрлинга–Мальявена (см. [2] и приведённые там ссылки).

Изучение интерполяционных свойств пространств $K^p_\theta$ представляется актуальным. В диссертации установлена $K$-замкнутость пары пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ в паре $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ при $p > 1$.

Отдельный интерес в теории интерполяции вызывают случаи пространств с весом. В дальнейшем предполагается, что *вес* — это неотрицательная функция на окружности с суммируемым логарифмом.

Пусть $(S, \mu)$ — пространство с мерой, $w$ — вес, а $p$ — параметр, $p \in [1; \infty]$. Весовые пространства $L^p(w)$ можно определить, указав норму в этих пространствах: $\|f\|_{L^p(w)} = \int\limits_S |f|^p w d\mu$, в случае $p < \infty$; $\|f\|_{L^\infty(w)} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_S \frac{|f|}{w}$. Такое определение соответствует терминологии статьи [1]. Такая система обозначений не вполне универсальна, и в некоторых источниках норма определяется иным образом ($\|f\|_{L^p(w)} = \int |fw|^p d\mu$ и $\|f\|_{L^\infty(w)} = \|fw\|_{L^\infty}$), что следует учитывать при изучении теорем в этих источниках. Для пространств $H^p$ и $K^p_\theta$ можно определить весовые аналоги. Пусть $u$ — вес, а $s \in (0, +\infty]$. Пространство $H^s(u)$ определяется как пересечение граничного класса Смирнова с пространством $L^s(u)$, то есть это по-прежнему аналитические функции, лежащие в соответствующем весовом пространстве. В свою очередь, пространство $K^s_\theta(u)$ определяется формулой $K^s_\theta(u) = H^s(u) \cap \theta\overline{H^s(u)}$. Аналогично определяются пространства $H^{p,q}(u)$ и $K^{p,q}(u)$, снабжённые нормой из пространства Лоренца $L^{p,q}(u)$. Классы Макенхаупта в дальнейшем обозначены через $A_p$.

Как уже отмечалось, в теории интерполяции много внимания уделяется случаю простстранств с весом. Классические интерполяционные теоремы для пространств Лебега и Лоренца с весами можно найти в книге [8]. Для весовых пространств Харди в работе [15] С.В. Кисляков и К. Шу установили необходимые и достаточные условия $K$-замкнутости пары $(H^p(w_0), H^q(w_1))$ в паре $(L^p(w_0), L^q(w_1))$. В случае конечных показателей $p$ и $q$ это условие принимает вид: $\log(w_0^{1/p} w_1^{-1/q}) \in BMO$. Если $q = \infty$, то это условие переписывается в виде $\log(w_0^{1/p} w_1) \in BMO$. Наконец, в случае $p = q = \infty$ пара $(H^\infty(w_0), H^\infty(w_1))$ $K$-замкнута в паре $(L^\infty(w_0), L^\infty(w_1))$ тогда и только тогда, когда $\log(w_0^{-1} w_1) \in BMO$. Таким образом, получение интерполяционных теорем для модельных пространств с весом актуально. Для пространств, коинвариантных относительно сдвига, а тем более для пересечения модулей над алгебрами, подобные вышеописанным необходимые и достаточные условия получить пока не удаётся. Однако, в диссертации удалось установить $K$-замкнутость для некоторых пар модельных пространств с весами и показателями, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям. Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Найдётся число $r'$, которое зависит от весов $a$ и $w$ такое, что для всякого числа $q > r'$ пара $(K^q_\theta(aw^{-q}), K^\infty_\theta(w))$ К-замкнута в паре $(L^q(aw^{-q}), L^\infty(w))$.

Вторая часть этой диссертации посвящена решению задач об идеалах для функций, принимающих значения в некоторых банаховых решётках последовательностей.

Пусть $(S, \mu)$ — пространство с мерой, а $X$ — некоторое линейное пространство измеримых функций на $S$, снабжённое полной квазинормой $\|\cdot\|$. Говорят, что $X$ — решётка измеримых функций, если выполняется следующее свойство. Пусть функция $g$ измерима и найдётся такая функция $f$ из пространства $X$, что почти всюду справедлива оценка $|g| \leq |f|$, тогда $g \in X$ и $\|g\|_X \leq \|f\|_X$. Решётка $X$ называется банаховой, если её квазинорма является нормой (более общим образом, если такая ситуация возникает после перенормировки).

В связи с ограничениями на объём автореферата здесь не приведены некоторые важные определения: произведения решёток, степени решётки, $q$-вогнутости или $p$-выпуклости решётки, понятия сопряжённой решётки к решётке $X$ (которое в дальнейшем обозначено через $X'$), понятия порядковой непрерывности и свойства Фату. Эти определения и множество интересных фактов из теории решёток можно найти в книгах [3] и [19].

Задача об идеалах тесно связана с теоремой о короне. Классическая проблема короны была сформулирована в 1941 году С. Какутани и возникла при изучении пространства максимальных идеалов алгебры $H^\infty$. Л. Карлесон в работе [10] решил её, доказав следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть функции $f_1, \ldots, f_n$ принадлежат классу $H^\infty(\mathbb{D})$ и пусть $\delta > 0$. Если выполняются условия*

$$\sum_{j=1}^{n} |f_j(z)| \geq \delta \ \text{и} \ \|f_j\|_{H^\infty} \leq 1 \ \text{при} \ 1 \leq j \leq n,$$

*то найдутся такие функции $g_1, \ldots, g_n$ из класса $H^\infty(\mathbb{D})$, что*

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) g_j(z) = 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

*при этом $\|g_j\|_{H^\infty} \leq C(\delta, n)$.*

Следует отметить зависимость от $n$ в последнем неравенстве. Т. Вольф в 1979 году предложил другой подход к доказательству теоремы о короне, который был основан на идее Л. Хёрмандера, сводившей исходную проблему к решению $\overline{\partial}$ задачи. Доказательство Вольфа удалось обобщить на случай бесконечной размерности. Для лаконичности изложения требуется следующее определение.

**Определение 1.** *Пусть $X$ — банахова решётка последовательностей на множестве $\mathbb{N}$. Говорят, что для решётки $X$ справедлива теорема о короне, если выполняется следующее утверждение. Для параметра $\delta > 0$ и любой векторнозначной функции $f$ из класса $H^\infty(\mathbb{D}; X)$, удовлетворяющих условиям*

$$\delta \leq \|f(z)\|_X \leq 1, \quad z \in \mathbb{D},$$

*можно найти такую векторнозначную функцию $g$ из класса $H^\infty(\mathbb{D}; X')$, что выполняется:*

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i) g(z,i) = \langle f(z), g(z) \rangle, \quad z \in \mathbb{D},$$

*при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ контролируется константой $C_{X,\delta}$, зависящей только от параметра $\delta$ и решётки $X$.*

В этой связи отметим работы В. А. Толоконникова [7] и А. Учиямы [27]. В статье последнего одним из интересных полученных результатов была теорема о короне в случае пространства $X = l^\infty$. Следует отметить, что рассуждение Учиямы находится на том же уровне сложности, что и рассуждение Карлесона. С. В. Кисляков и Д. В. Руцкий показали в статье [4], что теорема о короне справедлива для пространств $l^p$ для $2 \le p < \infty$. Используя интерполяционный метод, Кисляков в работе [5] установил справедливость теоремы о короне для всех пространств $l^p$ (и даже для всех $q$-вогнутых решёток, удовлетворяющих дополнительному интерполяционному требованию $BMO$-регулярности). В работе [23] Д. В. Руцкому с помощью теоремы Какутани о неподвижной точке удалось показать, что теорема о короне справедлива для всех порядково непрерывных решёток последовательностей. Изначально в основе его доказательства лежал результат Учиямы для пространства $l^\infty$, однако оно применимо и в случае, если в качестве базового результата взять рассуждение Вольфа для пространства $l^2$ (при этом возникнут некоторые ограничения на участвующие решётки). Недавнее простое рассуждение, принадлежащее С.В. Кислякову, позволяет обобщить теорему о короне на произвольные решётки последовательностей, если предположить, что теорема Учиямы доказана.

Ниже приведена точная формулировка задачи об идеалах.

**Определение 2.** *Пусть $X$ — банахова решётка последовательностей с областью задания на множестве $\mathbb{N}$. Говорят, что для решётки $X$ разрешима задача об идеалах с показателем $\alpha$ и оценкой $C_{X,\alpha}$, если справедливо следующее утверждение. Для всякой функции $h$ из класса $H^\infty(\mathbb{D})$ и векторнозначной функции $f$ из класса $H^\infty(\mathbb{D};X)$, удовлетворяющих условиям*

$$|h(z)| \le \|f(z)\|_X^\alpha \le 1,$$

*для всех $z$ из круга $\mathbb{D}$ и некоторого фиксированного параметра $\alpha$, можно найти такую векторнозначную функцию $g$ из класса $H^\infty(\mathbb{D};X')$, что выполняется равенство*

$$h(z) = \sum_{i=1}^{\infty} f(z,i)g(z,i) = \langle f(z), g(z)\rangle, \;\; z \in \mathbb{D},$$

*при этом величина $\|g\|_{H^\infty(\mathbb{D};X')}$ контролируется константой $C_{X,\alpha}$, зависящей только от параметра $\alpha$ и решётки $X$.*

Вообще говоря, название задачи об идеалах может ввести читателя в заблуждение. Очевидно, что если функция $h \in H^\infty$ лежит в идеале, порождённом функциями $f_1, .., f_k \in H^\infty$, то выполняется оценка $|h(z)| \le C \sum\limits_{j=1}^{k} |f_j(z)|$, $z \in \mathbb{D}$. Суть задачи об идеалах можно свести к вопросу: в какой мере можно обратить это утверждение?

Вслед за описанными выше результатами для теоремы о короне, полученными методом Вольфа, в этой задаче тоже стали рассматривать бесконечные наборы функций $\{f_j\}$. Тогда термин "задача об идеалах", строго говоря, утрачивает буквальный смысл, однако всё равно употребляется. Более того, следует обратить особое внимание на показатель $\alpha$ в определении 2. Поиск оптимального показателя, с которым разрешима задача об идеалах, — предмет отдельного исследования (см. [25] и [26]).

В упомянутой выше статье Толоконникова [7] было показано, что задача об идеалах разрешима для пространства $l^2$. Стоит отметить, что в отличие от теоремы о короне, в задаче об идеалах функция $f$ может обращаться в 0 в некоторых точках $z$, и это существенно усложняет некоторые рассуждения. Естественным образом возникает вопрос: для каких решёток последовательностей задача об идеалах разрешима?

В этой диссертации удалось установить, что задача об идеалах разрешима для $q$-вогнутых решёток последовательностей со свойством Фату, в частности для пространств $l^p$ при $p \in [1, \infty)$.

Таким образом, задачи

- о $K$-замкнутости пары пространств, образованных в результате пересечения двух модулей (или модуля и подпространства) над некоторыми подалгебрами алгебры $L^\infty(X, \mu)$ в паре $(L^p(X, \mu), L^\infty(X, \mu))$, при некоторых дополнительных ограничениях на модули и алгебры и конечном $p > 1$;
- о $K$-замкнутости пары $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ в паре $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ при $p > 1$;
- о $K$-замкнутости пары пространств, коинвариантных относительно сдвига, с весами;
- об идеалах для функций со значениями в различных решётках последовательностей,

представляются актуальными.

## Научная новизна

Все основные результаты диссертации — новые.

## Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы при решении задач теории интерполяции, вопросов, связанных с теоремой Бёрлинга–Мальявена, теоремой о короне или задачей об идеалах, при изучении структуры алгебры ограниченных аналитических функций, а также в теории модельных пространств.

## Методы исследования

В работе применяется множество методов вещественного, комплексного и функционального анализа. В первой части диссертации стоит выделить разложение Кальдерона-Зигмунда, которое в своё время использовал Ж.Бургейн (см. [9] и [18]) при решении интерполяционных задач для классов Харди. Один из аналогов этого разложения был получен для случая весовых пространств в работе [1] С.В. Кисляковым и Д.С Анисимовым . Этот инструмент оказался очень удобным при решении задач, связанных с весовыми пространствами $K^p_\theta$ в первой части работы. Другой метод в теории вещественной интерполяции был предложен С.В. Кисляковым, см. обзор [18]. Он основан на применении так называемых аналитических срезающих функций. В данной работе с помощью этого метода удаётся получить некоторые новые разложения в случаях, когда разложение Кальдерона–Зигмунда недоступно, и исследовать интерполяционные свойства широкого класса пространств, образованных в результате пересечения модулей над $w^*$-замкнутыми подалгебрами алгебры $L^\infty(\mu)$. В процессе доказательства теорем во второй части диссертации главным инструментом служит метод Д.В. Руцкого, в основе которого лежит теорема Какутани о неподвижной точке.

### Степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Отметим также, что результаты работы были доложены на различных семинарах по вещественному, комплексному и гармоническому анализу: Санкт-Петербургский семинар по теории операторов и теории функций и аналитический семинар лаборатории Чебышёва.

### Публикации и личный вклад автора

Материалы диссертации опубликованы в работах [Z1], [Z2], [KZ], [16], из них 3 статьи ( [Z1], [Z2], [KZ]) напечатаны в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК, в то время как статья [16] является препринтом.

Статья [KZ] и препринт [16] написаны в соавторстве с С.В. Кисляковым. По мнению соавторов, их вклад в эти работы равный.

### Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, и библиографии. Общий объем диссертации составляет 86 страниц. Библиография содержит 44 наименования, в число которых включены 4 работы автора по теме диссертации.

## Содержание работы

### Первая глава

В первой главе (она же введение) обосновывается актуальность диссертации, формулируются цели работы, аргументируется научная новизна проведённых исследований, обосновывается теоретическая значимость полученных результатов. Кроме того, приводятся формулировки основных теорем и положений, выносимых на защиту, снабжённые необходимыми для понимания определениями.

### Вторая глава

Прежде, чем подробно описать структуру второй главы, мы сформулируем доказанные в ней утверждения. Для формулировки основной теоремы второй главы понадобятся следующие определения и обозначения. Пусть $(X, \mu)$ — пространство с конечной мерой. Пусть $\mathcal{E}$ — $w^*$-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(\mu)$, содержащая константы, и пусть $p$ — конечное число, строго большее единицы. В диссертации рассматриваются алгебры, удовлетворяющие следующему требованию.

**Условие** $(\alpha_p)$. Для всякой положительной функции $u$, принадлежащей пространству $L^p(X, \mu)$, найдётся такая последовательность функций $\{w_n\}_0^\infty$, принадлежащих алгебре $\mathcal{E}$

и таких, что

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad \operatorname{Re} w_n \geq 0,\\
&\text{(ii)} \quad \operatorname{Re} w_n \text{ слабо сходятся к } u \text{ в } L^p(\mu),\\
&\text{(iii)} \quad \|w_n\|_{L^p} \leq C\|u\|_{L^p},
\end{aligned}
$$

с постоянной $C$, которая может зависеть только от параметра $p$.

Для лаконичности записи будут использованы следующие обозначения для аннуляторов, замыканий и пересечений с пространством $L^p(\mu)$. Пусть $(X,\mu)$ — пространство с конечной мерой, а $\mathcal{F}$ — подпространство пространства $L^\infty(X,\mu)$. Аннулятор пространства $\mathcal{F}$ в пространстве $L^1(\mu)$ будет обозначен через $\mathcal{F}^\perp$. Он определяется формулой:

$$\mathcal{F}^\perp = \{h \in L^1(\mu)\colon \int\limits_X f\overline{h}\, d\mu = 0 \text{ для всех } f \in \mathcal{F}\}.$$

Пусть $p \in [1,\infty]$. Через $\mathcal{F}_p$ будет обозначено замыкание пространства $\mathcal{F}$ в пространстве $L^p(X,\mu)$. Наконец, пусть $\mathcal{E}^p = L^p(X,\mu) \cap \mathcal{E}$ для $\mathcal{E} \subset L^1(\mu)$.

Разложение Кальдерона–Зигмунда — классический и хорошо известный результат гармонического анализа. Для полноты изложения ниже приведена точная формулировка.

**Разложение Кальдерона–Зигмунда.** *Пусть $(X,\mu)$ пространство с конечной мерой. Мы будем говорить, что оператор $P$, действующий из пространства $L^1(\mu)$ в пространство $\mu$-измеримых функций, допускает разложение Кальдерона–Зигмунда, если для любых $g \in L^1(X,\mu)$ и $\lambda > 0$ найдутся такие функции $g_0$ и $g_1$, а также множество $E$, обладающие следующими свойствами:*

$$
\begin{aligned}
&\text{(CZ1)} \quad g_0 \in L^\infty(\mu), \quad |g_0| \leq C\lambda;\\
&\text{(CZ2)} \quad g_1 \in L^1(\mu), \quad \|g_1\|_{L^1} \leq C\|g\|_{L^1(\mu)}, \quad \|g_0\|_{L^1} \leq C\|g\|_{L^1(\mu)};\\
&\text{(CZ3)} \quad \int\limits_{X\setminus E} |Pg_1|\, d\mu \leq C\|g_1\|_{L^1};\\
&\text{(CZ4)} \quad \mu(E) \leq \frac{C}{\lambda}\|g\|_{L^1(\mu)}.
\end{aligned}
$$

Хорошо известно, что такие разложения справедливы для сингулярных интегральных операторов, в частности, для проектора Рисса и преобразования Гильберта. Более подробно о разложении Кальдерона–Зигмунда см. книги [24] или [14].

Ниже полностью сформулирована основная теорема второй главы.

**Теорема 4.** *Пусть $(X,\mu)$ — пространство с конечной мерой, $C$ — подпространство в $L^\infty(X,\mu)$, $B$ — $w^*$-замкнутая подалгебра алгебры $L^\infty(X,\mu)$, удовлетворяющая условию $(\alpha_p)$. Пусть $D$ — модуль над алгеброй $B$, который, в свою очередь, тоже вложен в пространство $L^\infty(X,\mu)$. Пусть ещё $p > 1$, а $q$ — сопряжённый с $p$ показатель. Предположим также, что существует проектор $P$, отображающий пространство $L^q(\mu)$ на $C^{\perp,q}$ и обладающий слабым типом $(1,1)$, и при этом справедливо включение: $P(D^{\perp,q}) \subset D^{\perp,q}$. Тогда пара $(C_p \cap D_p, C \cap D)$ $K$-замкнута в паре $(L^p(X,\mu), L^\infty(X,\mu))$, если дополнительно выполняется одно из следующих условий.*

I. *Для проектора $P$ справедливо разложение Кальдерона–Зигмунда.*

II. *Пространство $C$ образует модуль над некоторой подалгеброй $A$ алгебры $L^\infty(\mu)$. Кроме того, алгебра $A$ тоже удовлетворяет условию $(\alpha_p)$.*

Следующая теорема является прямым следствием теоремы 4.

**Теорема 5.** *Пусть $p \in (1, +\infty)$. Тогда пара пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ $K$-замкнута в паре пространств $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$.*

Следует отметить, что пока не удаётся доказать $K$-замкнутость для пространств, коинвариантных относительно сдвига, в случае, когда $p = 1$. Однако, для показателей, близких к 1, можно получить некоторый результат в терминах вещественных интерполяционных пространств.

**Теорема 6.** *Пусть $p_1 \in (1, \infty)$, $0 < r < 1$. Положим $p = \frac{p_1}{p_1 + r - rp_1}$. Справедливо равенство*

$$(K^{1,\infty}_\theta, K^{p_1}_\theta)_{r,p} = K^p_\theta.$$

**Теорема 7.** *Пусть $a \in A_\infty, w \in A_1$. Найдётся число $r'$, которое соответствует весам $a$ и $w$ такое, что для всякого числа $q > r'$ пара $(K^q_\theta(aw^{-q}), K^\infty_\theta(w))$ $K$-замкнута в паре $(L^q(aw^{-q}), L^\infty(w))$.*

Вторая глава состоит из 12 разделов. Ниже приведено описание структуры второй главы.

В разделе 2.1 приведены определения и некоторые необходимые для дальнейших рассуждений свойства пространств Харди и пространств, коинвариантных относительно действия оператора сдвига, и их весовых аналогов.

В раздел 2.2 вынесены некоторые общие факты из теории вещественной интерполяции, необходимые для последовательного изложения полученных результатов. В частности, приведено определение вещественного интерполяционного пространства, его связь с уже упоминавшимся понятием $K$-замкнутости, а также формулировки классических теорем об интерполяции пространств Лоренца и Лебега, которые будут нужны для изучения вещественных интерполяционных пространств, соответствующих пространствам $K^p_\theta$.

Далее в разделе 2.4 и 2.6 приведены некоторые методы решения интерполяционных задач: разложение Кальдерона–Зигмунда для сингулярных интегральных операторов и его весовой аналог, а также метод построения срезающей аналитической функции. Оба этих метода применены при доказательстве основной теоремы. Разложение Кальдерона–Зигмунда будет основным при доказательстве теоремы 4 с условием (I) и теоремы 7 об интерполяции весовых модельных пространств.

Метод срезающих функций в этой диссертационной работе играет одну из ключевых ролей. Как ясно из уже сказанного, рассматриваются не только срезающие аналитические функции, но и функции, принадлежащие подалгебрам алгебры $L^\infty(\mu)$, которые обладают некоторыми дополнительными свойствами, включающими условие $(\alpha_p)$. В разделе 2.5 обсуждается условие $(\alpha_p)$, затем приведён простой пример применения аналитических срезающих функций при доказательстве $K$-замкнутости классических пространств Харди. Далее приведено доказательство важной леммы о свойствах срезающих функций, принадлежащих подалгебрам алгебры $L^\infty(\mu)$. В разделе 2.7 построены новые разложения, которые заменят разложения Кальдерона–Зигмунда в тех случаях, когда они недоступны. Разложения Кальдерона–Зигмунда и разложение с помощью срезающих функций в разделе 2.8

объединены в одно общее разложение, которое и будет применено при доказательстве теоремы 4.

Как уже отмечалось, громоздким требованиям в формулировке теоремы 1 удовлетворяют многие модули и алгебры, и в разделе 2.9 мы покажем некоторые примеры её применения. В частности, будет доказана теорема 5 для модельных пространств, а также передоказана теорема об интерполяции пространств Харди на двумерном торе.

Далее будет доказана теорема 4. В двух последних разделах этой главы будет продолжено изучение интерполяционных свойств модельных пространств и их весовых аналогов, а также доказаны теоремы 6 и 7.

## Третья глава

В начале этого раздела приведены формулировки основных теорем третьей главы, а затем описана её структура.

**Теорема 8.** *Пусть $p \in [1, \infty)$. Для всякого параметра $\varepsilon > 0$ задача об идеалах разрешима в пространствах $l^p$ с показателем $(1+\varepsilon)p$ и константами, зависящими только от $\varepsilon$.*

Следующая теорема показывает, что, при некоторых дополнительных предположениях, для произведения решёток задача об идеалах разрешима, если она была разрешима хотя бы для одного из сомножителей.

**Теорема 9.** *Пусть $E$ и $F$ — конечномерные банаховы решётки, заданные на множестве $\mathbb{N}$. Пусть для решётки $E$ задача об идеалах имеет решение с показателем $\alpha_E$ и оценкой $C_E$. Если произведение решёток $E$ и $F$ — банахова решётка, которую обозначим через $X$, то задача об идеалах разрешима и для решётки $X$ с показателем $\alpha_E$ и оценкой $C_E 2^{\alpha_E}(1+\delta)$ для произвольного положительного $\delta$.*

Ниже сформулирована основная теорема третьей главы.

**Теорема 10.** *Пусть $X$ — $q$-вогнутая решётка со свойством Фату и областью задания на множестве $\mathbb{N}$. Тогда для решётки $X$ задача об идеалах имеет решение с показателем $(1+\varepsilon)q$ для произвольного положительного $\varepsilon$ и с константой, зависящей от $q$ и $\varepsilon$.*

Ниже приведено описание структуры третьей главы.

В разделе 3.2 приведены основные определения и свойства банаховых решёток.

Раздел 3.3 посвящён обсуждению истории теоремы о короне и задачи об идеалах, напоминанию классических результатов. Также приведено упомянутое во введении лаконичное доказательство Кислякова теоремы о короне для банаховых решёток (при условии, что доказана теорема Учиямы для пространства $l^\infty$). В следующем разделе доказана теорема 8 о разрешимости задачи об идеалах для всех пространств $l^p$ с $p \in [1, \infty)$. Из этого результата выведена теорема 10 в предположении, что теорема 6 и некоторая техническая лемма доказаны. Далее приведено доказательство этой технической леммы. Последний раздел посвящён доказательству теоремы 9.

## Положения, выносимые на защиту

Теорема 4, Теорема 5, Теорема 6, Теорема 7, Теорема 8, Теорема 9, Теорема 10.

# Заключение

Основные результаты диссертационной работы:

1. Установлена $K$-замкнутость пары пространств, образованных в результате пересечения двух модулей над $w^*$-подалгебрами $L^\infty(\mu)$ в паре $(L^p(X,\mu), L^\infty(X,\mu))$ при $p > 1$;

2. Установлена $K$-замкнутость пары пространств $(K^p_\theta, K^\infty_\theta)$ в паре $(L^p(\mathbb{T}), L^\infty(\mathbb{T}))$ при $p > 1$;

3. Вычислены некоторые вещественные интерполяционные пространства для модельных пространств;

4. Доказана разрешимость задачи об идеалах в $q$-вогнутых решётках, в частности, в пространствах $l^p$ при $p \in [1, \infty)$.

# Список публикаций автора по теме диссертации

[Z1] И.К. Злотников, *“Об оценках в задаче об идеалах алгебры $H^\infty$”,* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 447, с. 66–74, (2016).

[Z2] И.К. Злотников, *“Задача об идеалах алгебры $H^\infty$ в случае некоторых пространств последовательностей”,* Алгебра и анализ, т. 29, вып. 5, с. 51–67, (2017).

[KZ] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *“Coinvariant Subspaces of the Shift Operator and Interpolation”,* Analysis Mathematica, vol. 44, no. 2, p. 219–236, (2018).

# Список литературы


[1] Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *“Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление”*, Алгебра и анализ, т. 16, вып.5, с. 1–33, (2004).

[2] А. Д. Баранов, В. П. Хавин, *“Допустимые мажоранты для модельных подпространств и аргументы внутренних функций”*, Функциональный анализ и его приложения, т. 40, вып. 4, с. 3–21,(2006).

[3] Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, *“Функциональный анализ, изд. 2,”* Москва, 1977.

[4] С.В. Кисляков, Д.В. Руцкий, *“Несколько замечаний к теореме о короне”,* Алгебра и анализ, т. 23, вып. 2, с. 171–191, (2012).

[5] С.В. Кисляков, *“Теорема о короне и интерполяция”* , Алгебра и анализ 2015, т. 27, вып. 5, с. 69–80, (2015).

[6] С. В. Кисляков, Куанхуа Шу, *“Вещественная интерполяция и сингулярные интегралы”,* Алгебра и анализ, т. 8, вып. 4, с. 75–109, (1996).

[7] В.А. Толоконников, *“Оценки в теореме Карлесона о короне, идеалы алгебры $H^\infty$, задача Секефальви–Надя”,* Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 113, с. 178–198, (1981).

[8] J. Bergh, J. Löfström, *“Interpolation spaces”,* Grundlehren Math. Wiss., 223, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1976.

[9] J. Bourgain, *“Some consequences of Pisier’s approach to interpolation”*, Israel. J. Math, vol. 77, p. 165–185, (1992).

[10] L. Carleson, *“Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem”*, Ann. Math., vol. 76, no. 3, p. 547–559, (1962).

[11] R. G. Douglas, H. S. Shapiro, A. L. Shields, *“On cyclic vectors of the backward shift”*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 73, no. 1, p. 156–159, (1967).

[12] C. Fefferman, N.M. Riviere and Y.Sagher, *“Interpolation between $H^p$ spaces: the real method”*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 191, p. 75–81, (1974).

[13] P. Jones, *“$L^\infty$ estimates for the $\overline{\partial}$ problem on a half-plane”*, Acta Math., vol. 150, p. 137–152, (1983).

[14] S. Kislyakov, N. Kruglyak, *"Extremal problems in interpolation theory, Whitney-Besicovitch coverings, and singular integrals",* vol. 74, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. Monografie Matematyczne (New Series) [Mathematics Institute of the Polish Academy of Sciences. Mathematical monographs (New series)]. Basel: Birkhäuser/Springer Basel AG, (2013).

[15] Kislyakov S. V., Xu Q., *"Interpolation of weighted and vector-valued Hardy spaces ",* Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), no. 1, 1–34.

[16] S. V. Kislyakov, I. K. Zlotnikov, *"Interpolation for intersections of Hardy-type spaces",* submitted to Israel J. Math., preprint: arxiv.org/abs/1903.09959

[17] S. V. Kislyakov, *"A sharp correction theorem",* Studia Math., vol. 113, p. 177–196, (1995).

[18] S. V. Kislyakov, *"Interpolation of $H^p$-spaces: some recent developments",* Israel Math. Conf. vol. 13, p. 102–140, (1999).

[19] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *"Classical Banach spaces I and II",* Springer-Verlag, (1996).

[20] N. K. Nikolski, *"Operators, functions, and systems: an easy reading"*, Vol. 1, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, (2002).

[21] N. K. Nikolski, *"Treatise on the Shift Operator"*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 273, Springer, Berlin, (1985).

[22] M. Rosenblum, *"A corona theorem for countably many functions",* Integral Equations Operator Theory, vol. 3, no. 1, p. 125–137, (1980).

[23] D. Rutsky, *"Corona problem with data in ideal spaces of sequences",* Arch. Math. (Basel), vol. 108, no. 6, p. 609–619, (2017).

[24] E. Stein, *"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions",* (PMS-30). Princeton, New Jersey: Princeton University Press, (1970).

[25] S. Treil, *"The problem of ideals of $H^\infty$: beyond the exponent 3/2",* J. Funct. Anal., vol. 253, no. 1, p. 220–240, (2007).

[26] S. Treil, *"Estimates in the corona theorem and ideals of $H^\infty$: A problem of T. Wolff",* J. Anal. Math., vol. 87, p. 481–495, (2002).

[27] A. Uchiyama, *"Corona theorems for countably many functions and estimates for their solutions",* Preprint, UCLA, (1980).

[28] Q. Xu, *"Some properties of the quotient space $(L^1(\mathbb{T}^d)/H^1(\mathbb{D}^d))$"*, Illinois J. Math., vol. 37, no. 3, p. 437–454, (1993).