На правах рукописи

Дронов Алексей Константинович

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОПЕРАТОРОВ НА КОНУСАХ И ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ БАЗИСОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Ростов-на-Дону–2019

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Научный руководитель: *Мелихов Сергей Николаевич,*
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики

Официальные оппоненты: *Смолянов Олег Георгиевич,*
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
профессор кафедры теории функций и функционального анализа

Шерстюков Владимир Борисович,
доктор физико-математических наук,
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
доцент кафедры высшей математики

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

Защита состоится «19» июня 2019 г. в 17-00 на заседании диссертационного совета Д 212.208.29 при ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет» по адресу: 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Южного федерального университета по адресу: г. Ростов-на-Дону, ул. Р.Зорге, 21-ж, и на сайте Южного федерального университета по адресу:
http://hub.sfedu.ru/diss/announcement/af45b7c9-e99f-461b-8c24-824b9219cd4d/

Автореферат разослан "   "   2019 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д 212.208.29   Кряквин В. Д.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССЕРТАЦИИ

Актуальность исследования. Интерес к исследованию линейных топологических пространств обусловлен развитием в последние несколько десятилетий ряда разделов естествознания, в которых применяются функции и обобщенные функции, допускающие реализацию в виде различных классов топологических векторных пространств. Зачастую эти пространства не выходят за рамки ядерных пространств Фреше. В этой связи возникают вопросы, связанные с геометрией таких пространств, исследовать которые помогает изучение специальных последовательностей элементов (базисных, минимальных и т.д.). В частности, возникают вопросы о существовании базиса в пространствах Фреше, их подпространствах, факторпространствах и дополняемых подпространствах.

Вопрос о наличии базиса во всяком дополняемом подпространстве ядерного пространства Фреше с базисом впервые был поставлен А. Пелчинским в 1970 году. Поскольку в силу теоремы Дынина-Митягина всякий базис в ядерном пространстве является абсолютным, эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте также является пространством Кёте. До сих пор эта проблема остается открытой, хотя она была положительна решена для многих частных случаев в работах Б. С. Митягина, Г.М. Хенкина, Е. Дубинского, Д. Фогта, Й. Крона, В.П. Кондакова, А.И. Ефимова. Вместе с тем Я. Таскиненом было доказано, что утверждение гипотезы Пелчинского нельзя усилить, заменив ядерное пространство Фреше пространством Фреше-Шварца.

В работах Б.С. Митягина и Г.М. Хенкина утверждение гипотезы Пелчинского было доказано для пространств степенных рядов конечного типа. При этом впервые был применен подход, использующий интерполяционные методы. Д. Фогтом и Е. Дубинским существование базиса в каждом дополняемом подпространстве было доказано для ручных пространств степенных рядов бесконечного типа. Позже Й. Крон, используя метод Б.С. Митягина, обобщил обобщил оба указанных результата. Также Д. Фогт, опираясь на метод декомпозиции А. Пелчинского, доказал, что каждое пространство Фреше E изоморфно устойчивому пространству степенных рядов бесконечного типа $l_2(e^{t_r \alpha_n})$, если E изоморфно дополняемому подпространству в $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ и при этом $l_2(e^{t_r \alpha_n})$ изоморфно некоторому дополняемому подпространству в E.

В работах А.И. Ефимова и В.П. Кондакова существование безусловного базиса в каждом дополняемом подпространстве доказано для блочных счетно-гильбертовых пространств Кёте с правильной матрицей, определяющейся последовательностью весовых функций, которые обладают свойством упорядоченности (либо обратной упорядоченности) парных композиций с обратными функциями.

Отметим, что в последние 30 лет теория дополняемых подпространств различных локально выпуклых пространств с базисом интенсивно развивается. Она находит приложения в теории операторов свертки в пространствах аналитических функций при изучении проблемы существования линейного непрерывного правого обратного к оператору свертки в таких пространствах, в теории представляющих систем экспонент, в частности, в задаче о наличии линейного непрерывного правого обратного к оператору представления рядами экспонент и их обобщений элементов различных функциональных пространств.

Целью диссертационной работы является доказательство существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_1) либо (d_2). Техника доказательства опирается на интерполяционные свойства операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей.

Для достижения цели диссертации необходимо было решить следующие задачи:

- доказать интерполяционные теоремы для троек конусов, вложенных в пространства числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом.
- применить полученные результаты к доказательству существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства числовых последовательностей с правильной матрицей и свойством (d_1).
- доказать аналогичное утверждение для ядерного пространства с правильной матрицей и свойством (d_2).

Объект исследования — интерполяционные тройки конусов банаховых троек числовых последовательностей и ядерные пространства Кёте.

Предмет исследования — интерполяционные свойства операторов, ограниченных на конусах банаховых пространств числовых последовательностей, а также их применение к исследованию подпространств ядерных пространств Кёте.

Гипотеза исследования заключается в том, что интерполяционные свойства операторов, ограниченных на конусах пространств числовых последовательностей, могут быть успешно применены для доказательства существования базиса в подпространстве ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_1) либо (d_2).

Новизна диссертационного исследования заключается в следующем:

- впервые используются интерполяционные свойства операторов, ограниченных не на всем банаховом пространстве, а на вложенных в пространства конусах.

- доказаны интерполяционные теоремы для троек конусов в пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом.

- полученные интерполяционные теоремы успешно применены для доказательства существования базиса в дополняемых подпространствах ядерных пространств Кёте с правильной матрицей и свойствами (d_1) или (d_2). Впервые при этом техника доказательства опирается на интерполяционные свойства конусов, вложенных в ассоциированные банаховы пространства.

Основные положения, выносимые на защиту:

- Условия интерполяционности троек конусов в пространствах последовательностей.

- Всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_1) обладает базисом.

- Всякое дополняемое подпространство ядерного пространства Кёте с правильной матрицей и свойством (d_2) обладает базисом.

Теоретическое и практическое значение полученных результатов. Результаты могут быть полезны для специалистов, изучающих геометрию пространств Фреше.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались на Международной конференции «Современные проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV» (27 апреля - 1 мая 2014, Ростов-на-Дону, Россия); Международной научной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения» (26 апреля - 1 мая 2015, Ростов-на-Дону, Россия); Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (12-18 июля 2015, с. Цей, Россия); Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» (3-8 июля 2017, с. Цей, Россия); на семинаре кафедры математического анализа (руководитель — д.ф.-м.н., профессор А.В. Абанин) Института математики, механики и компьютерных наук ЮФУ, семинаре кафедры алгебры и функционального анализа (руководитель — д.ф.-м.н., профессор И.В. Орлов) Таврической академии Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 6 печатных изданиях [1]-[6], 5 из которых входят в перечень ВАК Минобрнауки РФ, и в тезисах докладов [7]-[10].

В работах [1], [3] и [4] В.М. Каплицкому принадлежит общий план исследования, включая схему доказательства основного утверждения в [1]. Автору принадлежит реализация предложенного плана.

Структура диссертации.

Диссертация содержит Введение, три главы и список литературы. Полный объем диссертации составляет 108 страниц. Список литературы содержит 87 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение раскрывает сущность рассматриваемой проблемы, ее значение для теории базисов пространств Фреше. Формулируются задачи исследования, научная новизна, а также положения, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации приведены основные определения теории базисов в пространствах Фреше, а также хорошо известные и некоторые вспомогательные утверждения этой теории. Большая часть утверждений приводится без доказательства.

В параграфе 1.4 вводится понятие правильного базиса. Впервые такие базисы были введены в работах М.М. Драгилева. Правильные абсолютные базисы в пространствах Фреше обладают свойствами, аналогичными свойствам степенного базиса пространств аналитических функций, и позволяют более эффективно использовать аппарат аппроксимативных размерностей.

Определение 1.8. *Базис* (x_n) *в пространстве Фреше* X *называется правильным, если существует определяющая система полунорм* $(\|\cdot\|_p)$ *такая, что отношение* $\frac{\|x_n\|_p}{\|x_n\|_{p+1}}$ *является убывающей функцией* n.

В параграфе 1.5 вводятся пространств Кёте, обладающие свойствами (d_1) и (d_2).

Определение 1.9. *Говорят, что пространство Кёте* $l_1[a_r(n)]$ *с правильной матрицей принадлежит классу* $(d_i), i = 1, 2,$ *если выполняется условие:*

$$\exists p \ \forall q \ \exists r \ \exists c(q,r) : a_q^2(n) \leqslant c(q,r) a_p(n) a_r(n), i = 1,$$

$$\forall p \ \exists q \ \forall r \ \exists c(p,r) : a_p(n) a_r(n) \leqslant c(p,r) a_q^2(n), i = 2.$$

Во второй главе приведены вспомогательные теоремы об интерполяционных свойствах операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей. Эти теоремы имеют ключевое значение при доказательстве основного результата. В первых четырех параграфах этой главы изложены основные определения теории интерполяции линейных ограниченных операторов в её классической постановке.

Существуют различные методы построения интерполяционных пространств. В диссертации используется классический вещественный интерполяционный метод, опирающийся на так называемый K-функционал Петре:

$$K(t;x;E_0,E_1)=\inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\ x_0\in E_0, x_1\in E_1}}\{\|x_0\|_{E_0}+t\|x_1\|_{E_1}\},$$

где $t>0$, (E_0,E_1) — банахова пара.

Множество элементов из суммы пространств E_0+E_1 (см. п. 1.1), удовлетворяющих неравенству

$$\Phi(K(t,x;E_0,E_1))=\left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}K(t,x;E_0,E_1))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где функционал Φ действует на пространстве положительных измеримых функций по правилу:

$$\Phi(h)=\left(\int\limits_0^\infty (t^{-\theta}h(t))^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}},$$

образует промежуточное пространство банаховой пары (E_0,E_1), которое обозначают через $K(E_0,E_1)$. При этом для любых банаховых пар (E_0,E_1) и (F_0,F_1) банахова тройка $(E_0,E_1,K(E_0,E_1))$ интерполяционна относительно тройки $(F_0,F_1,K(F_0,F_1))$.

В следующих трех параграфах второй главы формулируется постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, на вложенных в пространства конусах. По аналогии с классическим случаем вводятся понятия пары конусов, промежуточного конуса и тройки конусов, интерполяционных относительно некоторой банаховой тройки.

Определение 2.5. *Пусть конус $Q\subset E$ является промежуточным для пары $\overline{Q}$. Если существует такая постоянная $c=c(\overline{E},\overline{F},\overline{Q},E,F,Q)>0$, что для всех $T\in L(\overline{Q},\overline{F};M_0,M_1)$ справедливо неравенство*

$$\|Tx\|_F\leqslant c\max\{M_0,M_1\}\|x\|_E \text{ при } x\in Q,$$

то будем говорить, что тройка конусов (Q_0,Q_1,Q) является интерполяционной (или обладает интерполяционным свойством) по отношению к банаховой тройке (F_0,F_1,F).

Понятие равномерного интерполяционного свойства вводится при рассмотрении вместо фиксированной интерполяционной тройки конусов некоторого семейства таких троек.

Определение 2.6. *Пусть семейство* $\mathcal{M} = \{Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q_\alpha\}, \alpha \in A$ *удовлетворяет условиям:*

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ *справедливы вложения:* $Q_0^\alpha \subset E_0, Q_1^\alpha \subset E_1$, $Q^\alpha \subset E$, *причем конус* Q^α *— промежуточный конус для пары* (Q_0^α, Q_1^α)*;*

2) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ *тройка* $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F)*.*
В этом случае будем говорить, что семейство $\mathcal{M}$ *обладает интерполяционным свойством по отношению к тройке* (F_0, F_1, F)*.*

Определение 2.7. *Если для всех троек конусов из* $\mathcal{M}$ *может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$*, то будем говорить, что семейство* $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F)*.*

В параграфе 2.6 приводится критерий интерполяционности троек конусов для случая интерполяционных троек, в которых промежуточные пространства получены с помощью метода вещественной интерполяции.

Теорема 2.4. *Пусть* $E = K_\Phi(E_0, E_1)$*,*$F = K_\Phi(F_0, F_1)$*. Пусть задано семейство* $\mathcal{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}$ *троек конусов, и для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *конусы* Q_0^α, Q_1^α *вложены в пространства* E_0, E_1 *соответственно,* Q^α *— конус, вложенный в пространство* E *и являющийся промежуточным для пары* $\overline{Q^\alpha} = (Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$*. Пусть существует постоянная* $c = c(\overline{E}, \overline{F}) > 0$ *такая, что для любого* $\alpha \in \mathrm{A}$ *и любого оператора* $T \in L(\overline{Q^\alpha}, \overline{F})$*, удовлетворяющего условиям* $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ *при* $x \in Q_i^\alpha$ $(i = 0, 1)$*, имеет место неравенство:*

$$K(t, Tx; \overline{F}) \leqslant c(\overline{E}, \overline{F}) \max\{M_0, M_1\} K(t, x; \overline{E})$$

при $x \in Q^\alpha$*. Тогда семейство* $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F)*.*

В п. 2.7 представлено несколько примеров интерполяционных троек конусов в банаховых пространствах числовых последовательностей. Соответствующие результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 2.8. [5] Пусть $E_1 = l_\infty, E_0$ — идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0$, (F_0, F_1) — некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$, $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ множество конусов в ω^+ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ — нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Теорема 2.9. [5] Пусть $E_0 = l_\infty, E_1$ — идеальное банахово пространство числовых последовательностей такое, что $E_1 \subset E_0$, (F_0, F_1) — некоторая банахова пара, $E = K_\Phi(E_0, E_1)$, $F = K_\Phi(F_0, F_1)$. Пусть $\mathcal{A}$ множество конусов в ω^+ такое, что любой конус $Q \in \mathcal{A}$ — нижняя полурешетка и $e \in Q$. Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Соответствующие оценки для K-функционала опираются на тождество

$$x = \min(x, y) + (x - y)_+,$$

справедливое во всякой векторной решетке. Чтобы его применить непосредственно важно наличие так называемой порядковой единицы в одном из конусов, вложенных в банахову пару.

В параграфе 2.8 представлен пример тройки конусов, не наследующей интерполяционное свойство. Именно, рассмотрим банаховы тройки пространств числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ и $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$, где

$$a_1(n) = 1, \quad a_0(n) = \frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{1}{n^\theta},$$
$$b_1(n) = n, \quad b_0(n) = 1, \quad b(n) = n^{1-\theta},$$

$0 < \theta < 1$, тройка конусов. $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ является интерполяционной относительно $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$ согласно одному из критериев интерполяционности. Пусть

$$C(\alpha) = \{x \in \omega^+ : \alpha(n)x(n) \in C_1\} \cup \{0\},$$

где $\alpha \in \omega^+$ и C_1 — множество невозрастающих последовательностей, ограниченных снизу некоторой положительной постоянной (своей для каждой последовательности). Введем конус

$$Q = C(b_0) + C(b_1)$$

и рассмотрим тройку конусов $(c_0(a_0) \cap Q, c_0(a_1) \cap Q, c_0(a) \cap Q)$. В п. 2.8 доказывается, что $(c_0(a_0) \cap Q, c_0(a_1) \cap Q, c_0(a) \cap Q)$ относительно $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$ интерполяционным свойством не обладает и, следовательно, не наследует интерполяционное банаховой тройки $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$.

Имеется достаточно много работ, в которых рассматривается аналог теоремы Хана-Банаха на случай функционалов, действующих в конусах. В лемме 2.3 был предложен подход, приближенный к хорошо известной версии доказательства этой теоремы. Заметим, что лемма 2.3 является следствием указанных более общих результатов.

вместе с некоторыми вспомогательными утверждениями содержится основной результат главы.

В параграфе 2.9 сформулированы интерполяционные теоремы 2.10 и 2.11, аналогичные приведенным выше, для троек конусов вида $(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$ и $(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+)$, где E_i и E — пространства c_0 с весами, Q — конус со свойством нижней полурешетки. Предварительно доказаны следующие леммы.

Лемма 2.3 *Пусть $E = c_0$ и конус $Q \subset E^+$ обладает свойством нижней полурешетки. Пусть $T : E \to E$ — ограниченный линейный оператор такой, что*

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|, x \in Q.$$

Пусть $\delta > 0$ — фиксированное число, $N \in \mathbb{N}$ и $Q_{N,\delta}$ — конечномерный конус, определенный следующим образом:

$$Q_{N,\delta} = \{x = P_N y : y \in Q, \quad y(1) \geqslant \frac{1}{\delta}\|(I - P_N)y\|\}.$$

Тогда конус $Q_{N,\delta}$ обладает свойствами:

1) конус $Q_{N,\delta}$ — нижняя полурешетка;

2) если $x \in Q_{N,\delta}$, то

$$\|Tx\| \leqslant M^\delta \|P_N x\|,$$

где $M^\delta = M + \delta(M + \|T\|)$;

3) если $x \in Q \cap E^{++}$, то $P_N x \in Q_{N,\delta}$ при всех $N > N(x, \delta)$.

Лемма 2.4 *Пусть в вещественном векторном пространстве E задана полунорма p. Пусть L_0 — подпространство в E и $Q_0 \subset L_0$ — конус в L_0. Пусть f_0 — линейный функционал, определенный на подпространстве L_0 такой, что*

$$f_0(x) \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Q_0.$$

Пусть x_1 — вектор в E такой, что $x_1 \notin L_0$ и

$$L = \{x = y + \lambda x_1 : y \in L_0, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

$$Q = \{x = y + \lambda x_1 : y \in Q_0, \lambda \geqslant 0\}.$$

Тогда функционал f_0 может быть продолжен до линейного функционала f, определенного на подпространстве L, для которого справедливо неравенство:

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \textit{при} \quad x \in Q.$$

Опишем в нескольких словах подход, примененный к доказательству теоремы 2.10. Поскольку в пространстве c_0 нет упорядоченной единицы, тождество

$$x = \min(x, y) + (x - y)_+$$

нельзя применить непосредственно. Поэтому оценки $K-$функционала проводятся на специальным образом построенных конечномерных конусах Q_N, элементы которых аппроксимируют элементы основного конуса. Важную роль при этом играет лемма 2.3, в которой указана структура конусов Q_N и их свойства. Одновременно, чтобы воспользоваться тождеством

$$x = \min(x, y) + (x - y)_+,$$

возникает необходимость расширить конус Q_N до конуса $\widetilde{Q}_N$, обладающего свойством нижней полурешетки, и, кроме того, содержащего вектор $f_N \in c_0$, аппроксимирующий единицу. Последовательность $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ выбирается так, чтобы она сходилась к вектору e поточечно. Такие конусы $\widetilde{Q}_N$ можно построить с помощью одномерных расширений конуса Q_N. При этом также потребуется продолжать некоторые из возникающих в доказательстве линейных функционалов на конус $\widetilde{Q}_N$ с сохранением верхних оценок. Это можно сделать, используя лемму 2.4, представляющую собой версию теоремы Хана-Банаха для конусов. Для каждого конуса $\widetilde{Q}_N$, содержащего вектор f_N, аппроксимирующий единицу, можно применить тот же подход к оценке K–функционалов соответствующей пары конусов, зависящей от N, который применялся ранее, а затем в полученных таким путем неравенствах перейти к пределу при $N \to \infty$.

Заметим, что лемма 2.4 может рассматриваться как следствие более общих результатов, посвященных обобщению теоремы Хана-Банаха на случай функционалов, действующих в конусах.

Двойственное утверждение формулируется в теореме 2.10.

Теорема 2.10. *Пусть $E_i = c_0(a_i), F = c_0(b_i) (i = 0, 1), E = c_0(a), F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$, и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). Пусть $\mathcal{A}$ — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого конуса $Q \in \mathcal{A}$ выполняются условия:*

1) Q — нижняя полурешетка в ω;

2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в пространстве ω.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Формулировка двойственной теоремы 2.11 отличается только семейством троек конусов:

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

Третья глава состоит из четырех параграфов. В первом из них приведены обозначения и некоторые предварительные преобразования, упрощающие доказательство основных результатов. При этом используются свойства пространств Кёте из первой главе. Во втором и третьем параграфах доказываются основные результаты.

Доказательство опирается на так называемый метод «тупикового» пространства. Этот метод впервые был использован в работах в статье Б.С. Митягина, а затем широко применялся в работах В.П. Кондакова, В.П. Захарюты, Дж. Крона и др.

Сделаем несколько замечаний о доказательстве основных результатов работы, а также о причинах, по которым оказалось невозможным применить классические интерполяционные методы и возникла необходимость использовать интерполяционные свойства конусов.

Основная идея метода «тупикового» пространства состоит в том, что система элементов, которая должна быть базисом в F, строится как общий ортогональный базис двух гильбертовых пространств F_0 и F_∞ таких, что $F_\infty \subset F \subset F_0$ и F_∞ компактно и плотно вложено в F_0 (такой базис всегда существует). При этом, выбирая подходящим образом веса $a_0(n)$ и $a_\infty(n)$, всегда можно добиться того, что $F_0 \subset E_0 = l_2(a_0(n))$, $F_\infty \subset E_\infty = l_2(a_\infty(n))$, $E_\infty \subset E_r \subset E_0$ и для любого r тройка (E_0, E_∞, E_r) является интерполяционной тройкой гильбертовых пространств. Построенная таким образом система элементов всегда является полной минимальной системой в F, поэтому, она будет базисом в F, если соответствующие этой системе операторы частичных сумм P_n будут равностепенно непрерывны. Эти операторы ограниченны на образе проектора P, однако, вообще говоря, неограниченны в «крайних» пространствах, поскольку проектор P непрерывен в пространстве Фреше E, но, вообще говоря, не является непрерывным (ограниченным) оператором в «крайних» гильбертовых пространствах E_0 и E_∞. Операторы P_n, однако, оказываются ограниченными на некоторых конусах в пространствах E_0 и E_∞, которые естественным образом строятся по оператору $|P|$ (здесь $|P|$ — модуль оператора P в смысле теории векторных решеток). Возникающие конусы обладают многими хорошими дополнительными свойствами (например, они являются нижними полурешетками), которые позволяют использовать интерполяционные теоремы 2.10 и 2.11 для доказательства равностепенной непрерывности семейства $\{P_n\}$.

Теорема 3.1. *Пусть E — ядерное пространство Фреше с правильным базисом из класса (d_1), $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда F имеет абсолютный базис.*

Теорема 3.2. *Пусть E — ядерное пространство Фреше с правильным базисом из класса (d_2), $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда F имеет абсолютный базис.*

Одним из следствий доказанных результатов является справедливость гипотезы Бессаги для пространств из класса (d_1). Соответствующие утверждения опираются на результаты В.П. Кондакова и формулируются в параграфе 3.5.

Теорема 3.3. *В любом дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте типа (d_1) с правильным базисом существует базис, квазиэквивалентный базису ортов.*

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах, рекомендованных ВАК:

1. *В. М. Каплицкий, А. К. Дронов.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 424, С. 154-178.

2. *А. К. Дронов.* О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). // Владикавказский математический журнал. 2016. Т. 18, вып. 1, С. 9 - 20.

3. *В. М. Каплицкий, А. К. Дронов.* Интерполяционные теоремы для операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей. // Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки 2016. № 1, С. 17-20.

4. *В. М. Каплицкий, А. К. Дронов.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей, II. // Записки научных семинаров ПОМИ. 2017. Т. 456, С. 107-113.

5. *В. М. Каплицкий, А. К. Дронов.* О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_1). // Математический сборник. 2018. Т. 209, вып. 10, С. 50 - 70.

Другие издания:

6. *В. М. Каплицкий, А. К. Дронов.* Применение интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах, к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше. Математический форум. ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А. 2013. Т. 7 . С. 88–103.

7.*А. К. Дронов.* Интерполяция операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей и ее применение к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - IV», 27 апреля - 1 мая 2015, г. Ростов-на-Дону, Россия.

8. *А. К. Дронов.* Интерполяционные свойства семейства троек конусов в весовых пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю, и их применение к некоторым вопросам теории базисов в пространствах Фреше // Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V», 26 апреля - 1 мая 2015, г. Ростов-на-Дону, Россия.

9. *А. К. Дронов.* Существования базиса в дополняемых подпространствах ядерных пространств Фреше из классов Фреше (d_1) и (d_2) // Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 12-18 июля 2015, с. Цей, Россия.

10. *А. К. Дронов.* Интерполяция операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей // Международная конференция «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования», 3-8 июля 2017, с. Цей, Россия.