

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское
отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии
наук

Лаборатория алгебры и теории чисел

на правах рукописи

СОСНИЛО ВЛАДИМИР АЛЕКСАНДРОВИЧ

ВЕСОВЫЕ МЕТОДЫ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., член-корреспондент РАН
Панин Иван Александрович

Санкт-Петербург – 2021

В данном тексте мы кратко опишем результаты данной диссертации. Обозначения будут следовать конвенции, описанной ниже. По большей части они соответствуют конвенциям многих других исследовательских статей в данной области.

Конвенции. Мы будем активно использовать язык ∞ -категорий. Под ними в данном случае мы имеем в виду $(\infty, 1)$ -категории. Мы будем следовать относительно стандартным обозначениям из [Lur17b, Lur17a, Lur18].

- (1) Под **категорией** мы имеем в виду именно 1-катеорию, а для ∞ -категорий будет использоваться полный термин.
- (2) Если $\mathcal{C}$ – ∞ -категория, то мы будем обозначать через $\mathcal{C}^\simeq \subset \mathcal{C}$ её максимальный подгруппоид.
- (3) Если $\mathcal{C}$ – стабильная ∞ -категория, то для каждого $x, y \in \mathcal{C}$ $\mathrm{maps}(x, y)$ будет обозначать спектр отображений, а $\mathrm{Maps}(x, y)$ – пространство отображений. Таким образом $\Omega^\infty \mathrm{maps}(x, y) \simeq \mathrm{Maps}(x, y)$; Аналогичным образом мы будем использовать обозначения $\mathrm{end}(x)$ и $\mathrm{End}(x)$.
- (4) Если $\mathcal{C}$ – ∞ -категория с конечными копроизведениями, мы введем обозначение

$$\mathrm{PSh}_\Sigma(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}^\times(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Spc})$$

для ∞ -категории функторов, которые переводят копроизведения в произведения.

- (5) Для дискретного коммутативного кольца R мы будем отождествлять R -линейные претриангулированные dg -категории с R -линейными стабильными ∞ -категориями (см. [Hau15, Example 5.11]).

1. ВЕСОВЫЕ СТРУКТУРЫ

Для начала мы определим главное понятие для данной диссертации – весовую структуру. Главы 2 и 3 посвящены целиком изучению данного понятия и сравнению его с понятием аддитивной ∞ -категории.

Определение 1.0.1. Весовой структурой на стабильной ∞ -категории $\mathcal{C}$ будем называть пару подкатегорий замкнутых относительно ретрактов $(\mathcal{C}_{w \geq 0}, \mathcal{C}_{w \leq 0})$ такую что следующие аксиомы выполнены:

- (1) $\Sigma \mathcal{C}_{w \geq 0} \subset \mathcal{C}_{w \geq 0}$, $\Omega \mathcal{C}_{w \leq 0} \subset \mathcal{C}_{w \leq 0}$, мы также будем обозначать

$$\mathcal{C}_{w \geq n} := \Sigma^n \mathcal{C}_{w \geq 0} \quad \mathcal{C}_{w \leq k} := \Sigma^k \mathcal{C}_{w \leq 0}.$$

- (2) если $x \in \mathcal{C}_{w \leq 0}$, $y \in \mathcal{C}_{w \geq 1}$ то

$$\pi_0 \mathrm{Maps}_{\mathcal{C}}(x, y) \simeq 0,$$

- (3) для любого объекта $x \in \mathcal{C}$ имеется последовательность корасслоения

$$x_{\leq 0} \rightarrow x \rightarrow x_{\geq 1},$$

где $x_{\leq 0} \in \mathcal{C}_{w \leq 0}$ и $x_{\geq 1} \in \mathcal{C}_{w \geq 1}$. Мы будем называть их **весовыми срезками** x .

Мы называем весовую структуру **ограниченной** если

$$\mathcal{C} = \bigcup_n (\mathcal{C}_{w \geq -n} \cap \mathcal{C}_{w \leq n}).$$

Стабильная ∞ -категория $\mathcal{C}$ наделенная (ограниченной) весовой структурой называется **(ограниченно-) весовой стабильной ∞ -категорией**. Подкатегория $\mathcal{C}_{w \geq 0} \cap \mathcal{C}_{w \leq 0}$ называется **сердцевиной** w . Мы обозначим её через $\mathcal{C}^{\heartsuit w}$.

Определение 1.0.2. Пусть $(\mathcal{C}, w), (\mathcal{D}, w')$ – ограниченно-весовые стабильные ∞ -категории и пусть $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ – точный функтор на подлежащих стабильных ∞ -категориях. Мы будем говорить, что f **весо-точный** если $f(\mathcal{C}_{w \geq 0}) \subset \mathcal{D}_{w' \geq 0}$ и $f(\mathcal{C}_{w \leq 0}) \subset \mathcal{D}_{w' \leq 0}$. Мы обозначим за

$$\mathbf{WCat}_{\infty}^{\text{st}, b},$$

∞ -категорию малых ограниченно-весовых стабильных ∞ -категорий и весо-точных функторов.

Замечание 1.0.3. Перечислим некоторые из простейших свойств весовых структур.

- (1) Каждая из подкатегорий в определении весовой структуры может быть описана как ортогонал к сдвигу второго класса:

$$\mathcal{C}_{w \geq 0} = \{X \in \mathcal{C} \mid \pi_0 \text{Maps}(Y, X) = 0 \text{ for all } Y \in \mathcal{C}_{w \leq -1}\}$$

$$\mathcal{C}_{w \leq 0} = \{X \in \mathcal{C} \mid \pi_0 \text{Maps}(X, Y) = 0 \text{ for all } Y \in \mathcal{C}_{w \geq 1}\}$$

Другими словами, весовая структура дает пример *теории кручения* $(\mathcal{C}_{w \geq 0}, \mathcal{C}_{w \leq -1})$.

- (2) Ограниченные весовые структуры строятся просто: если дана полная порождающая подкатегория $N \subset \mathcal{C}$, которая к тому же удовлетворяет свойству *(-1)-связности*, то есть

$$\text{Maps}(X, Y) \text{ связно для любых } X, Y \in N,$$

то, определив классы $\mathcal{C}_{w \geq 0}$ и $\mathcal{C}_{w \leq 0}$ как полные подкатегории порожденные конечными копределами N и, соответственно, конечными пределами N , мы получим ограниченную весовую структуру на $\mathcal{C}$.

Пример 1.0.4. Пусть R – *(-1)-связный* кольцевой спектр. Тогда ∞ -категория $\mathbf{Perf}_R$ наделена ограниченной весовой структурой, заданной полной подкатегорией связных модулей и полной подкатегорией модулей с тривиальными положительными R -когомологиями. Когда $R = \mathbb{S}$, весовые разложения соответствуют клеточным фильтрациям. В частности, они не определены однозначно, точно так же как и клеточные фильтрации зависят от выбора CW -структуры.

Пример 1.0.5. Пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная категория. Тогда ∞ -категория ограниченных (гомологических) цепных комплексов $\text{Com}^b(\mathcal{A})$ наделена ограниченной весовой структурой, где

$$M \in \text{Com}^b(\mathcal{A})_{w \geq 0} \iff M \text{ гомотопически эквивалентно комплексу тривиальному в отрицательных степенях,}$$

$$M \in \text{Com}^b(\mathcal{A})_{w \leq 0} \iff M \text{ гомотопически эквивалентно комплексу тривиальному в положительных степенях.}$$

В этом случае весовые разложения соответствуют глупым (или брутальным) срезам комплекса.

1.1. Теорема восстановления для весовых категорий. Пусть $\mathcal{A}$ – аддитивная ∞ -категория. Рассмотрим ∞ -категорию

$$\mathrm{Fun}^\times(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Spt})$$

спектро-значных аддитивных предпучков на $\mathcal{A}$. Обозначим за $\mathcal{A}^{\mathrm{fin}}$ минимальную стабильную подкатегорию $\mathcal{C}$, содержащую образ $\mathcal{A}$ при вложении Йонеда. Конструкция $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\mathrm{fin}}$ продолжается до функтора

$$(-)^{\mathrm{fin}} : \mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{add}} \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{st}},$$

где $\mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{add}}$ – ∞ -категория малых ∞ -категорий и аддитивных функторов, а $\mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{st}}$ – ∞ -категория малых стабильных ∞ -категорий и точных функторов. На самом деле это универсальный способ построить стабильную ∞ -категорию из аддитивной. Более строго, $(-)^{\mathrm{fin}}$ – левый сопряженный к забывающему функтору

$$\mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{st}} \rightarrow \mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{add}}.$$

На $\mathcal{A}^{\mathrm{fin}}$ есть также весовая структура с $\mathcal{A}_{w \geq 0}^{\mathrm{fin}}$ и $\mathcal{A}_{w \leq 0}^{\mathrm{fin}}$ определенными через конечные копределы и, соответственно, конечные пределы объектов из образа $\mathcal{A}$ при вложении Йонеда. Это даёт функтор

$$((-)^{\mathrm{fin}}, w) : \mathbf{Cat}_\infty^{\mathrm{add}} \rightarrow \mathbf{WCat}_\infty^{\mathrm{st}, b}.$$

Главный результат главы 3 данной диссертации есть следующее утверждение:

Теорема 1.1.1 (теорема 3.2.7). *Функтор $((-)^{\mathrm{fin}}, w)$ сопряжен слева к функтору, отображающему ограниченно весовую стабильную ∞ -категорию в её сердцевину. Кроме того, этот функтор индуцирует эквивалентность подкатегорий, состоящих из идемпотентно-полных ∞ -категорий.*

Одно из следствий теоремы 1.1.1 – следующее универсальное свойство ∞ -категории комплексов. Оно получено рассмотрением единицы сопряжения примененной к весовой стабильной ∞ -категории, построенной в примере 1.0.5. Данный результат может также быть найден в [BCKW19, теореме 7.56].

Следствие 1.1.2 (следствие 3.2.8). *Для аддитивной категории $\mathcal{A}$ есть эквивалентность (весовых) стабильных ∞ -категорий*

$$\mathcal{A}^{\mathrm{fin}} \simeq \mathrm{Com}^b(\mathcal{A}).$$

Другими словами, $\mathrm{Com}^b(\mathcal{A})$ – свободная ∞ -категория на аддитивной категории $\mathcal{A}$.

1.2. Весовые структуры на стэках. Главный источник примеров весовых структур для данной диссертации – следующая теорема. Случай, когда G – тривиальная группа, даёт таким образом весовую структуру, описанную в примере 1.0.4 для случая, когда R – $\mathbb{E}_\infty$ - k -алгебра.

Теорема 1.2.1 (теорема 3.3.13). *Пусть k – коммутативное кольцо, а G – вложимая линейно-редуктивная групповая схема над k .*

- (1) Пусть R – (-1) -связная $\mathbb{E}_\infty$ - k -алгебра, наделенная действием группы G . Тогда существует ограниченная весовая структура на $\mathbf{Perf}_{[\mathrm{Spec} R/G]}$, чья сердцевина есть полная подкатегория, порожденная ретрактами объектов из множества

$$N := \{p^* \mathcal{E} : \mathcal{E} \text{ конечный } G\text{-эквивариантный } k\text{-модуль } \mathcal{E}\},$$

где $p : [\mathrm{Spec} R/G] \rightarrow BG$ – структурный морфизм.

- (2) Пусть $R \xrightarrow{f} S$ – G -эквивариантный морфизм связных $\mathbb{E}_\infty$ - k -алгебр, наделенных действием G . Тогда функтор замены базы $\mathbf{Perf}_{[\mathrm{Spec} R/G]} \rightarrow \mathbf{Perf}_{[\mathrm{Spec} S/G]}$ весо-точен.

1.3. Applications. Теорема 1.1.1 позволяет очень гибко обращаться с весовыми ∞ -категориями. Теперь так и конструкции теории стабильных ∞ -категорий (такие как локализации Вердье), так и конструкции теории аддитивных ∞ -категорий доступны для весовых ∞ -категорий. Ниже идёт один из важных примеров конструкции из мира аддитивных ∞ -категорий.

Пример 1.3.1. Пусть $\mathcal{C}$ – идемпотентно-полная ограниченно-весовая стабильная ∞ -категория $\mathcal{C}$. Мы имеем эквивалентность $(\mathcal{C}^{\heartsuit_w})^{\mathrm{fin}} \rightarrow \mathcal{C}$. В частности у нас есть эквивалентность

$$\mathcal{C} \simeq (\mathcal{C}^{\heartsuit_w})^{\mathrm{fin}} \rightarrow (h\mathcal{C}^{\heartsuit_w})^{\mathrm{fin}} \simeq \mathrm{Com}^b(h\mathcal{C}^{\heartsuit_w}),$$

где последняя эквивалентность даны следствием 1.1.2. В терминологии Бондарко – это *сильный функтор весового комплекса*¹. Этот пример является ключевым для большинства приложений данной диссертации (и, возможно, для всей теории весовых структур).

Пример 1.3.2 (см. 3.3.1). Пусть k – поле экспоненциальной характеристики p , а R – кольцо, в котором p обратимо. Рассмотрим ∞ -категорию мотивов Воеводского $\mathbf{DM}(k; R)$ и её полную подкатегорию компактных объектов $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R)$. Полная подкатегория $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R)$, натянутая на мотивы гладких проективных многообразий, является (-1) -связной и порождающей. Таким образом, по замечанию 1.0.3(2) существует весовая структура на $\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R)$. Мы будем называть её *весовой структурой Чжоу*. Гомотопическая категория её сердцевинны эквивалентна аддитивной категории мотивов Чжоу $\mathbf{Chow}(k; R)$.

Совмещая оба примера, мы получаем функтор

$$\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R) \rightarrow \mathrm{Com}^b(\mathbf{Chow}(k; R)).$$

Следствие 1.3.3 (следствие 4.3.12 и замечание 4.3.13). Для любой ограниченно-весовой стабильной ∞ -категории $(\mathcal{C}, w)$ функтор

$$\mathcal{C} \rightarrow \mathrm{Com}^b(h\mathcal{C}^{\heartsuit_w})$$

индуцирует эквивалентность на отрицательной K -теории. В случае

$$\mathcal{C} = \mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k; R)$$

¹Аналог этого функтора может быть определен в контексте триангулированных категорий для любой триангулированной категории наделенной весовой структурой $(\mathcal{C}, w)$. Его область значений – некоторая **не триангулированная** категория, являющаяся фактором $h\mathrm{Com}^b(\mathcal{C}^w)$ по идеалу морфизмов, квадрат которого тривиален.

это в комбинации с [AGH19], влечет, что аддитивные K -группы

$$K_{-n}^{\Sigma}(\mathbf{Chow}(k; R))$$

обнуляются для любого $n > 0$ в случае если на $\mathbf{DM}_{\text{gm}}(k; R)$ существует мотивная t -структура.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ СТЭКИ

В главе 4 мы изучим регулярные производные стэки. Здесь мы опишем наш первый пример связи между теорией весовых структур и теорией производных стэков. Результаты последующих глав в основном независимы от данной.

Напомним, что коммутативное нётерово кольцо R является регулярным тогда и только тогда когда любой когерентный модуль над R обладает конечной проективной резольвентой. Это условие также эквивалентно тому, что имеется включение

$$\mathbf{Coh}_R \subseteq \mathbf{Perf}_R$$

стибальных подкатегорий $\mathbf{Mod}_R$. Это наблюдение может быть также использовано для определения регулярности в более общих случаях. Например, регулярность (-1) -связных кольцевых спектров была определена в [BL14]. Мы дадим ещё более общее определение регулярности для производных стэков:

Определение 2.0.1. Нётеров (-1) -связный спектральный стэк X называется **регулярным** тогда и только тогда, когда любой когерентный пучок над X является совершенным комплексом².

Мы покажем в главе 4, что это понятие обладает рядом хороших свойств, в частности докажем следующее утверждение:

Теорема 2.0.2. Пусть X – фактор-стэк $[\text{Spec}(R)/G]$, где R – спектральная $\mathcal{E}_{\infty}$ - k -алгебра над полем k и G – гладкая линейно-редуктивная групповая схема над k . Предположим, что алгебра $\pi_0(R)$ конечно порождена над k и что градуированное кольцо $\pi_*(R)$ градуированно нётерово. В этом случае верны следующие утверждения:

- (1) X регулярно в том и только том случае, если R регулярно.
- (2) X дискретно если оно регулярно и R имеет конечное число нетривиальных гомотопических групп.

Замечание 2.0.3. Первая часть теоремы 2.0.2 говорит, что свойство регулярности локально в гладкой топологии на таких фактор-стэках (для $\mathbb{E}_{\infty}$ -кольцевых спектров соответствующее утверждение следует из [Lur18, предложение 2.8.4.2]).

Вторая часть теоремы 2.0.2 есть обобщение принципа о том, что кольцо функций на многообразии без особенностей не имеет нильпотентных элементов. Действительно, элементы старших гомотопических групп R нильпотентны в градуированном кольце гомотопий, и таким образом могут быть проинтерпретированы как нильпотенты на X .

²Для X , являющегося спектром (-1) -связного $\mathbb{E}_{\infty}$ -кольцевого спектра данное определение несколько отличается от определения данного Барвиком и Лоусоном; они также дополнительно требуют, чтобы $\pi_0(X)$ было регулярным в классическом смысле, и в противном случае называют его *почти регулярным*.

2.1. Регулярные весовые структуры. К сожалению, определение 2.0.1 не является в чистом виде некоммутативным в том смысле, что оно зависит от $\mathbf{Perf}_R$ а также от от подкатегории

$$\mathbf{Coh}_R \subset \mathrm{Ind}(\mathbf{Perf}_R) = \mathbf{Mod}_R,$$

а не только от самой стабильной ∞ -категории $\mathbf{Perf}_R$. На самом деле существует чисто некоммутативный критерий регулярности классических колец (см. [Orl16], [Nee92]), но это, однако, не соответствует правильному свойству для стэков (например, $\mathbf{Perf}_X$ никогда не порождено единственным объектом, если у X есть точка с бесконечным стабилизатором; в частности, для не верен аналог теоремы 2.0.2).

Однако, $\mathbf{Coh}_R$ может быть восстановлено из канонической весовой структуры на $\mathbf{Perf}_R$ (пример 1.0.4) при помощи следующего результата Бондарко. Мы ожидаем, что данная точка зрения будет полезно для изучения локализуемых инвариантов регулярных спектральных стэков и, более общо, для лучшего понимания данного свойства.

Теорема 2.1.1 ([Bon18, теорема 0.1]). *Пусть $\mathcal{C}$ стабильная ∞ -категория с весовой структурой. Тогда существует каноническая весовая структура w и t -структура t_w на $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$, для которых выполняются равенства*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_{w \geq 0} = \mathrm{Ind}(\mathcal{C})_{t_w \geq 0} = \mathrm{Ind}(\mathcal{C}_{w \geq 0}).$$

Говоря языком этой теоремы, $\mathbf{Coh}_R$ может быть определена как минимальная подкатегория $\mathrm{Ind}(\mathbf{Perf}_R)$, порожденная $\pi_i^{t_w}(P)$ для всех совершенных комплексов P относительно конечных копределов и сдвигов. Это приводит нас к следующему определению.

Определение 2.1.2. Ограниченная весовая стабильная ∞ -категория $\mathcal{C}$ называется **регулярной** если каноническая t -структура на $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ данная теоремой 2.1.1 ограничивается на $\mathcal{C}$.

Замечание 2.1.3. Пусть X – либо фактор-стэк $[\mathrm{Spec} R/G]$ как в теореме 1.2.1(1), либо спектр (-1) -связного $\mathbb{E}_\infty$ -кольцевого спектра. Тогда $\mathbf{Perf}_X$ регулярна если и только если X регулярен.

3. ТЕОРЕМА ДУНДАСА-ГУДВИЛЛЯ-МАККАРТИ ДЛЯ ВЕСОВЫХ СТРУКТУР

В главе 6 мы докажем несколько результатов, касающихся локализуемых инвариантов стабильных ∞ -категорий, наделенных весовой структурой.

Знаменитая теорема Дундаса-Гудвилля-МакКарти (ДГМ) – необычайно важный инструмент для изучения K -теории и отправной пункт для теории следовых методов.

Теорема 3.0.1 (Дундас-Гудвилль-МакКарти). *Пусть $A \rightarrow B$ – морфизм (-1) -связных $\mathbb{E}_1$ -кольцевых спектров такой, что отображение $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$ сюръективно и его ядро – нильпотентный идеал в $\pi_0(A)$. Тогда отображение следа из алгебраической K -теории в топологические гомологии Хохшильда (ТС)*

$$\mathrm{tr} : K \rightarrow \mathrm{TC}$$

индуцирует декартов квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} K(A) & \longrightarrow & TC(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(B) & \longrightarrow & TC(B). \end{array}$$

И К-теория и ТС могут быть продолжены до локализирующих инвариантов стабильных ∞ -категорий, а отображение следа – до естественного преобразования локализирующих инвариантов. Таким образом, не является неестественным ожидать версию ДГМ-теоремы для некоторых функторов между стабильными ∞ -категориями. Однако, прямой перевод утверждений в некоммутативный мир порой весьма проблематичен. В этом конкретном случае неясно, какие свойства функторов и ∞ -категорий должны соответствовать свойствам

- (-1) -связности колец,
- π_0 -сюръективности гомоморфизма,
- нильпотентность ядра отображения.

Этот перевод, однако, становится очевидным при использовании языка весовых структур.

3.1. Нильпотентные расширения весовых категорий. Мы введем понятие **нильпотентного расширения** аддитивных ∞ -категорий и весовых стабильных ∞ -категорий. В аддитивном случае это понятие – прямое обобщение нильпотентного расширения колец, то есть сюръективного отображения с нильпотентным ядром. Затем это понятие переводится в мир весовых структур посредством эквивалентности из теоремы 1.1.1.

Основной результат данной главы – следующая теорема.

Теорема 3.1.1 (теорема 5.4.4). *Пусть E – локализирующий инвариант, являющийся обрезающим (то есть $E(R) = E(\pi_0(R))$) для всех (-1) -связных кольцевых спектров). Пусть $f : (A, w) \rightarrow (B, w')$ нильпотентное расширение ограниченно-весовых стабильных ∞ -категорий. В этом случае мы имеем индуцированную эквивалентность спектров*

$$E(A) \rightarrow E(B).$$

Замечание 3.1.2. Данный результат просто получить для обрезающих локализирующих инвариантов, которые коммутируют с фильтрованными копределами. Действительно, можно представить A и B как фильтрованные копределы ∞ -категории совершенных комплексов над кольцами эндоморфизмов объектов сердцевин $A^{\heartsuit_w}$ и $B^{\heartsuit_{w'}}$. Эти кольца эндоморфизмов (-1) -связны по аксиоме ортогональности для весовых структур. На самом деле не сложно показать, что нильпотентное расширение между такими ограниченно-весовыми стабильными ∞ -категориями совершенных комплексов индуцировано с нильпотентного расширения между соответствующими (-1) -связными кольцевыми спектрами. Таким образом результат формально следует из предположений теоремы и следствия 3.5 в [LT19].

Однако, во многих важных случаях E не коммутирует с фильтрованными ко-пределами. В частности это не очевидно в следующем следствии, про которое мы называем *категорной версией ДГМ-теоремы*.

Следствие 3.1.3 (Corollary 5.4.6). *Пусть $f : (\mathcal{A}, w) \rightarrow (\mathcal{B}, w')$ – нильпотентное расширение ограниченно-весовых стабильных ∞ -категорий. В этом случае мы имеем индуцированный гомотопически декартов квадрат спектров*

$$\begin{array}{ccc} K(\mathcal{A}) & \longrightarrow & TC(\mathcal{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathcal{B}) & \longrightarrow & TC(\mathcal{B}). \end{array}$$

Мы надеемся, что это утверждением будет в последствии важным инструментом для изучения K -теории, дополняющим классическую версию ДГМ-теоремы. В качестве конкретного примера мы применим нашу теорему к весовому комплексу ∞ -категории мотивов Воеводского.

Следствие 3.1.4 (Example 5.4.9). *Пусть k – поле экспоненциальной характеристики e и R – кольцо коэффициентов, в котором e обратимо. В этом случае квадрат*

$$\begin{array}{ccc} K(\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k, R)) & \longrightarrow & TC(\mathbf{DM}_{\mathrm{gm}}(k, R)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^{\Sigma}(\mathbf{Chow}(k, R)) & \longrightarrow & TC^{\Sigma}(\mathbf{Chow}(k, R)) \end{array}$$

является гомотопически декартовым.

Теперь зафиксируем дискретное коммутативное кольцо k и пусть G – вложимая линейно-редуктивная групповая схема над k . Если E – локализующий инвариант и R – (-1) -связная спектральная $\mathbb{E}_{\infty}$ - k -алгебра с действием G , положим

$$E^G(R) := E(\mathbf{Perf}_{[\mathrm{Spec} R/G]}).$$

Таким образом, $E^G(R)$ – это версия G -эквивариантной E -теории.

Следствие 3.1.5 (Эквивариантная ДГМ-теорема; следствие 5.4.12). *Пусть $R \rightarrow S$ – G -эквивариантное отображение (-1) -связных спектральных $\mathbb{E}_{\infty}$ - k -алгебр. В этом случае квадрат*

$$\begin{array}{ccc} K^G(R) & \longrightarrow & TC^G(R) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^G(S) & \longrightarrow & TC^G(S) \end{array}$$

является гомотопически декартовым.

4. КАТЕГОРНЫЕ КВАДРАТЫ МИЛНОРА И ПРО-ВЫРЕЗАНИЕ

Другие полезные техники в алгебраической K -теории представлены различными свойствами спуска. Часто такие свойства могут быть переписаны в форме существования различных длинных точных последовательностей типа Майера-Вьеториса. В частности, уже довольно долгое время было известно, что квадраты

Милнора колец и абстрактные квадраты раздутия схем индуцируют длинные точные последовательности в К-теории в некоторых частных случаях (see [Mor18]). Более того, в [KST17] (смотри также [LT19]) было показано, что К-теория удовлетворяет так называемым свойствам про-вырезания и про-cdh-спуска.

В главе 6 мы введём понятие *квадрата Милнора* стабильных ∞ -категорий и докажем следующий результат, являющийся идеологически интерпретацией доказательства из [LT19]:

Теорема 4.0.1 (теорема 6.2.4). *Любой локализирующий инвариант отправляет квадраты Милнора стабильных ∞ -категорий в гомотопически декартовы квадраты.*

Возможно читателя несколько собьёт с толку тот факт, что квадраты Милнора соответствует не квадратам Милнора схем, а их производному аналогу. Однако, в геометрии эта разница исчезает после перехода к индуктивной системе нильпотентных расширений замкнутых вложений в квадратах Милнора. Это приводит нас к определению про-версии категорного квадрата Милнора и следующей теореме:

Теорема 4.0.2 (теорема 6.4.5). *Предположим, что нам дан коммутативный квадрат кофильтрованных диаграмм ограниченно-весовых стабильных ∞ -категорий*

$$(4.0.3) \quad \begin{array}{ccc} \{\mathcal{A}_\lambda\} & \xrightarrow{\{f_\lambda\}} & \{\mathcal{B}_\lambda\} \\ \downarrow \{p_\lambda\} & & \downarrow \{q_\lambda\} \\ \{\mathcal{A}'_\lambda\} & \xrightarrow{\{g_\lambda\}} & \{\mathcal{B}'_\lambda\}, \end{array}$$

являющийся про-квадратом Милнора и такой, что для каждого λ существует n такое, что $\mathcal{A}_\lambda^\heartsuit$, $\mathcal{A}'_\lambda^\heartsuit$, $\mathcal{B}_\lambda^\heartsuit$ и $\mathcal{B}'_\lambda^\heartsuit$ – n -категории. Тогда любой локализирующий инвариант отправляет этот квадрат в гомотопически декартов квадрат про-спектров.

Это утверждение не следует очевидным образом из теоремы 4.0.1. Ключевой шаг в доказательстве, который может быть интересным сам по себе, это следствие 6.3.11. Оно даёт критерий, когда про-функтор между про-объектами в ∞ -категории весовых стабильных ∞ -категорий является про-эквивалентностью в терминах морфизмов, которые он индуцирует на про-объектах, составленных из пространств отображений. Это утверждение существенно использует весовые структуры и в данный момент неизвестно как доказать или даже сформулировать аналог данного утверждения для более общих ∞ -категорий.

5. ПРИЛОЖЕНИЯ К СТЭКАМ

Завершив всю работу с абстрактными ∞ -категориями, мы можем собрать плоды нашей деятельности. В главе 7 мы описываем приложения наших результатов к алгебраическим стэкам.

Последний важный ингредиент для наших приложений – теорема о локальной структуре алгебраических стэков, доказанная в [AHR19] и [AHHLR]. Этот результат говорит, что для широкого класса стэков (которые мы называем *АНС стэками*) существуют покрытия в топологии Нисневича стэками вида $[\mathrm{Spec} R/G]$.

Теперь мы можем воспользоваться всеми категорными техниками, представленными в предыдущих главах, а также теоремой 1.2.1.

5.1. Про-cdh-спуск и гипотеза Вайбеля. Напомним, что **абстрактный квадрат раздутья нётеровых** алгебраических стэков

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{i} & X, \end{array}$$

это коммутативный квадрат, где p – собственный представимый и i – замкнутое вложение такое, что p индуцирует изоморфизм $\tilde{X} - Z \rightarrow X - Y$. Обозначим через Z_n и Y_n соответствующие n -ные нильпотентные расширения Z в $\tilde{X}$ и Y в X .

Мы будем говорить, что производный стэк является АНС стэком, если его диагональ аффинная, а стабилизаторы всех точек – линейно-редуктивные и почти мультипликативные групповые схемы. Мы докажем следующую теорему, обобщающую главный результат [KST17] (а также [LT19]) на алгебраические стэки.

Теорема 5.1.1 (теорема 7.3.1). *Пусть X – АНС стэк. Тогда для любого локализующего инварианта E квадрат*

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & \text{“lim” } E(Y_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(\tilde{X}) & \longrightarrow & \text{“lim” } E(E_n) \end{array}$$

является гомотопически декартовым квадратом про-спекров.

В качестве следствия этого утверждения получено следующее обобщение основного результата [НК19].

Следствие 5.1.2 (следствие 7.7.4). *Пусть X – АНС алгебраический стэк и E – обрезающий инвариант. Тогда квадрат*

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \longrightarrow & E(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E(\tilde{X}) & \longrightarrow & E(Z) \end{array}$$

– гомотопически декартов квадрат спектров. Таким образом, обрезающие инварианты АНС алгебраических стэков удовлетворяют cdh-спуску.

Как другое следствие этого утверждения, мы докажем версию гипотезы Вайбеля об обнулении отрицательной К-теории, аналогично тому как это сделано в [НК19] и [KS16].

Теорема 5.1.3 (теорема 7.3.3). *Пусть X – нётеров АНС стэк накрывающей размерности d (см. [НК19, определение 7.7]). Тогда $K_{-n}(X)$ обнуляется для всех $n > d$.*

5.2. Гипотеза о решетке. Комбинируя наши результаты с результатами Халперн-Лейнстера и Померлеано, а также Коновалова мы доказываем гипотезу Бланка о решетке (см. [Bla16]) в новых случаях.

Теорема 5.2.1 (теорема 7.8.3). *Пусть X – производный стэк над $\mathbb{C}$, удовлетворяющий одному из следующих предположений:*

- (1) X имеет вид $[Y/G]$, где Y – производная аффинная G -схема над $\mathbb{C}$, G – редуктивная групповая $\mathbb{C}$ -схема такая, что Y^{cl} – гладкая $\mathbb{C}$ -схема;
- (2) X – производный АНС стэк такой, что X^{cl} – гладкий $\mathbb{C}$ -стэк.

Тогда комплексифицированное отображение характера Черна

$$\text{Ch} \otimes \text{HC} : K^{\text{top}}(X) \otimes \text{HC} \rightarrow \text{HP}(X)$$

из топологической K -теории (определенной как локализуемый инвариант Бланком) в периодические гомологии Хохшильда – эквивалентность.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Были доказаны некоторые структурные результаты о весовых стабильных ∞ -категориях и их локализующих инвариантах. Мы транслировали данные результаты в эквивариантные версии ДГМ-теоремы, теоремы о про-вырезании и про-cdh-вырезании для стэков и тем самым продемонстрировали полезность данного подхода. Пользуясь недавним результатом Коновалова, мы также доказали версию гипотезы Вайбеля об обнулении отрицательных K -групп для стэков и верифицировали гипотезу Бланка о решетке для широкого класса производных алгебраических стэков.

Мы считаем, что эти результаты интересны сами по себе, но, кроме этого, они свидетельствуют о полезности весовых структур в контексте некоммутативной геометрии. Мы надеемся, что нам удастся расширить данные методы и применить их к другим задачам производной алгебраической геометрии и геометрии стэков. Далее мы перечислим некоторые результаты, которые мы надеемся получить в будущем:

- (1) Версия теоремы жесткости Габбера для стэков с *хорошими* стабилизаторами, обобщающая [NR20];
- (2) Про-вырезание и про-cdh-вырезание для эрмитовой K -теории, базирующееся на формализме $[\text{CDH}^+20a]$, $[\text{CDH}^+20b]$ and $[\text{CDH}^+20c]$.

Наши методы довольно сильно ограничены, так как весовая структура существует только в специальной ситуации. Однако, многие интересные примеры проявляются как *пределы* ограниченно весовых стабильных ∞ -категорий. Мы бы хотели иметь систематический способ работать с такими примерами. Мы завершаем данную диссертацию следующими вопросами, на которые мы надеемся получить ответ:

- Существует ли комбинаторное понятие полу-весовой стабильной ∞ -категории, которое охватывает те стабильные ∞ -категории, которые являются хорошими пределами весовых стабильных ∞ -категорий?
- Какая структура на стабильной ∞ -категории может быть найдена на производной категории точной ∞ -категории? Обобщаются ли наши результаты об аддитивных ∞ -категориях на соответствующие результаты о точных ∞ -категориях?

АПРОБАЦИЯ

О результатах данной диссертации было сделано множество докладов, далее мы перечислим некоторые из них:

- (1) Доклад “Pro-excision for stacks” (Про-вырезание для стэков), Конференция “Motives and What Not” (Мотивы и многое другое), онлайн, 20 мая–17 июня 2020 года
- (2) Доклад “Regularity of spectral stacks, their algebraic K-theory, and weight structures” (Регулярность спектральных стэков, их алгебраическая К-теория и весовые структуры), АГ семинар, Университет Регенсбурга, Германия, 21 ноября 2019 года
- (3) Доклад “Weight structures on stable infinity-categories” (Весовые структуры на стабильных бесконечность-категориях), Алгебро-Топологический семинар, Университет Копенгагена, Дания, 10 декабря 2018 года
- (4) Доклад “K-theory of the category of Voevodsky motives” (К-теория категории мотивов Воеводского), Санкт-Петербургский алгебро-геометрический симпозиум для юных математиков, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 10-11 мая 2018 года

ПУБЛИКАЦИИ

Результаты данной диссертации были опубликованы в статьях [Sos19], [Sos21] и [ES21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [AGH19] Benjamin Antieau, David Gepner, and Jeremiah Heller. K-theoretic obstructions to bounded t-structures. *Inventiones mathematicae*, 216(1):241–300, Jan 2019.
- [AHHLR] Jarod Alper, Jack Hall, Daniel Halpern-Leistner, and David Rydh. Artin algebraization for pairs and applications to the local structure of stacks and ferrand pushout. *In preparation*.
- [AHR19] Jarod Alper, Jack Hall, and David Rydh. The étale local structure of algebraic stacks. 2019.
- [BCKW19] Ulrich Bunke, Denis-Charles Cisinski, Daniel Kasprowski, and Christoph Winges. Controlled objects in ∞ -categories and the novikov conjecture. 11 2019.
- [BL14] Clark Barwick and Tyler Lawson. Regularity of structured ring spectra and localization in K-theory. *arXiv preprint arXiv:1402.6038*, 2014.
- [Bla16] Anthony Blanc. Topological K-theory of complex noncommutative spaces. *Compos. Math.*, 152(3):489–555, 2016.
- [Bon18] Mikhail Bondarko. On torsion pairs, (well generated) weight structures, adjacent t-structures, and related (co)homological functors. *arXiv preprint arXiv:1611.00754v6*, 2018.
- [CDH⁺20a] Baptiste Calmès, Emanuele Dotto, Yonatan Harpaz, Fabian Hebestreit, Markus Land, Kristian Moi, Denis Nardin, Thomas Nikolaus, and Wolfgang Steimle. Hermitian K-theory for stable ∞ -categories i: Foundations, 2020.
- [CDH⁺20b] Baptiste Calmès, Emanuele Dotto, Yonatan Harpaz, Fabian Hebestreit, Markus Land, Kristian Moi, Denis Nardin, Thomas Nikolaus, and Wolfgang Steimle. Hermitian K-theory for stable ∞ -categories ii: Cobordism categories and additivity, 2020.
- [CDH⁺20c] Baptiste Calmès, Emanuele Dotto, Yonatan Harpaz, Fabian Hebestreit, Markus Land, Kristian Moi, Denis Nardin, Thomas Nikolaus, and Wolfgang Steimle. Hermitian K-theory for stable ∞ -categories iii: Grothendieck-witt groups of rings, 2020.
- [ES21] Elden Elmanto and Vladimir Sosnilo. On nilpotent extensions of ∞ -categories and the cyclotomic trace. *International Mathematics Research Notices*, 07 2021. rnab179.

- [Hau15] Rune Haugseng. Rectification of enriched ∞ -categories. *Algebraic & Geometric Topology*, 15(4):1931–1982, Sep 2015.
- [HK19] Marc Hoyois and Amalendu Krishna. Vanishing theorems for the negative K-theory of stacks. *Annals of K-Theory*, 4(3):439–472, Dec 2019.
- [KS16] Moritz Kerz and Florian Strunk. On the vanishing of negative homotopy K-theory. 2016.
- [KST17] Moritz Kerz, Florian Strunk, and Georg Tamme. Algebraic K-theory and descent for blow-ups. *Inventiones mathematicae*, 211(2):523–577, Aug 2017.
- [LT19] Land and Tamme. On the K-theory of pullbacks. *Annals of Mathematics*, 190(3):877, 2019.
- [Lur17a] Jacob Lurie. Higher algebra. September 2017.
- [Lur17b] Jacob Lurie. Higher topos theory. April 2017.
- [Lur18] Jacob Lurie. Spectral algebraic geometry. February 2018.
- [Mor18] Matthew Morrow. Pro unitality and pro excision in algebraic K-theory and cyclic homology. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2018(736):95–139, Mar 2018.
- [Nee92] Amnon Neeman. The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(5):547–566, 1992.
- [NR20] Niko Naumann and Charanya Ravi. Rigidity in equivariant algebraic K-theory. *Annals of K-Theory*, 5(1):141–158, Mar 2020.
- [Orl16] Dmitri Orlov. Smooth and proper noncommutative schemes and gluing of dg categories. *Advances in Mathematics*, 302:59–105, Oct 2016.
- [Sos19] Vladimir Sosnilo. Theorem of the heart in negative K-theory for weight structures. *Doc. Math.*, 24:2137–2158, 2019.
- [Sos21] Vladimir Sosnilo. Regularity of spectral stacks and discreteness of weight-hearts. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 03 2021. haab017.