На правах рукописи

Андреева Татьяна Михайловна

ДВОЙСТВЕННАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРОСТРАНСТВАМИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ И ОБОБЩЕННЫМИ КЛАССАМИ ДАНЖУА-КАРЛЕМАНА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ростов-на-Дону – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования "Южный федеральный университет" на кафедре математического анализа и геометрии.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Абанин Александр Васильевич

Официальные оппоненты:
Мусин Ильдар Хамитович
доктор физико-математических наук,
ФГБНУ «Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук», г. Уфа,
директор Института математики
с вычислительным центром

Рябых Галина Юрьевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет», г. Ростов-на-Дону,
профессор кафедры прикладной математики

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», г. Москва

Защита состоится "15" мая 2019 г. в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 по защите докторских и кандидатских диссертаций при Южном федеральном университете по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а, ауд. 211.

Автореферат разослан "15" марта 2019 г.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р. Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу: http://hub.sfedu.ru/media/diss/e7ae0401-7fb0-4191-9c45-722b0337a433/Andreeva_dis.pdf.

Учёный секретарь диссертационного совета Д 212.208.29 Кряквин В. Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность темы исследования. Пространства голоморфных функций с равномерными оценками являются предметом многочисленных исследований и играют важную роль во многих разделах комплексного и функционального анализа, а также в приложениях. Одним из перспективных направлений в этой тематике является раздел, посвященный получению удобных для применений описаний сопряженных пространств и решению с помощью этих описаний задач из смежных областей. Данная проблема при дополнительных ограничениях на области и весовые последовательности, задающие пространства, интенсивно изучалась в работах Р.С. Юлмухаметова, Н.Ф. Абузяровой, Б.А. Державца, В.В. Напалкова, Т. Белгхити, Д. Барретта, С. Белла, А.В. Абанина, Ле Хай Хоя и других математиков. Исследование возможности снятия или ослабления использовавшихся ранее ограничений и разработка последующих приложений полученных на этом пути результатов представляют значительный интерес и являются актуальными задачами.

Степень разработанности темы исследования. Подход, основанный на использовании преобразования Лапласа функционалов, был инициирован для пространств всех функций, голоморфных в выпуклой области, Г. Полиа и развивался в дальнейшем А. Мартино, Л. Эренпрайсом, Л. Хермандером, Б.А. Тейлором, И.Х. Мусиным и многими другими авторами. Что касается пространств голоморфных функций заданного роста вблизи границы ∂G ограниченной выпуклой области G, то здесь в основном изучался проективный случай пространств Фреше, когда рост функций измеряется весами, зависящими от функции расстояния $\rho(z)$ от точки $z \in G$ до ∂G. Существенные результаты в данном направлении были достигнуты в работах Р.С. Юлмухаметова, Б.А. Державца, В.В. Напалкова. Перечисленные авторы использовали различные подходы к доказательству сюръективности оператора Лапласа, а наиболее общие условия на весовые последовательности, зависящие от $\rho(z)$, были предложены В.В. Напалковым[1]. Для выпуклых весов общего вида к настоящему времени известен лишь результат Н.Ф. Абузяровой и Р.С. Юлмухаметова[2], полученный

[1] Напалков В.В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы //Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 1987. — Т. 51. — № 2. — С. 287-305.

[2] Абузярова Н.Ф., Юлмухаметов Р.С. Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций //Сибирский математический журнал. — 2001. — Т. 42. — № 1. — С. 3-17.

при дополнительных условиях на гладкость функций, сопряженных с весами, задающими весовые пространства. Индуктивный случай ранее рассматривался только для конкретного пространства $A^{-\infty}(G)$ функций полиномиального роста, задаваемого последовательностью весов $(1/(\rho(z))^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$[3][4]. Основная трудность при этом состоит в том, что, в отличие от случая пространств Фреше, в данном случае при доказательстве сюръективности преобразования Лапласа нужно строить функционал, удовлетворяющий счетному набору условий непрерывности.

В связи с вышеизложенным актуальна задача распространения результатов упомянутой работы В.В. Напалкова на случай возрастающей последовательности весов общего вида, задающей пространства с топологией индуктивного предела.

Задача получения аналитического описания сопряженных к весовым пространствам голоморфных в односвязных областях функций с помощью преобразования Коши ранее рассматривалась в случаях, когда рост функций определяется последовательностями весов, обладающих некоторой выпуклостью относительно $\rho(z)$ (см., напр., работы Б.А. Державца[5] и К.В. Трунова и Р.С. Юлмухаметова[6] и библиографию в них). При этом от областей требовалось, как минимум, чтобы их граница была замкнутой спрямляемой жордановой кривой. В частном случае пространств функций полиномиального роста в статье[7] содержательные результаты удалось получить для более широкого, чем жордановые, класса областей Каратеодори. Поэтому интерес представляет разработка нового подхода, позволяющего избавиться от ограничений на веса и при этом распространить основные результаты на случай областей Каратеодори.

Подходящее описание сопряженных, как известно, находит широкое применение в ряде других задач. При этом ранее практически все приложения касались случая пространств Фреше, который в некотором отношении проще, чем двойственный случай пространств индуктивного типа. В связи с этим представляет

---

[3] Melikhov S.N. (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation //Journal of mathematical analysis and applications. — 2004. — T. 297. — № 2. — C. 577–586.

[4] Abanin A. V., Le Hai Khoi. Dual of the function algebra $A^{-\infty}(D)$ and representation of functions in Dirichlet series //Proceedings of the American Mathematical Society. — 2010. — T. 138. — № 10. — C. 3623–3635.

[5] Державец Б. А. Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^N$ и имеющих заданное поведение вблизи границы // Доклады АН СССР. — 1984. —Т. 276. — № 6. — С. 1297–1301.

[6] Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С. Квазианалитические классы Карлемана на ограниченных областях //Алгебра и анализ. — 2008. — Т. 20. — № 2. — С. 178–217.

[7] Abanin A. V., Le Hai Khoi. Cauchy transformation and mutual dualities between $A^{-\infty}(\Omega)$ and $A^{\infty}(\mathbb{C}\Omega)$ for Carathéodory domains //Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin. — 2016. — T. 23. — № 1. — C. 87–102.

интерес разработка методов для аналогичных применений в двойственной ситуации индуктивных пространств голоморфных функций заданного роста вблизи границы выпуклой ограниченной области, определяемых последовательностями весов наиболее общего к настоящему моменту вида.

Цели и задачи диссертационной работы.

1. С помощью преобразования Лапласа функционалов получить аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций, задаваемых возрастающими последовательностями весовых функций общего вида.
2. Разработать новую модификацию метода псевдоаналитического продолжения и с его помощью установить аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори с помощью преобразования Коши функционалов, сняв при этом традиционные ограничения на весовые системы.
3. Применить полученные результаты к исследованию вопросов о возможности представления функций из пространств голоморфных функций заданного роста индуктивного типа абсолютно сходящимися экспоненциальными рядами и о сюръективности в этих пространствах операторов свертки.

Методы исследований. В данной работе применяются классические и современные методы комплексного и функционального анализа. В том числе используются: теория операторов в функциональных пространствах различной природы, метод псевдоаналитического продолжения, выпуклые функции и их свойства, двойственный переход от вопросов представления функций рядами и разрешимости уравнений свертки к проблеме сравнения соответствующих топологий в сопряженных пространствах.

Научная новизна и практическая значимость. Приведенные в работе исследования касаются более общих случаев систем весов и типов областей, чем ранее изученные. Кроме того, для их получения была существенно развита имеющаяся техника использования псевдоаналитического продолжения для решения задачи о двойственности пространств голоморфных функций заданного роста вблизи границы и обобщенных классов Данжуа-Карлемана. Двойственность пространств голоморфных функций заданного роста вблизи границы и обобщенных классов Данжуа-Карлемана применяется для решения задач о представлении функций рядами экспонент и о сюръективности операторов свертки. Подобные представления играют важную роль в вопросах разрешимости различных функциональных уравнений.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

1. Аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций, задаваемых возрастающими последовательностями весовых функций общего вида, полученное с помощью преобразования Лапласа функционалов.

2. Описание с помощью преобразования Коши функционалов сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори. Новый метод конструктивного псевдоаналитического продолжения таких преобразований во всю плоскость, позволяющий избавиться от требований на определенную выпуклость весов.

3. Существование и конструктивный алгоритм построения абсолютно представляющих систем экспонент в пространствах индуктивного типа голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций.

4. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций экспоненциально-степенного роста, формулируемые в терминах определенной регулярности роста их символов.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на Региональной школе-конференции молодых ученых "Владикавказская молодежная математическая школа"(г. Владикавказ, 2013, 2018 гг.), на Международной конференции "Крымская осенняя математическая школа-симпозиум"(пос. Батилиман, 2015 г.), на Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (г. Казань, 2016), на Международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование"(пос. Дивноморское, 2016 г.), на Международной научной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения"(г. Ростов-на-Дону, 2016, 2017 гг.), на Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования"(с. Цей, 2017 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов"(г. Москва, 2017 г.), на Международной конференции "Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения"(г. Москва, 2018 г.), на Международной конференции "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования"(г. Москва, 2018 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, список которых приведен в конце автореферата. Из них 3 статьи [1]–[3] — в журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ, при этом статья [1] — в журнале, входящем в базу данных Web of Science. В совместных с научным руководителем публикациях А.В. Абанину принадлежит постановка задач, указание метода исследования и общее руководство, а автору диссертации — проведение исследования и доказательство результатов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 112 страниц. Библиография — 70 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается общая характеристика работы и проводится краткий обзор результатов диссертации по главам и параграфам.

В первой главе приводится удобное для приложений описание пространств, сопряженных с весовыми пространствами индуктивного типа голоморфных в выпуклой ограниченной области G функций заданного роста вблизи границы. При этом используется преобразование Лапласа функционалов.

В разделе 1.1 вводится класс последовательностей $\mathcal{V} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ весов, задаваемых в виде $v_n(z) := \varphi_n(\ln\frac{1}{\rho(z)})$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in G$, где $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих на $(t^0, +\infty)$ ($t^0 \geq 0$) неограниченных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

(c1) $\forall j \in \mathbb{N}\ \ \varphi_j(t) + t \leq \varphi_{j+1}(t),\ \ t \geq t^0$;

(c2) $\forall j \in \mathbb{N}\ \exists \beta_j \geq 0\colon\ \ \varphi_j(t+1) \leq \varphi_{j+1}(t) + \beta_j, t \geq t^0$.

По каждой такой последовательности определяется внутренний индуктивный предел $\mathcal{V}H(G)$ соответствующей последовательности банаховых пространств

$$H_n(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_n := \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $H_G(\lambda) := \sup\limits_{z \in G} \mathrm{Re}\, \lambda z$ опорную функцию области G. Будем называть функцию $v_n^*(s) := \inf\limits_{0<t\leq 1} \left[st + \varphi_n(\ln \frac{1}{t}) \right], s \geq 0, n \in \mathbb{N}$, *сопряженной* с соответствующим весом v_n, $n \in \mathbb{N}$.

Основным результатом данного раздела является предложение 1.1.3, вводящее класс целых функций $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$, являющийся потенциальным кандидатом на роль искомого сопряженного с пространством $\mathcal{V}H(G)$. Образуем банаховы пространства целых функций

$$H_{n,G}(\mathbb{C}) := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f|_n := \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{|f(\lambda)| \cdot e^{v_n^*(|\lambda|)}}{e^{H_G(\lambda)}} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и определим по этой последовательности пространств пространство Фреше $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C}) := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{n,G}(\mathbb{C})$ с топологией, задаваемой набором норм $(|\cdot|_n)_{n=1}^{\infty}$.

Предложение 1.1.3 *Пусть G — выпуклая ограниченная область комплексной плоскости, $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ — рассмотренная выше весовая последовательность. Тогда преобразование Лапласа функционалов является линейным непрерывным инъективным оператором из $\left(\mathcal{V}H(G)\right)_b'$ в $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$.*

В разделе 1.2 доказывается, что заявленный в предложении 1.1.3 класс целых функций $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$ действительно является сопряженным с весовым пространством $\mathcal{V}H(G)$. Для этого применяется известный результат Е.М. Дынькина о псевдоаналитическом продолжении, который приведен в подразделе 1.2.2 в терминах, удобных для применения к рассматриваемым в диссертации пространствам.

Доказанная в подразделе 1.2.3 настоящей диссертации сюръективность преобразования Лапласа функционалов позволяет получить основной результат первой главы — теорему 1.3.1 о том, что класс целых функций $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$ является искомым сильно сопряженным с весовым пространством $\mathcal{V}H(G)$.

Теорема 1.3.1 *Пусть G — выпуклая ограниченная область в комплексной* *плоскости,* $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих на* $(t^0, +\infty)$ $(t^0 \geq 0)$ *функций, удовлетворяющих условиям (c1) и (c2),* $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$*, где* $v_n(z) := \varphi_n(\ln \frac{1}{\rho(z)})$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in G$. *Тогда преобразование Лапласа функционалов устанавливает топологический изоморфизм между пространствами* $\left(\mathcal{V}H(G)\right)_b'$ *и* $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$.

В этом же подразделе теорема 1.3.1 иллюстрируется на конкретных частных случаях весовых пространств — пространствах голоморфных функций экспоненциально-степенного роста, представляющих интерес для приложений.

Пример 1.3.2 (Пространство всех функций экспоненциально-степенного роста). Пусть $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim \alpha_n = A \in (0, 1]$. Тогда весовая последовательность $\mathcal{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ вида $\mathcal{V} = \left(\frac{1}{(\rho(\lambda))^{\alpha_n}}\right)_{n=1}^{\infty}$ порождает весовое пространство $\mathcal{V}H(G)$, которое обозначается специальным символом $H_{exp}^A(G)$ и называется пространством всех функций экспоненциально-степенного роста в области G. Оно не зависит от выбора $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ и может быть записано так:

$$H_{exp}^A(G) = \left\{ f \in H(G) : \ \exists \alpha < A : \ \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{1/(\rho(\lambda))^{\alpha}}} < \infty \right\}.$$

В соответствии с теоремой 1.3.1 сопряженное с ним пространство, получаемое с помощью преобразования Лапласа функционалов, имеет вид

$$P_{G,exp}^{A^*} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|\, e^{|z|^{\beta}}}{e^{H_G(z)}} < \infty, \ \forall \beta < A^* \right\},$$

где $A^* := A/(A+1)$.

Пример 1.3.4 (Пространство всех функций экспоненциально-степенного роста максимального типа). Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим веса $v_n(\lambda) = n(\rho(\lambda))^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathcal{V}H(G)$, порождаемое такой весовой последовательностью $\mathcal{V}$, называют пространством функций экспоненциально-степенного роста максимального типа (при порядке α). Обозначим его через $H_{\alpha}^{\infty}(G)$. Оно имеет вид

$$H_{\alpha}^{\infty}(G) = \left\{ f \in H(G) : \ \exists n \in \mathbb{N} : \ \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{e^{n/(\rho(\lambda))^{\alpha}}} < \infty \right\}.$$

Сопряженным с ним пространством по теореме 1.3.1 является

$$H^{\infty}_{G,\alpha} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)| e^{n|z|^{\alpha^*}}}{e^{H_G(z)}} < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Пример 1.3.6 (Пространство всех функций экспоненциально-степенного роста нормального типа). Пусть $\alpha \in (0,1)$ и $p \in (0,+\infty)$. Последовательность весов $\mathcal{V}$ вида $v_n(\lambda) = p\,(1-1/n)\,(\rho(\lambda))^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, определяет пространство $\mathcal{V}H(G)$, называемое пространством экспоненциально-степенного роста нормального типа (при порядке α). По аналогии с предыдущим примером мы будем обозначать его через $H^p_\alpha(G)$, а его сопряженное $\mathcal{V}H_G(\mathbb{C})$ — через $H^p_{G,\alpha}$. Они имеют следующие представления:

$$H^p_\alpha(G) = \left\{ f \in H(G) : \ \exists n \in \mathbb{N} : \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{e^{p(1-1/n)/(\rho(\lambda))^{\alpha}}} < \infty \right\},$$

$$H^p_{G,\alpha} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|\, e^{(\widetilde{\alpha} p^{1/(1+\alpha)} - \varepsilon)|z|^{\alpha^*}}}{e^{H_G(z)}} < \infty, \ \forall \varepsilon > 0 \right\},$$

где $\widetilde{\alpha} := (1+\alpha)\,\alpha^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$.

Вторая глава посвящена вопросу об описании сопряженного с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори.

В разделе 2.1 приводится постановка задачи и вводится оператор Коши преобразования функционалов. Всюду ниже G — ограниченная область комплексной плоскости и $v : G \to [0,\infty)$ — вес в G, удовлетворяющий дополнительному условию: $\ln(1/\rho(z)) = o(v(z))$ при $z \to \partial G$. Соответствующее этому весу банахово пространство определяется следующим образом:

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{e^{v(z)}} < \infty \right\}.$$

Используемое условие на вес обеспечивает принадлежность к $H_v(G)$ всех простейших дробей $1/(z-\zeta)$, $\zeta \notin G$. А тогда на его топологически сопряженном пространстве $(H_v(G))'$ корректно определен оператор Коши преобразования функционалов:

$$T:\mu\in(H_v(G))'\longmapsto\mu^c(\zeta):=\left\langle\mu_z,\frac{1}{z-\zeta}\right\rangle,\ \zeta\notin G.$$

Далее, для веса v обозначим через $\widetilde{E}_v(G)$ пространство функций g класса $C^1(\mathbb{C})$, которые голоморфны вне $\overline{G}$ с $g(\infty)=0$ и для которых

$$|g|_v:=\sup_{\zeta\in G}\left|\frac{\partial g}{\partial\overline{\zeta}}(\zeta)\right|e^{v(\zeta)}<\infty.$$

Введем в $\widetilde{E}_v(G)$ отношение эквивалентности: $g_1\sim g_2$, если $g_1=g_2$ в $\complement G$. Через $E_v(G)$ обозначим соответствующее фактор-пространство классов эквивалентности $[g]$ с фактор-нормой $\|[g]\|_v:=\inf\{|g+g_0|_v:\ g_0\in\widetilde{E}_v^0(G)\}$, где $\widetilde{E}_v^0(G)$ – подпространство функций из $\widetilde{E}_v(G)$, которые обращаются в нуль вне G.

В данном разделе доказаны непрерывность и линейность преобразования Коши функционалов, определенного на весовом пространстве $H_v(G)$, задаваемом одним весом v, а для случая области Каратеодори — также его инъективность. Напомним, что ограниченная односвязная область G комплексной плоскости называется областью Каратеодори, если ее граница совпадает с границей компоненты связности открытого множества $\complement\overline{G}$, содержащей бесконечно удаленную точку.

В разделе 2.2 для случая областей Каратеодори с помощью преобразования Коши функционалов рассматривается задача описания сопряженного с весовыми пространствами $VH(G)$ и $\mathcal{V}H(G)$, образованных соответственно строго убывающей V и строго возрастающей $\mathcal{V}$ последовательностями весов v_n, $n\in\mathbb{N}$, и наделенных топологиями соответственно проективного и индуктивного предела. При этом весовая последовательность $\mathcal{V}$ называется строго возрастающей, если для любого $n\in\mathbb{N}$ существуют такие $m\in\mathbb{N}$ и $C_n>0$, что

$$\sup_{|\tau|\le\rho(z)/2}v_n(z+\tau)+\ln(1/\rho(z))\le\inf_{|\tau|<\rho(z)}v_m(z+\tau)+C_n,\quad z\in G.$$

Аналогично, переменой n и m местами, вводится понятие строго убывающей последовательности V.

Основными результатами главы являются теорема 2.2.2 для индуктивного случая и теорема 2.2.3 — для проективного.

Теорема 2.2.2 *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — область Каратеодори. Тогда для любой строго возрастающей весовой последовательности $\mathcal{V}$ на G преобразование Коши функционалов устанавливает топологический изоморфизм между $(\mathcal{V}H(G))'_b$ и $\mathcal{V}E_G = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_{v_n}(G)$.*

Теорема 2.2.3 *Пусть G — область Каратеодори. Тогда для любой строго убывающей весовой последовательности V на G преобразование Коши функционалов устанавливает топологический изоморфизм между $(VH(G))'_b$ и пространством $VE_G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{v_n}(G)$, наделенным соответствующей топологией внутреннего индуктивного предела.*

В третьей главе рассмотрены приложения полученных результатов к вопросам представления функций из рассматриваемых пространств рядами экспонент и сюръективности операторов свертки.

В разделе 3.1 доказано (теорема 3.1.2), что для любой выпуклой ограниченной области G в $\mathbb{C}$ во всех пространствах вида $\mathcal{V}H(G)$, задаваемых весовыми последовательностями, как в теореме 1.3.1, существуют абсолютно представляющие системы экспонент. При этом указан конструктивный алгоритм их построения. В то же время отмечено, что системы простейших дробей, несмотря на полученное во второй главе аналитическое описание сопряженных, не могут быть абсолютно представляющими в $\mathcal{V}H(G)$.

В разделе 3.2 исследуются операторы свертки, определенные на весовых пространствах $\mathcal{V}H(G)$. Пусть μ — аналитический функционал с носителем в выпуклом компакте K. Тогда оператор свертки $\mu* : f \longmapsto \mu_w(f(z+w))$ непрерывно отображает $H(G+K)$ в $H(G)$, а преобразование Лапласа

$$\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z(e^{z\zeta}),\ \zeta \in \mathbb{C},\ z \in G,$$

функционала μ представляет собой целую функцию экспоненциального типа.

Образуем пространство

$$\mathcal{V}H_K^{\infty} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+v_m^*(|\zeta|)-v_n^*(|\zeta|)}} < \infty \right\},$$

которое будем называть пространством мультипликаторов, поскольку $\mathcal{V}H_K^{\infty}$ совпадает с пространством всех мультипликаторов из $\mathcal{V}H_G$ в $\mathcal{V}H_{G+K}$.

В предложении 3.2.1 подраздела 3.2.1 получен критерий непрерывности таких операторов свертки и установлен вид сопряженных с ними операторов умножения на аналитический символ.

Предложение 3.2.1 *Пусть μ — аналитический функционал с носителем в K. $\mu * \mathcal{V}H(G+K) \subseteq \mathcal{V}H(G)$ тогда и только тогда, когда $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$. При этом для любого нетривиального функционала μ с $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$:*

(i) Оператор свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G)$ непрерывен и обладает плотным образом;

(ii) Оператор умножения $\Lambda_{\hat{\mu}} : f \in \mathcal{V}H_G \longmapsto \hat{\mu} f \in \mathcal{V}H_{G+K}$ сопряжен оператору свертки.

В теореме 3.2.8 формулируются стандартные условия сюръективности операторов свертки применительно к рассматриваемым пространствам. Прежде чем ее приводить, напомним, что нетривиальный мультипликатор g из $\mathcal{V}H_G$ в $\mathcal{V}H_{G+K}$ называется делителем из $\mathcal{V}H_{G+K}$ в $\mathcal{V}H_G$, если для него имеет место теорема деления, т.е. импликация

$$f \in \mathcal{V}H_{G+K} \text{ и } \frac{f}{g} \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{V}H_G.$$

Множество всех делителей из $\mathcal{V}H_{G+K}$ в $\mathcal{V}H_G$ будем обозначать $\mathcal{D}\mathcal{V}_{G+K,G}$.

Теорема 3.2.8 *Пусть μ — аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathcal{V}H_K^\infty$. Рассмотрим следующие утверждения:*

(i) оператор свертки $\mu* : \mathcal{V}H(G+K) \to \mathcal{V}H(G)$ является сюръективным;

(ii) для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)}} \le C \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\hat{\mu}(z)||f(z)|}{e^{H_{G+K}(z)-v_m^*(|z|)}}, \forall f \in \mathcal{V}H_G;$$

(iii) символ $\hat{\mu}$ принадлежит классу $\mathcal{D}\mathcal{V}_{G+K,G}$ всех делителей из $\mathcal{V}H_{G+K}$ в $\mathcal{V}H_G$.

Тогда $(iii) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (i)$.

В разделе 3.3, который является основным в данной главе, доказана необходимость условия (iii) для весовых пространств экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов, уже рассмотренных ранее в примерах 1.3.4 и 1.3.6 соответственно. На этом пути получено описание всех делителей и, соответственно, критерии сюръективности операторов свертки в этих пространствах, формулируемые в терминах регулярности роста их символов. Именно, введем следующее определение. Будем говорить, что целая функция экспоненциального типа φ с радиальным индикатором $h_\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию (S^{α^*}), если существуют числа $s, N > 0$ такие, что для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < |\zeta|^{\alpha^*}$: $\ln|\varphi(\zeta')| \geq h_\varphi(\zeta) - s|\zeta|^{\alpha^*}$. Заметим, что условие (S^{α^*}) строго сильнее, чем классическое условие вполне регулярности φ.

Теорема 3.3.7 *Пусть μ — аналитический функционал с носителем в выпуклом компактном множестве K и $\hat{\mu}$ принадлежит классу всех мультипликаторов из $H^\infty_{G,\alpha}$ в $H^\infty_{G+K,\alpha}$. Оператор $\mu* : H^\infty_\alpha(G+K) \to H^\infty_\alpha(G)$ сюръективен для любой выпуклой ограниченной области G тогда и только тогда, когда $h_{\hat{\mu}} = H_K$ и $\hat{\mu}$ удовлетворяет условию (S^{α_*}).*

Аналогичный результат для пространств функций экспоненциально-степенного роста нормального типа приведен в теореме 3.3.9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного в диссертационной работе исследования установлены следующие основные результаты:

1. С помощью преобразования Лапласа функционалов получено аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций, задаваемых возрастающими последовательностями весовых функций общего вида. Ранее результаты подобной степени общности были известны для двойственного случая пространств Фреше.

2. С помощью преобразования Коши функционалов дано описание сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори. За счет нового конструктивного псевдоаналитического продолжения таких преобразований во всю плоскость удалось избавиться от требований на определенную выпуклость весов, использовавшуюся в предшествующих работах.

3. Установлено, что в пространствах индуктивного типа голоморфных функций заданного роста вблизи границы выпуклой области существуют абсолютно представляющие системы экспонент. Более того, указан конструктивный алгоритм их построения.

4. Для пространств голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций экспоненциально-степенного роста установлены критерии сюръективности операторов свертки, формулируемые в терминах определенной регулярности роста их символов. Ранее подобные результаты были известны лишь для пространств функций полиномиального роста.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Андреева Т. М.* Аналитическое описание сопряженных с пространствами голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори / А. В. Абанин, Т. М. Андреева // Математические заметки. — 2018. — Том 104. — Выпуск 3. — С. 323–335 (англ. версия: Andreeva T. M. Analytic Description of the Spaces Dual to Spaces of Holomorphic Functions of Given Growth on Carathéodory Domains / A. V. Abanin, T. M. Andreeva // Mathematical Notes, 2018, Vol. 104, No. 3, pp. 321–330.).

[2] *Андреева Т. М* Описание сопряженных для весовых пространств голоморфных функций заданного роста в выпуклых ограниченных областях / Т. М. Андреева // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2018. — № 1. — С. 4-9.

[3] *Андреева Т. М.* О сюръективности оператора свертки в пространствах голоморфных в области функций заданного роста / А. В. Абанин, Т. М. Андреева // Владикавказский математический журнал. — 2018. — Том 20. — Выпуск 2. — С. 3–15.

[4] *Андреева Т. М.* Псевдоаналитическое продолжение с весовыми оценками / Т. М. Андреева // Математический анализ и математическое моделирование: труды X региональной школы-конференции молодых ученых «Владикавказская молодежная математическая школа» (Владикавказ, 21–27 июля 2014 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015. — 172 с. — С. 115–116.

[5] *Андреева Т. М.* Распространение теоремы Е. М. Дынькина о квазианалитическом продолжении на пространства, задаваемые последовательностями весов / Т. М. Андреева // Международная конференция "XXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам"(КРОМШ-2015): сборник тезисов. — Симферополь: ООО ФОРМА, 2015. — 136 с. — С. 3–4.

[6] *Andreeva T. M.* Duals for holomorphic weighted spaces in Caratheodory domains / A. V. Abanin, T. M. Andreeva // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VI» в г. Ростов-на-Дону. Материалы конференции. — Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2016. — С. 55.

[7] *Андреева Т.М.* Описание сопряженных для пространств голоморфных функций заданного роста в областях Каратеодори / А.В. Абанин, Т.М. Андреева // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященную юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895–1944) и Александра Петровича (1926–1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. — Казань: Казанский университет; издательство Академии наук РТ, 2016. — 376 с. — С. 75–76.

[8] *Андреева Т.М.* О сюръективности операторов свертки на пространствах голоморфных функций заданного роста в выпуклых ограниченных областях / Т.М. Андреева // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2017» / Отв. ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. [Электронный ресурс] — М.: МАКС Пресс, 2017.

[9] *Андреева Т.М.* Сопряженные пространства с весовыми пространствами голоморфных функций заданного роста в выпуклых областях / А.В. Абанин, Т.М. Андреева // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование: тезисы докладов XIII Международной научной конференции (пос. Дивноморское, 7–14 сентября 2016 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — 257 с.

[10] *Andreeva T.M.* The surjectivity of convolution operators on holomorphic weighted spaces in bounded convex domains / T.M. Andreeva, A.V. Abanin // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — VII» в г. Ростове-на-Дону. Материалы конференции. — Ростов-на-Дону: Издательский центр ДГТУ, 2017. — С. 15.

[11] *Андреева Т.М.* Критерий сюръективности операторов свертки на весовых пространствах аналитических функций в выпуклых ограниченных областях / Т.М. Андреева // Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования: тезисы докладов XIV Международной научной конференции (с. Цей, 3-8 июля 2017 г.). — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2017. — 217 с.

[12] *Андреева Т.М.* Об условиях сюръективности операторов свертки в пространствах голоморфных в области функций заданного роста / Т.М. Андреева // Современные методы теории краевых задач: материалы конференции, посвя-

щенной 90-летию Владимира Александровича Ильина (2-6 мая 2018 г.) / Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова; Воронежский государственный университет; Математический институт имени В.А. Стеклова РАН; Вычислительный центр имени А.А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН. – Москва: МАКС Пресс, 2018. — 288 с. — (Понтрягинские чтения — XXIX).

[13] *Андреева Т. М.* О критериях сюръективности для операторов свертки, определенных на весовых пространствах голоморфных функций заданного роста вблизи границы выпуклой ограниченной области / Т. М. Андреева // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования : тезисы докладов Пятой Международной конференции, посвященной 95-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 26-29 ноября 2018 г. — Москва: РУДН, 2018. — 476 с. — С. 41-42.

Подписано в печать 26.02.2019 г.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/16. Усл. печ. лист.1,0.
Уч. изд. л. 1,0. Заказ № 6962. Тираж 100 экз.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, тел (863) 243-41-66.