**Фурсаев Дмитрий Владимирович. Методы конечнотемпературной квантовой теории поля в гравитации и проблема энтропии черных дыр : Дис. ... д-ра физ.-мат. наук : 01.04.02 : Дубна, 2003 198 c. РГБ ОД, 71:04-1/108-2**

**Содержание**

[**Введение 4**](#bookmark3)

1. **Квантовая теория на стационарном фоне и свойства одноча-**

**ф стичных спектров 18**

* 1. [Введение 18](#bookmark6)
	2. [Свободные поля на стационарном фоне 19](#bookmark7)
		1. [Квантование на стационарном фоне 19](#bookmark8)
		2. [Примеры фоновых полей 25](#bookmark16)
	3. [Нелинейные спектральные задачи 28](#bookmark17)
		1. [Математическая формулировка 28](#bookmark18)
		2. Основной результат 32
		3. [Спектральные асимптотики 33](#bookmark21)
	4. [Дополнительные комментарии 38](#bookmark28)
		1. [Задачи, связанные с уравнением Дирака 38](#bookmark29)
		2. [Задачи, связанные с калибровочными полями 40](#bookmark30)

[♦ 1.4.3 Случай непрерывного спектра 42](#bookmark32)

* 1. Размерная редукция и связь с однопетлевыми расходимостями . , 44
1. **Конечнотемпературная теория поля на стационарном фоне 47**
	1. [Введение 47](#bookmark37)
	2. [Свободная энергия 49](#bookmark38)
		1. [Метод среднего поля 49](#bookmark39)
		2. [Предел высоких температур 51](#bookmark43)
		3. Пример вычислений в стационарном гравитационном поле:

эффект вращения системы 52

* + 1. Пример вычислений в калибровочных теориях: дебаевская

экранировка 55

**ф** 2.3 Евклидова формулировка теории поля при конечной температуре . 57

1. [Достоинства и трудности евклидовой теории 57](#bookmark49)
2. [Определения 59](#bookmark50)
3. Связь между евклидовой и канонической формулировками . 61
4. [Виковский разворот в пределе больших *Т* 64](#bookmark56)
5. [Энергия вакуума и редукционные формулы 66](#bookmark60)
6. **Классические и квантовые аспекты гравитации на многообра­зиях с коническими сингулярностями 71**
	1. [Введение 71](#bookmark64)
	2. [Инвариантные функционалы на торнифолдах 73](#bookmark65)
		1. [Сглаживание конических сингулярностей 73](#bookmark66)
		2. Топологические характеристики и гравитация Лавлока . . 75
		3. Энтропия черных дыр в теориях гравитации с высшими

производными 76

* 1. [Торнисферы и глобальные свойства торнифолдов 78](#bookmark72)
		1. [Способы описания торнисфер 78](#bookmark73)
		2. [Уравнения связи на параметры торнисферы 81](#bookmark74)
		3. Предел малых дефицитов конических сингулярностей ... 84
		4. [Полиэдрические конфигурации 86](#bookmark78)
		5. Решения уравнений Эйнштейна с радиальными струнами . 87
	2. [Спектральная геометрия торнифолдов 89](#bookmark80)
		1. [Квантовые эффекты на конусе 89](#bookmark81)
		2. [Результат для низших спинов 90](#bookmark82)
		3. [Проблема высших спинов 95](#bookmark91)
	3. Извлечение энергии из черной дыры космическими струнами ... 99
1. **Конечнотемпературная теория при наличии горизонтов Кил-**

**линга 107**

* 1. [Введение 107](#bookmark96)
	2. [Свойства квантовых систем вблизи горизонта Киллинга 109](#bookmark97)
	3. [Регуляризации инфракрасного типа 112](#bookmark98)
	4. [Регуляризации ультрафиолетового типа 114](#bookmark101)
	5. [Связь между канонической и евклидовой теориями 117](#bookmark105)
	6. [Статистическая механика черных дыр и перенормировка в энтро­пии 119](#bookmark107)
1. [**Черные дыры и индуцированная гравитация 124**](#bookmark110)
	1. [Идея и результат 124](#bookmark111)
	2. [Модели конституентов 130](#bookmark112)
		1. Модели с неминимальными связями скалярных полей . . . 130
		2. Модели с векторными полями 133
	3. Энтропия нейтральных статических и вращающихся черных дыр 135
	4. [Заряженные черные дыры 138](#bookmark122)
		1. [Индуцированная теория Эйнштейна-Максвелла 138](#bookmark123)
		2. Заряженные поля вблизи горизонта заряженной черной дыры

и вычисление энтропии 141

* 1. [Масштаб квантовой гравитации в пределе большого числа кон­ституентов 144](#bookmark128)
	2. [Черные дыры в двух измерениях 146](#bookmark129)
		1. [Индуцированная гравитация Лиувилля 146](#bookmark130)
		2. [Термодинамика черных дыр 149](#bookmark132)
		3. Статистическая механика 151
1. [**Интерпретация энтропии черной дыры в индуцированной гра­витации 154**](#bookmark138)
	1. [Введение 154](#bookmark139)
	2. Энергия, гамильтониан, нетеровский заряд и черные дыры . . . .155
		1. [Два определения энергии при наличии горизонта 155](#bookmark141)
		2. [Каноническая эволюция вдоль времени Киллинга 159](#bookmark149)
		3. Энергия полей материи и первый закон термодинамики

черных дыр 162

* + 1. [Вращающиеся черные дыры 164](#bookmark157)
	1. [Энтропия черной дыры и вырождение спектра масс 166](#bookmark159)
		1. [Нетеровский заряд и мягкие моды 166](#bookmark160)
		2. [Спектр масс черной дыры Шварцшильда 169](#bookmark164)
		3. Спектр масс заряженных и вращающихся черных дыр . . .172
	2. [Энтропия черной дыры как мера потери информации под гори­зонтом 175](#bookmark167)

[**Заключение 179**](#bookmark168)

[**Список литературы 183**](#bookmark169)

**Введение**

Настоящая диссертация содержит результаты исследований автора, которые имеют две цели: 1) развитие методов и анализ особенностей конечнотемпера­турной квантовой теории поля в стационарных калибровочных и гравитаци­онных фоновых полях общего вида, включая случай пространств с горизонтом Киллинга; 2) использование этих методов для последовательного статистическо- механического обоснования энтропии черных дыр в теориях, где гравитация возникает целиком за счет квантовых эффектов.

Наш интерес к данной тематике связан с тем, что явления при конечной тем­пературе играют фундаментальную роль во многих областях физики высоких энергий. Спектр приложений здесь огромен, от космологии и астрофизики до экспериментов на ускорителях будущего поколения. Более того, в настоящее время наступает период новых наблюдательных данных об эффектах, связан­ных с существованием материи в экстремальных условиях, т.е. при очень боль­шой температуре, плотности, а также при наличии сильной гравитации. Это требует развития адекватных, строгих и эффективных методов теоретических расчетов.

Ключевую роль в получении новой информации будут играть эксперименты на большом адронном ускорителе (LHC), который начнет действовать в 2007 году в CERN. Одна из целей этого проекта - исследование в эксперименте AL­ICE возможных проявлений кварк-глюонной плазмы в столкновениях тяжелых ионов [1]. Первые официальные заявления о наблюдении нового состояния ве­щества в виде свободных кварков и глюонов появились в 2000 году, см. [2]. Прошедшие эксперименты с тяжелыми ионами в CERN, а также проводимые в данный момент эксперименты на американском ускорителе RHIC в Брукхэвене [3] можно отнести к исследованиям кварковой материи при высокой плотно­сти, но относительно малой температуре. Эти данные представляют интерес с точки зрения астрофизики, поскольку аналогичные условия могут реализовы­ваться в нейтронных звездах. В будущих экспериментах на LHC соответству-

ющая температура приблизится к температуре вещества в ранней Вселенной в момент Большого взрыва [2].

Другим источником информации о материи в экстремальных условиях явля­ются астрофизические наблюдения, получившие мощный толчок благодаря но­вому поколению прецизионных приборов, таких, например, как телескопы Hub­ble и Chandra. Еще в 80х годах Виттеном [4] была высказана гипотеза о суще­ствовании стабильных состояний плотной материи, содержащей свободные *и*, *d* и *s* кварки. Им и рядом других авторов [5], [6] рассматривалась возможность существования кварковых или странных звезд, целиком образованных из подоб­ной кварковой материи. В отличие от нейтронных эти звезды имеют большую плотность и меньший радиус. Объекты, являющиеся кандидатами на роль странных звезд, стали регистрироваться с конца 90х годов (см. [7] и ссылки в этой работе). Если гипотеза о странных звездах подтвердится, появится уни­кальная возможность исследовать проявления кварк-глюонной плазмы в ’’при­родных лабораториях”, созданных под воздействием гравитации. С другой сто­роны, эксперименты на ускорителях приобретут важное значение для построе­ния астрофизических моделей.

Заметим, что в нейтронных звездах эффекты общей теории относительности играют существенную роль [8], а в странных звездах они могут быть еще зна­чительнее. Нейтронные звезды создают сильное магнитное и гравитационное поля, а также могут вращаться с огромной угловой частотой. Такие объекты известны как миллисекундные пульсары. Как считается [8], в начальный пе­риод после своего образования пульсары могут иметь экваториальную скорость вращения близкую к скорости света.

Для теоретической разработки упомянутых выше экспериментальных дан­ных необходимо развивать методы квантовой теории поля при конечной тем­пературе и плотности в сильных гравитационных и других фоновых полях. К фоновым мы относим внешние классические поля, а также среднее поле, создан­ное самими квантовыми полями. Необходимо развивать как строгий матема­тический аппарат, лежащий в основе вычислений, так и эффективные прибли­женные методы.

В квантовой гравитации метод фонового поля, реализуемый в формализме эффективного действия [9],[10],[11] давно является традиционным методом рас­четов. Этот формализи восходит к работам Швингера [12] и де Витта [9]. Его существенная черта - ковариантность. Однако в теории при конечной темпе­ратуре ковариантность нарушена, поскольку состояние теплового равновесия существенно связано с выбором системы отсчета. Это приводит к явному от­делению временной координаты от пространственных. По этой причине при конечной температуре во внешних полях ковариантные методы вычислений ча­сто оказываются неприменимы и требуется разрабатывать новые подходы.

Основным методом расчетов при конечной температуре является диаграм- ная техника, применимая, как правило, в плоском пространстве-времени, когда прочие фоновые поля тривиальны1 (см., например, [14]). Косвенным способом эта техника позволяет делать определенные выводы для слабых фоновых полей, но этого приближения не всегда достаточно, особенно, если требуется учиты­вать нелокальные эффекты. Единственным хорошо исследованным случаем не­тривиальных фоновых полей при конечной температуре является статическое гравитационное поле [15]-[17], а также случай, когда временная компонента калибровочного поля равна нулю. Однако ряд важных физических явлений, таких, например, как вращение системы или эффекты экранировки калибро­вочного поля, выходит за эти рамки.

Широко применяется также евклидова формулировка теории. Она привле­кает своей формальной ковариантностью и возможностью использовать метод эффективного действия [9]. Проблема в том, что переход к евклидовой теории требует комплексификации внешних полей - процедуры, обобщающей понятие виковского разворота. В общем случае, учитывая нелокальный характер эффек­тивного действия [10], такая процедура является весьма нетривиальной. Кроме того, евклидовы фоновые поля могут не только отличаться по своим свойствам от физических фоновых полей, но даже не иметь аналога в лоренцевом секторе. Этот факт известен в квантовой гравитации [18].

Одним из примеров, где учет фоновых полей в теории при конечной темпера­туре играет ключевую роль, является термодинамика черных дыр и связанная с ней проблема статистической интерпретации энтропии Бекенштейна-Хокинга. Черные дыры являются специфическими решениями гравитации Эйнштейна, которые описывают области пространства со столь сильным гравитационным полем, что никакое вещество не может выйти за их пределы. Внутренняя область дыры скрыта от внешнего наблюдателя. Граница невидимой области

1 Здесь имеются в виду расчеты в стационарных фоновых полях. Помимо вкладов от стационарных конфигураций статистическая сумма при конечной температуре может также содержать вклады от инстантонов, как это, например, происходит в теории Янга-Миллса [13]. Конечнотемпературные эффекты, связанные с инстантонами, в данной диссертации не обсуждаются.

называется горизонтом.

Черные дыры, которые образуются при гравитационном коллапсе вещества, быстро достигают стационарного состояния, которое характеризуется массой *М* и угловым моментом вращения *J.* Если допустить, что вещество может быть заряженным, то к этим параметрам нужно добавить электрический заряд *Q.* Никаких других параметров стационарная черная дыра в теории Эйнштейна- Максвелла иметь не может и ее метрика в общем случае описывается решением Керра-Ньюмана. Это утверждение известно как теорема об отсутствии ” волос” [19]. Если Пя \_ угловая скорость вращения черной дыры вблизи горизонта, а Фя - разность между значениями электрического потенциала на горизонте и бесконечности, то используя чисто классические уравнения теории, можно доказать следующую вариационную формулу [20]

*5М* = *TH5SBH* + *UHbJ* + Ф *h&Q,*







Здесь *Л* - площадь поверхности горизонта черной дыры, a *G* - постоянная Ньютона2. Величина к есть константа, называемая поверхностной гравитацией. Она определяет напряженность гравитационного поля вблизи горизонта. Если рассматривать массу дыры *М* как внутреннюю энергию, то (1) напоминает по форме первое начало термодинамики, в котором *$вн* имеет смысл энтропии, а *Тн* температуры. Величина *SBH* была введена в работах [22]-[25] и называв ется энтропией Бекенштейна-Хокинга. Строго говоря, формула (1) определяет энтропию и температуру с точностью до множителя. Этот множитель фиксиру­ется из других соображений: *Тн* совпадает с температурой излучения Хокинга от черной дыры [25]. Кроме первого начала, можно найти аналогию и с другими законами термодинамики. Например, рассматривая классические процессы с черными дырами, можно заключить, что площадь поверхности горизонта не убывает, что соответствует второму началу термодинамики. В квантовой тео­рии этот закон будет справедлив, если *SBH* объединить с энтропией вещества во внешней области черной дыры. Именно из требования, что второе начало не нарушается в процессе гравитационного коллапса, следует вывод, что чер­ная дыра должна обладать собственной энтропией, ассоциируемой с площадью горизонта. В противном случае энтропия коллапсирующего вещества исчезала бы после образования дыры бесследно.

*2*Здесь и далее, если нет специальных замечаний, мы используем систему единиц *h = с* = *кв* = 1 *(кв* постоянная Больцмана), и пользуемся определениями, принятыми в книге [21]. В частности, лоренцева сигнатура метрики +).

Термодинамика и статистическая механика черных дыр одна из наиболее удивительных и быстро развивающихся областей физики черных дыр. В тео­рии гравитации Эйнштейна энтропия черной дыры является чисто геометри­ческой величиной. В реальных термодинамических системах энтропия есть логарифм числа микроскопических состояний, отвечающих данному набору ма­кроскопических параметров. Возникает вопрос: обладает ли черная дыра ми­кроскопическими степенями свободы, подсчет которых воспроизводит энтропию Бекенштейна-Хокинга?

Назовем основные причины, почему мы интересуемся проблемой энтропии черных дыр в данной диссертации.

Во-первых, объяснение микроскопического происхождения энтропии черных дыр важно для понимания теории квантовой гравитации. Вычисления энтропии определенного класса черных дыр в теории струн рассматриваются как одно из самых важных достижений в теоретической физике последних лет. Однако, хотя этой теме посвящены сотни публикаций, до сих пор остается ряд открытых вопросов (см. ниже), которые стимулируют дальнейшие исследования.

Во-вторых, конечнотемпературная теории поля вблизи черных дыр имеет ряд интересных особенностей, вызванных тем, что локальная температура вблизи горизонта дыры стремится к бесконечности из-за сильного ультрафиолетового сдвига. В результате, энтропия газа в узкой области планковского размера вблизи горизонта по порядку величины оказывается сравнимой с энтропией черной дыры. Чтобы понять, может ли данное наблюдение помочь в решении проблемы энтропии, методы конечнотемпературной теории поля при наличии черных дыр требуют специального исследования.

В рассуждениях, приведенных выше, мы рассматривали черные дыры как астрофизические объекты. Важно отметить, что в настоящий момент не мень­ший интерес вызывает и физика микроскопических черных дыр. Если, как предсказывается в некоторых сценариях с дополнительными измерениями [26], [27], фундаментальный планковский масштаб имеет порядок 1 Tev, черные дыры с массой в несколько Tev смогут рождаться при столкновении частиц на ускорителях будущего поколения [28] или в атмосфере Земли при прохожде­нии сквозь нее высокоэнергетичных космических лучей [29]. Скорость рождения черных дыр на LHC оценивается как одно событие в секунду [28]. Верна ли эта смелая гипотеза или нет - покажет будущее, однако обсуждение черных дыр в рамках экспериментальных программ на ускорителях уже стало фактом.

Прежде чем излагать содержание диссертации, мы сделаем краткий обзор результатов по исследованию проблемы энтропии черных дыр. Начнем с про­стой оценки и рассмотрим массивную статическую нейтральную черную дыру с массой *М* порядка 109 масс Солнца. Учитывая, что *Л* = 1б7г*G2M2,* по фор­муле (2) получаем, что ее энтропия имеет порядок 1095. Это на восемь поряд­ков больше, чем энтропия видимой части Вселенной (имеется в виду энтропия реликтового фона с температурой 2,7 А" в пространстве размером 1028 см)! Картина усложняется тем, что в классической теории такая черная дыра есть просто пустое пространство с сильным гравитационным полем и ничего бо­лее. Таким образом, энтропия черных дыр это одна из тех фундаментальных проблем, разрешение которых требует отхода от классической гравитации.

Если условно поделить поверхность горизонта на ячейки планковского раз­мера *I* ~ *y/G,* то, согласно (2), *SBH* совпадает по порядку величины с лога­рифмом числа способов разместить по этим ячейкам знаки ”+” и По­

явление в этой оценке планковского масштаба не случайно. Оно указывает на то, что разумное микроскопическое объяснение энтропии черной дыры должно основываться на квантовой гравитации. Более того, воспроизведение *SBH* мето­дом статистической механики следует рассматривать как очень нетривиальную проверку любой теории, претендующей на роль квантовой гравитации.

На данный момент наиболее перспективным кандидатом на эту роль явля­ется теория D-бран (теория струн). Как мы уже отмечали, одним из фундамен­тальных результатов в этой теории за последние годы является успешное вос­произведение *SBH* для экстремальных [30]-[32], около-экстремальных [33],[34], [35], а также некоторых других типов черных дыр [36]. Кроме этого подхода и подхода, который будет излагаться в данной диссертации, существуют и дру­гие точки зрения на данную проблему. Одно из предложений, например, осно­вано на "петлевой” формулировке квантовой гравитации (loop quantum gravity) [37]. Другая интересная идея принадлежит авторам [38], [39], показавшим, что вблизи любого горизонта Киплинга можно выделить конформную группу диф­феоморфизмов, чье вырождение совпадает с соответствующей энтропией *SBH.* Катализатором исследований в данном направлении послужила работа Стро- минджера [40].

Каждый из перечисленных подходов кроме достоинств имеет свои трудно­сти. Например, подход [38], [39] никак не связан с термодинамикой черных дыр, поскольку он применим к области вблизи горизонта, где нет однознач­ного определения энергии, а температура хокинговского излучения стремится к бесконечности из-за ультрафиолетового смещения. Вычисления энтропии в теории струн [35] существенно используют суперсимметрию и поэтому огра­ничены специфическим классом черных дыр. Более того, метод этих расчетов не является универсальным, и каждая новая модель требует собственных вы­числений. Наконец, поскольку вычисления проводятся для некоторой дуальной теории в плоском пространстве, они не дают информации о реальных степенях свободы черной дыры и о том, где они локализованы.

Термодинамика черных дыр определяется уравнениями гравитации при низ­ких энергиях. Естественно предположить, что, если какая-либо теория кванто­вой гравитации способна объяснить энтропию черных дыр, то для понимания сути проблемы требуются не конкретные детали теории, а лишь те ее особенно­сти, которые существенны в области низких энергий. Это позволяет надеяться, что вместо полной теории квантовой гравитации, построение которой еще не завершено, механизм возникновения энтропии можно понять, используя упро­щенные модели.

Мы упомянули, что в классической гравитации черная дыра есть пустое про­странство в сильном гравитационном ноле. В квантовой теории ’’пустое про­странство” является физическим вакуумом, который, подобно сплошной среде, имеет сложную микроскопическую структуру, определяющую такие его макро­скопические свойства как энергия, поляризуемость и т.д. Эти свойства меня­ются под воздействием внешних факторов, например, граничных условий или фоновых полей. С другой стороны, квантовые эффекты в вакууме приводят к тому, что меняются классические уравнения для самих фоновых полей. В част­ности, если фоновое поле на классическом уровне не обладает никакой динами­кой, квантовые эффекты могут индуцировать для него нетривиальное действие. В 1968 году А.Д. Сахаров [41],[42] выдвинул идею о том, что гравитационное действие Эйнштейна может возникать целиком за счет квантовых вакуумных (петлевых) эффектов. Этот подход, который позднее исследовался многими авторами, получил название индуцированной гравитации. Механизм индуци­рованной гравитации имеет сходство с тем, как гравитация возникает в теории струн. Хотя в теории струн действие гравитационного поля и полей мате­рии получается из древесных диаграмм замкнутой струны, эти же диаграммы можно рассматривать как однопетлевые диаграммы открытых струн [43]. С этой точки зрения гравитация действительно есть чисто петлевой эффект.

Идея данной диссертации состоит в том, что именно микроскопическая струк-

тура физического вакуума в гравитационном поле черной дыры может объяс­нить происхождение энтропии Бекенштейна-Хокинга *Зви,* Предположение, что энтропия черной дыры может быть связана с квантовыми возбуждениями впер­вые появилась в работах [44],[45],[46], которые стимулировали большое количе­ство публикаций. Возможность использовать для этой цели индуцированную гравитацию была впервые отмечена Джекобсоном в неопубликованной работе [47]. Тот факт, что механизм генерации энтропии в индуцированной грави­тации может также реализовываться в теории открытых струн, обсуждался Хокингом, Мальдасеной и Строминджером в [48]. Остановимся подробнее на этих и связанных с ними работах.

Свойства физического вакуума, особенно при наличии гравитации, нетри­виальны. В состоянии вакуума всегда присутствуют нулевые колебали я фи­зических полей. Наблюдатель, который покоится относительно горизонта чер­ной дыры воспринимает возбуждения вакуума как тепловую атмосферу черной дыры [46]-[54]. Первые попытки связать энтропию черной дыры с ее тепловой атмосферой появились в работах Торна и Зурека [44] и т’Хоофта [45]. т’Хоофт [45] оценил тепловую энтропию, полагая, что температура атмосферы на бес­конечности совпадает с температурой излучения Хокинга *Т*и, и доказал, что энтропия пропорциональна площади поверхности горизонта *А*. Это вычисление выявило очевидную трудность, связанную с тем, что температура вблизи го­ризонта оказывается бесконечной за счет ультрафиолетового смещения. Чтобы избежать расходимостей т’Хоофт предположил, что поля исчезают в пределах некоторого расстояния от горизонта. Если расстояние выбрать порядка план- ковской длины, то энтропия тепловой атмосферы оказывается сравнимой с *SBf{.* Соответствующая модель получила название “brick wall model”.

Причина, по которой статический наблюдатель вблизи черной дыры воспри­нимает вакуум как смешанное состояние, связана с потерей информации о той части квантовой системы, которая локализована внутри горизонта. Бомбелли и др. [55], а также Средшщкий [56] показали, что даже в плоском простран­стве, когда наблюдения в вакууме ограничены частью системы, находящейся внутри области £2, возникает ненулевая энтропия, пропорциональная площади границы £2. Аналогичные результаты были также установлены для полей нену­левого спина [57] и для чистого состояния, не совпадающего с вакуумным [58]. Ненулевая энтропия появляется, поскольку “наблюдаемые” и “ненаблюдаемые” вакуумные флуктуации ’’перепутываются” (entangled) друг с другом, причем, в локальной теории ” перепутывай ие” происходит лишь на границе £2. Учиты­вал это свойство, в [55],[56] было предложено отождествить *SBH* с *entanglement* энтропией для квантовых флуктуаций, по разные стороны горизонта.

Фролов и Новиков [63] предложили связать энтропию черной дыры со степе­нями свободы, соответствующими квантовым состояниям внутри черной дыры. Матрица плотности этих степеней свободы может быть получена усреднением по полной системе состояний локализованных снаружи горизонта. Для мод вблизи горизонта эта матрица плотности является тепловой. По сути подход Фролова-Новикова близок к работам [44],[45],[55]. Отметим, что малые флук­туации полей (включая гравитационные), распространяющиеся в поле черной дыры, можно связать с деформацией геометрии черной дыры. Это можно про­демонстрировать явным образом в подходе "волновой функции черной дыры” [64]. Таким образом, подсчет состояний квантовых полей связан с подсчетом состояний квантовых возбуждений самой черной дыры.

Замечательное особенность черных дыр состоит в том, что entanglement эн­тропия, и энтропия тепловой атмосферы совпадают [59]-[62]. В дальнейшем мы будем называть эту энтропию статистическо-механической или просто тепло­вой энтропией. В общем случае связь между тепловой энтропией и энтропией черной дыры очень нетривиальна из-за расходимостей вблизи горизонта [65]. Сасскинд и Аглум [66], а также Каллан и Вильчек [61] указали на то, что эта расходимость может быть связана с ультрафиолетовыми расходимостями тео­рии и должна устраняться перенормировкой постоянной Ньютона. Это наблю­дение, однако, означает, что для проведения перенормировки требуется ввести бесконечную ’’голую энтропию”, которая не имеет никакого статистического обоснования. Именно по этой причине Джекобсон предположил [47], что про­блема энтропии может быть решена, если гравитация Эйнштейна целиком воз­никает за счет квантовых эффектов, в духе идей А.Д. Сахарова.

Мы привели ряд аргументов в пользу того, что развитие аппарата конеч­нотемпературной теории в стационарных фоновых полях общего вида является важной задачей, имеющей прикладное и фундаментальное значения. В насто­ящей диссертации мы сосредоточим внимание на следующих основных пробле­мах:

1. Разработка эффективных методов расчетов в стационарных фоновых по­лях общего вида и получение приближенний для свободной энергии системы В калибровочных теориях и гравитации.
2. Исследование свойств конечнотемпературной теории при наличии гори­зонтов Киллинга.
3. Исследование на этой основе проблемы статистического обоснования эн­тропии черных дыр в рамках гипотезы о том, что механизм возникновения энтропии связан со свойствами физического вакуума в гравитационном поле черной дыры.

Диссертация состоит из настоящего Введения, шести глав и Заключения. В первой половине диссертации излагается формализм и р'яд математических результатов, полученных автором, а во второй эти результаты используются для исследования проблемы энтропии черных дыр.

В первой главе мы рассмотрим квантовую теорию на стационарном фоне и представим новый метод исследования волновых уравнений для одночастичных возбуждений, развитый в работах [67], [68], [69]. Основная цель этой главы - изучение свойств спектров одночастичных возбуждений в пределе больших энергий. Нетривиальность поставленной задачи в том, что в самом общем слу­чае соответствующее уравнение на собственные значения является полиномом второго порядка от спектрального параметра. Поэтому методы, разработан­ные для стандартных задач на собственные значения, здесь не работают. Мы представим новый метод, позволяющий применять к данной задаче теорию эл­липтических операторов. Результаты [67], [68], [69] являются новыми матема­тическими результатами, которые могут быть положены в основу спектральной геометрии квадратичных операторных пучков. Они также имеют важные фи­зические приложения, в частности, к конечнотемпературной квантовой теории поля. Сам метод и спектральные асимптотики будут описаны в разделе 1.3. В разделе 1.4. мы покажем как использовать полученные результаты в случае частиц спина 1/2, а также в неабелевой калибровочной теории. В последнем разделе изучается связь между спектральной геометрией квадратичных опе­раторных пучков и ультрафиолетовыми расходимостями в соответствующей квантовой теории поля.

Вторая глава посвящена конечнотемпературной теории поля на стационар­ном фоне [67], [69], [70]. В разделе 2.2 результаты первой главы используются для получения асимптотического вида свободной энергии как функционала фо­новых полей в пределе больших температур. Эффективность метода иллю­стрируется в двух наиболее характерных случаях: в гравитации, для учета эффектов, связанных с вращением системы, и в калибровочных теориях, для описания эффектов экранировки в электрон-позитронной плазме. В разделе 2.3 исследуется евклидов подход к теории при конечной температуре. Основное внимание уделено трудностям ваковского разворота в случае фоновых полей общего вида. Сформулированы требования на спектр, при которых виковский разворот возможен, а сама процедура разворота в явном виде исследована в пределе больших температур. Раздел 2.4 посвящен изучению общих свойств энергии вакуума на стационарном фоне.

Как мы уже говорили, конечнотемпературная теория в пространствах с го­ризонтом Киллинга обладает рядом уникальных свойств. В частности, здесь приходится работать с классом многообразий с коническими сингулярностями на евклидовом горизонте. Для краткости такие многообразия в данной дис­сертации будут называться торнифолдами. Третья глава посвящена изучению классических и квантовых аспектов гравитации на торнифолдах. Прежде всего, в разделе 3.2 мы дадим определение координатно-инвариантных функционалов от метрики на торнифолдах [71], используя процедуру сглаживания кониче­ских сингулярностей. Наш способ дает возможность учесть сингулярный ха­рактер кривизны и имеет различные приложения, такие, например, как описа­ние топологических характеристик торнифолдов, вычисление энтропии черных дыр в теориях гравитации с высшими производными и другие. В разделе 3.3 на примере торнисфер мы рассмотрим глобальные свойства замкнутых торни­фолдов [72), [73]. Мы покажем, что величины конических дефектов и располо­жение конических сингулярностей должны удовлетворять определенному огра­ничению так, чтобы произведение голономий вокруг всех сингулярных точек было тривиальным. Используя этот результат, можно построить обобщение любого сферически-симметричного решения уравнений Эйнштейна, на случай произвольного числа космических струн, направленных радиально. В разделе 3.4 изучаются однопетлевые расходимости в квантовой теории на торнифол­дах. Геометрическая структура расходимостей в размерности *D =* 4 полно­стью установлена для полей спина 0, 1/2 и 1 [74], [75], [76]. Эти результаты имеют важное значение для определения методом евклидовой теории энтропии квантовых полей вблизи горизонта черной дыры. Мы также коснемся теории высших спинов на торнифолдах, рассматривая в качестве примера спины 3/2 и 2 [77]. Мы установим, что при наличии конических сингулярностей в кванто­вой теории таких спинов предельный переход, когда дефицит угла исчезает, не существует. Это связано с тем, что вблизи конических сингулярностей часть локальных изометрий нарушается, что приводит к появлению дополнительных состояний в спектре соответствующих операторов Лапласа. Третья глава за­вершается разделом 3.4, в котором мы рассматриваем вопрос об извлечении энергии черной дыры при помощи радиальных космических струн [78].

В четвертой главе мм переходим к непосредственному изучению конечно­температурной теории в пространствах с горизонтом Киплинга [75], [79], [80], [81], [82], [83]. В разделе 4.2 обсуждаются общие свойства одночастичных воз­буждений вблизи горизонта Киплинга. В разделах 4.3 и 4.4 представлены два способа регуляризации расходимости спектральной плотности одночастичных спектров. В разделе 4.3 используется регуляризация инфракрасного типа, ко­гда ограничивается объем ультрастатического пространства, что эквивалентно введению обрезания на некотором расстоянии вблизи горизонта. В разделе 4.4 показано, что расходимости также можно устранить в размерной регуляриза­ции и в регуляризации Паули-Вилларса. Для скалярных и спинорных полей геометрическая структура этих расходимостей получена в явном виде для про­извольного стационарного гравитационного поля с горизонтом Киллинга и не­нулевой поверхностной гравитацией [75]. На основе этих результатов и резуль­татов третьей главы в разделе 4.5 установлено, что расходимости в энтропии полей низших спинов, вычисленные с применением регуляризации ультрафио­летового типа, полностью эквивалентны расходимостям, возникающим за счет конических сингулярностей в евклидовой теории. Тем самым установлено со­ответствие между каноническими определениями в рамках статистической ме­ханики при наличии горизонтов Киллинга и определениями евклидовой теории. Данное свойство позволяет относиться к расходимостям энтропии квантовых полей вблизи черной дыры как к расходимостям ультрафиолетового типа. В разделе 4.6 мы докажем общее утверждение, что для полей, не имеющих неми­нимальной связи с кривизной, расходимости энтропии полностью устраняются перенормировкой констант в эффективном гравитационном действии [79], [77], [76], [75]. В случае неминимальных связей преренормировка также возможна, если учесть непосредственный вклад полей в энтропию черной дыры.

Проблема энтропии черных дыр в теории индуцированной гравитации [84], [85], [86], [87], [88], [81], [89], [90], [91], [92] рассматривается в пятой главе. В раз­деле 5.2 представлены модели индуцированной гравитации, где действие Эйн­штейна целиком возникает за счет эффектов поляризации вакуума невзаимодей­ствующими массивными полями (конституентами) со спинами 0, 1/2 и 1. Пока­зано, что существуют модели, в которых индуцированная постоянная Ньютона Gind и индуцированная космологическая константа Aind не содержат ультрафи­олетовых расходимостей. Такие модели неизбежно включают конституенты, имеющие неминимальные связи с кривизной. Цель следующих двух разделов в том, чтобы продемонстрировать, что в пределе, когда кривизна пространства

мала по сравнению с массами конституентов, энтропия Бекенштейна-Хокинга черной дыры дается универсальной формулой

= **

**ind**



Здесь *S* - суммарная тепловая энтропия всех конституентов вблизи горизонта черной дыры, a *Q* - среднее значения нетеровского заряд а. на горизонте, отве­чающее неминимальным связям конституентов. В (3) расходимости в тепло­вой энтропии *S* полностью компенсируются расходимостями в *Q.* Формула (3) универсальна. Она не зависит от модели конституентов и справедлива для неэкстремальных вращающихся черных дыр (см. раздел 5.3} и заряженных черных дыр (см. раздел 5.4). Случай заряженных черных дыр изучается в разделе 5.4 на примере индуцированной теории Эйнштейна-Максвелла в трех измерениях, где можно добиться полного сокращения всех ультрафиолетовых расходимостей. Результаты затем обобщаются на теорию в четырех измере­ниях. В разделе 5.5 мы обсуждаем возможность того, что в индуцированной те­ории масштаб, где проявляются эффекты квантовой гравитации, может быть существенно ниже планконской шкалы [89]. Это возможно при большом чи­сле конституентов. Раздел 5.6 посвящен проблеме энтропии черных дыр в двух измерениях [90], [91] и моделям индуцированной гравитации в форме теории Ли- увипля [92]. Особенность этой теории состоит в том, что основную роль здесь играют безмассовые конституенты. Нетеровский заряд *Q* в (3) в таких моделях является константой и энтропия 2-мерной черной дыры полностью определяется энтропией безмассовых полей.

В отличие от 5, величина *Q* в формуле (3) не имеет смысла энтропии. По­этому в шестой главе интерпретация вычитания *Q* в (3) дана с точки зрения статистической механики. Прежде всего, в разделе 6.2 показано, что в про­странстве с горизонтом Киплинга существует два определения энергии. Энер­гия может быть определена канонически, как гамильтониан системы *Ті.* Можно также определить энергию *Е* в терминах тензора энергии-импульса, получае­мого вариацией по метрике. Вариации энергии *£* полей материи снаружи чер­ной дыры входят в первый закон термодинамики черной дыры. Величины *%* и *Е* отличаются на полную дивергенцию, которая сводится к поверхностному слагаемому на горизонте. Оказывается, что в случае полей с неминимальной связью *%* — *£ — ThQ,* см. [93]. Используя это свойство, в разделе 6.3 показано, что энтропию Бекенштейна-Хокинга в индуцированной гравитации можно свя­зать с вырождением спектра масс черной дыры [85]. В основе этого вывода

лежит предположение, что квантовые возбуждения конституентов приводят К флуктуациям массы черной дыры. Если масса черной дыры *М* на простран­ственной бесконечности фиксирована, то вариация массы *Ми* = *М* — *£* опре­деляется изменением энергии *£* конституентов снаружи черной дыры. Таким образом, спектр масс черной дыры *Мд* эквивалентен спектру *£.* Чтобы теперь перейти от распределения но энергиям к распределению, определяемому спек­тром канонической энергии *Ті,* нужно учесть, что *£ = 71 — 'ThQ*■ Это факт объясняет вычитание Q в (3), В разделе 6.4 представлена также другая точка зрения на формулу (3). Здесь энтропия черной дыры интерпретируется как entanglement entropy или мера потери информации о состояниях конституентов под горизонтом черной дыры [94]. Поскольку критерием здесь опять служат изменения энергии £, обе точки зрения не противоречат друг другу.

В заключении перечислены основные результаты, выносимые на защиту.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Ла­боратории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ, в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН, в Институте Ядерных Исследований РАН (г. Москва), в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва), в Обсерватории Парижа (Медон, Франция), в университетах в городах Ереван (Армения), Едмонтон, Виктория, Виннипег, Ватерлоо (Канада), Тур (Фран- . ция), Неаполь, Тренто (Италия), Мюнхен (Германия). Также по результатам диссертации были представлены доклады на следующих международных кон­ференциях и совещаниях: канадская конференция по космологии и астрофизике (Калгари, 1997), "Black Holes: Theory and Mathematical Aspects” (Банф, 1997), "Quantum Field Theory under Influence of External Conditions” (Лейпциг, 1998), "Quantum Gravity and Constrained Dynamics" (Сардиния, 1999), "Quantization, Gauge Theory, and Strings” (Москва, 2000), "Квантовая гравитация и супер­струны” (Дубна, 2001), Зя Международная сахаровская конференция по физике (Москва, 2002). Автором был прочитан цикл лекций на Международной кон­ференции "Quantum Gravity and Spectral Geometry” (Неаполь, 2001). По теме диссертации опубликовано 28 работ.

**Заключение**

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Развит новый подход к исследованию класса нелинейных спектральных за­дач - квадратичных операторных полиномов, имеющих вид (w2—*Ь(ш))фы =* О, где *фи -* волновая функция, *и* - вещественный спектральный пара­метр и *L(lj)* - положительный эллиптический оператор второго порядка, действующий в векторных расслоениях и зависящий квадратично от *и.*

і

Метод состоит в определении спектра ***и*** по спектру оператора ***L(uj)*** и применим к системам с непрерывным и дискретным спектрами. Пока­зано, что асимптотика спектральной плотности для данных квадратич­ных операторных полиномов ведет себя также как асимптотика спектраль­ной плотности эллиптического оператора второго порядка. Введено поня­тие псевдо-следа - функции *K(t)* = где *t* > 0, и суммирование

идет по всему спектру. Показано, что при малых *t* асимптотика *К (і)* имеет вид *K(t)* ~ *tn~d^2an,* где а„ определяются коэффициентами an(w) асимптотического разложения следа TV e-tL^ ~ £ntn~<^2a„(aj). Соотно­шение между *ап* и *ап* (w) приведено в явном виде.

1. Получена высокотемпературная асимптотика свободной энергии *F* системы на внешнем стационарном калибровочном и гравитационном фоне общего вида. Эта асимптотика полностью определяется коэффициентами сц, раз­ложения *K(t).*
2. Найдена связь между коэффициентами асимптотического разложения следа

ядра теплопроводности оператора *Р =* + *L(id0)* в D-мерном стацио­

нарном пространстве и коэффициентами о„ (D — 1)-мерной нелинейной спектральной задачи с оператором *Ь(и>).* На основе этих результатов по­казано, что в пространстве-времени размерности *D* — 2т, коэффициент am, который фигурирует в асимптотике псевдо-следа *К (і),* совпадает с коэффициентом *Ат* теплового ядра D-мерного оператора *Р.*

1. Показано, что расходимости в энтропии квантовых полей вблизи гори­зонта черной дыры полностью устраняются стандартной перенормиров­кой постоянной Ньютона и других констант в эффективном гравитацион­ном действии. Данный результат справедлив, если поля не имеют неми­нимальной связи с кривизной.
2. Построен ряд моделей индуцированной гравитации , в которых гравита­ционное действие полностью возникает в пределе низких энергий из эф­фективного действия квантовых полей (конституентов). В пространстве- времени *D =* 4 построена индуцированная гравитация в форме теории Эйнштейна и в ней исследована энтропия черных дыр Шварцшильда и Керра. В *D* = 3 построена индуцированная теория Эйнштейна-Максвелла с отрицательной космологической постоянной и исследована статистиче­ская механика заряженных черных дыр. В *D* = 2 исследована статистиче­ская механика черных дыр в индуцированной гравитации в форме теории Лиувилля.
3. Показано, что в индуцированной гравитации в перечисленных выше мо­делях механизм возникновения энтропии черных дыр имеет универсаль­ный характер: он не зависит от конкретно выбранной модели, т.е., от вида конституентов и их параметров, не зависит от типа черной дыры, ее углового момента и электрического заряда, не зависит от размерно­сти пространства-времени *£>,* по крайней мере, если *D* > 3. Энтропия Бекенштейна-Хокинга *SBH* неэкстремальной черной дыры в индуцирован­ной гравитации всегда имеет вид *SBH* — *S* — Q, где *S* - тепловая энтропия конституентов вблизи горизонта дыры, a *Q ~* нетеровский заряд, связан­ный с наличием в действии конституентов слагаемых с неминимальной связью.
4. Показано, что в общем случае энергия *£* и гамильтониан *Н* полей материи во внешней области черной дыры не совпадают и имеют разный смысл. *%* определяет каноническую эволюцию системы вдоль временилодобного поля Киллинга, а *£* фигурирует как энергия в первом законе термодина­мики черных дыр. Для полей с неминимальной связью разность *Н — £* сводится к интегралу по поверхности горизонта и определяется нетеров- ским зарядом, *7І* — *£* = *THQ.* Выражение для *Q* найдено в общем виде для теории гравитации с высшими производными. Первый закон термодина­мики черных дыр в таких теориях, полученный ранее другими авторами,

обобщен на случай слабых, но произвольных полей материи.

1. Учитывая связь между *7i, £* и *Q,* предложены две возможные дополня­ющие друг друга интерпретации энтропии Бекенштейна-Хокинга *SBH* в индуцированной гравитации. Согласно первой интерпретации, *SBH* мо­жет быть связана с вырождением спектра массы черной дыры при усло­вии, что полная масса системы на бесконечности фиксирована. Энтропия *SBH* может также рассматриваться как мера потери информации о кон- ституентах индуцированной гравитации внутри горизонта черной дыры, которая определяется квантовыми корреляциями между состояниями с по­ложительной и отрицательной энергией *£.*
2. На многообразиях с коническими сингулярностями предложен способ опре­деления координатно-инвариантных функционалов, зависящих полиноми­ально от кривизны. С его помощью дан альтернативный вывод энтропии черных дыр в теориях гравитации с высшими производными и получены явные выражения для числа Эйлера и других топологических инвариан­тов в присутствии конических сингулярностей.
3. Определена структура и явно найдены первые коэффициенты асимпто­тического разложения ядра теплопроводности эллиптических операторов, действующих на векторных расслоениях над многообразиями с кониче­скими сингулярностями. Тем самым определена геометрическая форма однопетлевых расходимостей вблизи конических сингулярностей для по­лей разных спинов.

П. Исследовано соответствие в случае стационарного (но не обязательно ста­тического) гравитационного фона общего вида между однопетлевым эф­фективным действием *We,* которое определяется функциональным инте­гралом в евклидовой гравитации, и свободной энергией системы, *F*, полу­чаемой суммированием по модам. Сформулированы условия, при которых существует связь между *We* и *F,* а сама связь установлена в явном виде. Соответствие между *We* и *F* также исследовано при наличии горизон­тов Киллинга. В частности, показано, что существуют регуляризации, в которых расходимости *F,* возникающие вблизи горизонта, полностью со­впадают ультрафиолетовыми расходимостями в *We,* которые появляются в евклидовой теории за счет конических сингулярностей.

1. Дано описание торнисфер - сферических поверхностей с коническими син­гулярностями. На их примере продемонстрировано, что введение кониче­ских сингулярностей требует в общем случае выполнения определенных глобальных условий. Любая торнисфера может быть изометрично вло­жена в плоское 3-мерное пространство с соответствующим числом беско­нечно тонких радиально направленных из одной точки космических струн. Глобальное условие состоит в том, что полное произведение голономий вокруг струн должно быть тождественным преобразованием. На основе использования торнисфер построены решения уравнений Эйнштейна, опи­сывающие пространство-время с произвольным числом радиально напра­вленных струн и обобщающие известные сферически-симметричные ре­шения.
2. Показано, что за счет квантовых эффектов поперечные степени свободы струны, пересекающей черную дыру, возбуждаются тепловым образом и распространяются вдоль струны на бесконечность. Это приводит к потере энергии черной дырой, причем, данный процесс можно интерпретировать как эффект Хокинга в 2-мерной гравитации, индуцированной на мировом листе струны. Показано, что скорость потери энергии вдоль одной струны сопоставима со скоростью потери энергии за счет обычного хокинговского излучения, поэтому для *N* струн потеря энергии в *N* раз превышает эф­фект Хокинга. Максимально возможное значение *N* для GUT струн 103, а для электрослабых струн 1031.

В заключении я хотел бы выразить искреннюю благодарность всем моим со­авторам и особенно С.Н. Солодухину, В.П. Фролову и А.И. Зельникову за пло­дотворное сотрудничество. Я также искренне благодарен В.Г. Кадышевскому, А.Т. Филиппову и Д.И. Казакову за внимание к моей работе и создание бла­гоприятных условий для ее выполнения. Наконец, я признателен Российскому Фонду Фундаментальных Исследований за финансовую поддержку на протяже­нии ряда лет.