Деревенский Владислав Павлович. Матричные дифференциальные уравнения в базисе алгебр Ли : диссертация ... доктора физико-математических наук : 01.01.02.- Казань, 2000.- 276 с.: ил. РГБ ОД, 71 02-1/147-8

Министерство общего и профессионального образования

Российской Федерации

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

На правах рукописи

Деревенский Владислав Павлович

МАТРИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

УРАВНЕНИЯ В БАЗИСЕ АЛГЕБР ЛИ

(01.01.0.2 - дифференциальные уравнения)

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Казань-2000

-2-

ОГЛАВЛЕНИЕ

Условные обозначения 5

Введение 7

Некоторые сведения из теории алгебр Ли . 17

Глава I. Односторонние матричные линейные

дифференциальные уравнения 22

§1. Односторонние МЛОДУ. 1 в базисе алгебр Ли 22

1.1. Основные свойства 22

1.2. Экспоненциальное решение 29

1.3. Мультипликативно-экспоненциальное решение 33

1.4. МЛЛОДУ.1 в двумерном пространстве 35

1.5. МЛЛОДУ.1 в присоединенном матричном представлении 42

1.6. Линейные диффеоморфизмы 46

1.7. Приводимость МЛООДУ. 1 49

§2. Односторонние МЛОДУ. 1 общего вида 51

2.1. Общие свойства .51

2.2. Экспоненциальное решение однородного МЛОДУОВ.1 53

2.3. Мультипликативно-экспоненциальное решение 56

2.4. Линейные дифеоморфизмы 56

2.5. Приводимость однородного МЛОДУОВ.1 57

§3. Системы односторонних МЛОДУ. 1 58

3.1. Оператор Гаусса 58

3.2. Системы матричных односторонних

алгебраических линейных уравнений .....61

3.3. Интегрируемость систем односторонних МЛОДУ. 1 67

3.4. Система второго порядка 70

3.5. Линейные диффеоморфизмы

и приводимость однородных СМЛЛОДУ. 1 75

3.6. Односторонние системы общего вида 79

§4. Матричные линейные уравнения высших порядков 81

4.1. Разрешимость в квадратурах МЛОДУ.2 81

4.2. Некоторые свойства односторонних МЛОДУ.2 88

-З-

4.3. Односторонние уравнения третьего порядка 95

4.4. Матричные линейные уравнения высших порядков 100

4.5. Два типа разрешимости МЛЛОДУ.К 108

4.6. Линейная полиприводимость

матричных уравнений высших порядков 116

Глава II.Двусторонние матричные линейные

дифференциальные уравнения 118

§1. Двусторонние уравнения первого порядка 118

1.1. Редуцирование матричных уравнений 118

1.2. Интегрирование двусторонних МЛ ОДУ. 1 121

1.3. Один тип МЛОДУСДУ.1 127

§2. Системы МЛ ОДУ СДУЛ 130

2.1. Условия интегрируемости 130

2.2. Двумерная система МЛОДУСДУ.1 132

2.3. Пример 134

§3. МЛ ОДУ СДУ высших порядков 138

3.1. Факторизуемые матричные

двусторонние уравнения высших порядков 138

3.2. Пример 141

3.3. О МЛОДУСДУ высших порядков, эквивалентных

матричным системам с двусторонним умножением 145

3.4. Пример 151

Глава III. Нелинейные матричные

дифференциальные уравнения 158

§1. Квазилинейные МОДУ. 1 : 158

1.1. Определение и свойства квазилинейных уравнений 158

1.2. Экспоненциальное решение квазилинейного уравнения 165

1.3. Мультипликативно-экспоненциальное решение 168

1.4. Квазилинейное уравнение в базисе трехмерной

нильпотентной алгебры Ли 169

§2. Дифференциально-автоморфные уравнения 173

!

2.1. Определение и свойства

- 4-

дифференциально-автоморфных уравнений 173

2.2. ДАУ.1 в базисе разрешимых L2 и Z3 179

2.3. Неоднородное ДАУ.1 189

2.4. ДАУ.1 общего вида 190

2.5. Системы ДАУ.1 193

§3. Нелинейные уравнения высших порядков 196

Глава ІУ.Применение матричных дифференциальных

уравнений к исследованию скалярных ОДУ 200

§1. Линейные уравнения второго порядка 200

1.1. Скалярные Л ОДУ. 2 200

1.2. Связь ЛОДУ.2 и уравнения Риккати 207

1.3. ЛОДУ.2, порождаемые триангулируемыми системами ЛОДУ. 1 210

§2. Линейные уравнения третьего порядка 211

2.1. ЛОДУ.п в присоединенном представлении алгебр Ли 211

2.2. ЛОДУ.З в ПМП разрешимых Z3 216

2.3. Общий вид ЛОДУ.З в ПМП разрешимых Z3 222

2.4. ЛОДУ.З в ПМП простой некомпактной Г3 229

2.5. ЛОДУ.З в ПМП простой компактной Д3 234

2.6. ЛОДУ.З, порождаемые треугольной системой 238

2.7. Эндоморфные преобразования решений ЛОДУ 242

2.8. Полиприводимость ЛОДУ 244

§3. Системы скалярных дифференциальных уравнений 246

3.1. Системы однородных ЛОДУ 246

3.2. Кривая Монжа квазилинейного уравнения в частных

производных 250

3.3. Один вид квазилинейной скалярной системы 253

Заключение 260

Литература 262

. )

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги диссертационной работы, отметим основные ее результаты, соответствующие указанным во «Введении» целям и задачам. Вот наиболее существенные из этих результатов.

а) В терминах теории алгебр Ли установлены условия разрешимости в квадратурах матричных односторонних (ПЗ гл.1) и двусторонних (Т7) ЛОДУ. 1 и их систем (Т4, П6 гл.Н), односторонних ЛОДУ.2 (П27,28 гл.Н), ЛОДУ.З (П31 гл.1) и ЛОДУ.к (Т5,6 гл.1). Аналогичные утверждения сформулированы для двусторонних ЛОДУ.2 (П10 гл.Н), ЛОДУ.к (Т8), квазилинейных (С5Т9) и диф- ференциально-автоморфных (Т12) уравнений.

б) Найдены условия представимости в экспоненциальном и мультиплика­тивно-экспоненциальном видах односторонних МЛОДУ. 1 (Т2, 3) и квазилиней­ных ДУЛ (T9,10). Даны условия принадлежности алгебре Ли решения диффе- ренциально-автоморфного уравнения (ТІ 1).

в) Исследованы основные свойства левых и правых линейных однородных диффеоморфных преобразований множества частных решений односторонних ЛОДУ.1 (П8, 9, 17 гл.1) и их систем (П23, 24 гл.1).

г) Установлены критерии приводимости матричных односторонних ЛОДУ.1 (П10,18 гл.1) и их систем (П25 гл.1) к аналогичным уравнениям и систе­мам с постоянными матричными коэффициентами. Подобный же результат сформулирован для МЛОДУ .к (П35 гл.1).

д) Исследованы основные свойства некоторых видов матричных дифферен­циальных уравнений, обобщающих односторонние МЛОДУ. 1: МЛОДУ. 1 об­щего вида (§2 гл.1), двусторонних МЛОДУ. 1 (§1 гл.Н), квазилинейных МОДУЛ

**-261 -**

(§1 гл.Ш) и дифференциально-автоморфных ДУ.1 (§2 гл.Ш).

е) Указана возможность применения полученных результатов в теории ска­лярных ОДУ (гл.1У).

Разумеется, в диссертации не сказано «последнее слово» в такой большой, сложной и важной теории, какой является теория дифференциальных уравнений над ассоциативной алгеброй, вообще, и матричной алгеброй, в частности. Это математическое направление будет долго и интенсивно разрабатываться вширь и вглубь с использованием самого разнообразного аппарата. И, несомненно, в числе наиболее важных и эффективных методов исследования этих уравнений будут методы теории алгебр Ли. Как отмечалось во «Введении», её аппарат уже успешно используется в классической, релятивистской и квантовой механиках, теории оптимального управления и т.д., широко применяющих для описания различных процессов матричные и операторные уравнения, т.е. уравнения над алгебрами и кольцами. Еще шире диапазон применения скалярных уравнений и их систем, решения которых сводятся к интегрированию матричных ДУ.

Разумеется, значение таких уравнений будет существенно возрастать по ме­ре введения в научную практику более сложных видов эволюционных уравне­ний. Для описания, исследования и решения их потребуется вся мощь алгеб­раической теории, определяющей основные структурные свойства любых мно­гообразий, включая, конечно, и множества решений дифференциальных уравне­ний. Так что, теории дифференциальных уравнений над ассоциативными ал­гебрами, исследованию которых посвящена настоящая диссертация, предстоит долго жить и развиваться, способствуя прогрессу научной теории и практики.