



**Степанова Ирина Владимировна**

**СИММЕТРИИ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОДИФФУЗИИ  
ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ РЕЖИМОВ ТЕПЛОМАССООБМЕНА  
В БИНАРНЫХ СМЕСЯХ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
доктора физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук», в Институте вычислительного моделирования Сибирского отделения Российской академии наук – обособленном подразделении ФИЦ КНЦ СО РАН.

**Научный консультант:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Андреев Виктор Константинович**

**Официальные оппоненты:**

**Аксенов Александр Васильевич**, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра гидромеханики, профессор

**Гончарова Ольга Николаевна**, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Алтайский государственный университет», кафедра дифференциальных уравнений, профессор

**Пухначев Владислав Васильевич**, член-корреспондент Российской академии наук, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, лаборатория прикладной и вычислительной гидродинамики, главный научный сотрудник

**Шеремет Михаил Александрович**, доктор физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет», научно-исследовательская лаборатория моделирования процессов конвективного теплопереноса, заведующий лабораторией

Защита состоится 09 сентября 2022 г. в 14 час. 30 мин. на заседании диссертационного совета «НИ ТГУ.01.02», созданного на базе физико-технического факультета федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» по адресу: 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36 (учебный корпус № 2 ТГУ, аудитория 428).

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке и на официальном сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Томский государственный университет» [www.tsu.ru](http://www.tsu.ru).

Материалы по защите диссертации размещены на официальном сайте ТГУ: <https://dissertations.tsu.ru/PublicApplications/Details/31cfe62d-8a4a-41be-a23f-136867116546>

Автореферат разослан « \_\_\_\_ » июня 2022 г.

Учёный секретарь диссертационного совета  
кандидат физико-математических наук



Усанина Анна Сергеевна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность и степень разработанности темы.**

Современные технологические процессы и необходимость прогнозирования природных феноменов требуют как можно более полного описания тепломассопереноса в жидких и газовых средах, являющихся, как правило, бинарными или многокомпонентными смесями. Исследование явлений, протекающих в смесях, характеризуется большей сложностью, чем моделирование движения однородной жидкости. Известно, что диффузия примеси в жидкости происходит намного медленнее диффузии тепла, вследствие чего концентрационное возмущение существует значительно дольше температурного. Кроме того, для смесей характерно как появление нового источника конвективной силы (неоднородность концентрации), так и конкуренция диссипативных эффектов, из-за чего, в отличие от чистой среды, в смеси может быть неустойчивым даже состояние механического равновесия<sup>1</sup>. Взаимодействие между конвекцией, теплопроводностью и диффузией осложняется наличием взаимно обратных эффектов: возникновение градиента концентрации из-за изменения температуры (термодиффузия или эффект Соре) и появление градиента температуры вследствие изменения поля концентрации (диффузионная теплопроводность или эффект Дюфора)<sup>2</sup>. Из-за ожидаемых различий в структуре и эволюции тепловых и термоконцентрационных течений анализ движения бинарных смесей формирует отдельный класс задач, требующих тщательного исследования.

Моделирование физических процессов является неотъемлемой частью их всестороннего изучения. Поскольку математические модели в основном формулируются в виде дифференциальных уравнений в частных производных, то развитие соответствующей теории тесно связано с успехами в решении физических задач. Механика сплошных сред всегда была источником постановки сложных математических проблем, при изучении которых создавались новые и совершенствовались классические методы. Одним из таких методов является теоретико-групповой анализ – универсальный инструмент исследования уравнений в частных производных независимо от их типа и свойства линейности. Согласно теории С. Ли<sup>3</sup> знание группы преобразований (симметрии), относительно которой инвариантна система уравнений, помогает находить частные решения изучаемой системы

---

<sup>1</sup>Гершуни, Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. – М.: Наука, 1989. – 318 с.

<sup>2</sup>Köhler, W. The Soret Effect in Liquid Mixtures – A Review / W. Köhler, K.I. Morozov // J. Non-Equilib. Thermodyn. – 2016. – 41(3). – P. 151–197.

<sup>3</sup>Ли, С. Теория групп преобразований в 3-х частях / С. Ли. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011. – Ч. 1. – 712 с.

в явном виде. В своих работах Ли указал способы нахождения групповых преобразований и привёл некоторые примеры построения решений. Значительное развитие эта теория получила в работах Л. В. Овсянникова, В. Фушича, П. Олвера, Дж. Блюмана и представителей их школ. Исследования этих учёных дополнили копилку знаний не только о симметричных свойствах уравнений механики, но и развили саму концепцию групп и алгебр Ли, выделившуюся теперь в самостоятельную область математики.

В научной школе академика Овсянникова продолжается с разной степенью интенсивности реализация программы ПОДМОДЕЛИ<sup>4</sup> – полного и систематического изучения групповых свойств уравнений механики сплошных сред. Интерес именно к этим моделям обусловлен в том числе и тем, что принципы инвариантности относительно тех или иных преобразований закладываются уже при выводе данных систем уравнений. Для трёхмерных уравнений Эйлера основная группа Ли преобразований была вычислена А. А. Бучневым; симметрии уравнений Навье–Стокса изучались В. О. Бытевым, Р. Е. Поповичем, а математических моделей турбулентности – О. В. Капцовым, В. Н. Гребенёвым, М. Оберлаком. Исследование уравнений газовой динамики методами группового анализа проводилось в работах С. В. Хабирова, А. П. Чупахина, А. А. Черевко. Симметрии уравнений магнитной гидродинамики, их частично инвариантные и дифференциально инвариантные решения представлены в диссертации С. В. Головина. Групповые свойства уравнений гидродинамического типа являются предметом исследований А. В. Аксенова и А. А. Чеснокова. Работы В. В. Пухначева, В. К. Андреева, А. А. Родионова, И. И. Рыжкова, О. Н. Гончаровой, Ю. Д. Чашечкина, относящиеся к симметриям уравнений механики сплошной среды, в большей степени связаны с анализом групповых свойств уравнений тепловой, концентрационной и термоконцентрационной конвекции. Что касается уравнений бесконвективной диффузии, изучением их групповых свойств после пионерских работ Л. В. Овсянникова и В. А. Дородницына с соавторами занимались в основном зарубежные математики (представители киевской и кипрской школ).

Таким образом, интерес к применению теоретико-групповых методов для анализа математических моделей механики сплошной среды не угасает. Тем более, что свойство инвариантности относительно определённых преобразований позволяет для изучаемых уравнений строить новые точные решения, не описанные ранее в литературе или являющиеся обобщениями уже известных. В отсутствие современной вычислительной техники точные

---

<sup>4</sup>Овсянников, Л. В. Программа ПОДМОДЕЛИ: препринт / Л. В. Овсянников. – Новосибирск : ИГиЛ СО РАН, 1992. – 12 с.

решения уравнений динамики флюидов были одним из немногих способов получения информации о течениях, их анализа в зависимости от геометрии областей и свойств конкретных жидкостей. Тут можно вспомнить о течениях Куэтта и Пуазейля<sup>5</sup>, о представлении Хименца для поля скоростей<sup>6</sup>, как о примерах описания поведения жидкостей посредством построенных в конечных формулах решений уравнений соответствующих математических моделей. С середины XX века развивались системные подходы к построению точных решений: метод дифференциальных связей (Н. Н. Яненко, А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, С. В. Мелешко), методы интегрирования Дарбу (О. В. Капцов). Техника построения точных решений с использованием групповых свойств уравнений модели разрабатывалась, в основном, Л. В. Овсянниковым и его последователями. Благодаря усилиям В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина и их соавторов появились ценные справочники по точным решениям линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Заметный вклад в определение решений уравнений моделей течения однородной жидкости внесли работы представителей пермской школы (Р. В. Бирих, С. Н. Аристов, К. Г. Шварц, Д. В. Князев). В исследованиях конвекции теплопроводных жидкостей и бинарных смесей на основе точных решений уравнений Обербека – Буссинеска хорошо известен предложенный Г. А. Остроумовым<sup>7</sup> класс неизотермических однонаправленных течений в бесконечном слое при зависимости скорости только от поперечной координаты и линейной по продольной координате температуре. Указанное представление функций – характеристик течения – часто позволяет проинтегрировать уравнения исходной модели движения в конечных формулах и применить построенные решения для широкого круга прикладных задач (описание течений теплопроводной жидкости в каналах с неоднородным нагревом стенок, анализ разделения бинарных смесей под действием эффекта термодиффузии, изучение конвекции со слабым испарением с границы раздела двух сред, и других).

В диссертации изучение характеристик тепломассообмена в бинарных смесях проводится как с помощью метода симметрий уравнений конвективного и молекулярного тепломассопереноса (групповой анализ относительно коэффициентов переноса, зависящих от параметров состояния; поиск преобразований зависящих и независимых переменных, упрощающих интегрирование исходной системы), так и посредством построения, анализа и

<sup>5</sup>Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – М.: Наука, 1970. – 904 с.

<sup>6</sup>Hiemenz, K. Die Grenzschicht neinem in den gleichformigen flussigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder / K. Hiemenz // Dingler's Polytechnic J. – 1911. – Vol. 326. – P. 321–410.

<sup>7</sup>Остроумов, Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи / Г. А. Остроумов. – М.: Гостехиздат, 1952. – 256 с.

интерпретации точных решений уравнений моделей движения смесей, учитывающих нелинейность силы плавучести, эффект термодиффузии и зависимость коэффициентов переноса от температуры и концентрации. Рассмотренные в работе задачи исследования влияния различных факторов на стационарное и нестационарное термодиффузионное разделение двухкомпонентных жидкостей в горизонтальных и вертикальных слоях показывают степень трудности их изучения, подчёркивая, что анализ качественных свойств и проблема построения точных решений уравнений соответствующих математических моделей не теряют своей актуальности, несмотря на интенсивное развитие вычислительных методов. Численное решение, основывающееся на фиксации большинства параметров системы, не всегда может выполнять прогнозирующую роль, в то время как непрерывное совершенствование наукоёмких технологий перманентно расширяет круг задач, требующих наиболее полного и точного описания сопутствующих явлений на основе существующих классических и новых уточнённых математических моделей. Тем самым, комплексный анализ процессов тепло-массопереноса в жидких смесях, очевидно, должен включать как численное моделирование, так и аналитическое исследование.

Приведённые выше факты обосновывают актуальность диссертации и определяют её место среди работ по развитию математических методов изучения моделей механики бинарных смесей.

**Цель диссертационной работы.** Исследование качественных свойств математических моделей двухкомпонентных смесей со сложными физическими свойствами методами группового анализа; построение, интерпретация и использование точных решений для описания конвективных течений бинарных жидкостей и процесса термодиффузионного разделения смеси на компоненты с учётом эффекта Соре и переменных физических свойств жидкости; анализ влияния различных факторов (геометрии области, гравитационного воздействия, теплового режима на границах слоя, термодиффузии, переменных физических свойств) на теплообмен в смесях.

**Методы исследования.** Для изучения качественных свойств уравнений теплообмена бинарных смесей используется метод симметрий (вычисление точечных преобразований зависимых и независимых переменных, решение задачи групповой классификации, построение редукций исходных систем и их решений). Для исследования точных решений, описывающих режимы теплообмена, применяются методы функционального анализа и общей теории дифференциальных уравнений, в частности, получение априорных оценок решений, применение теоремы Шаудера и

теоремы о существовании решения краевых задач для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения. При описании режимов стационарного тепломассообмена строятся аналитические решения одномерных задач или используется метод Рунге – Кутты, сопряжённый с алгоритмом пристрелки. Для расчётов характеристик нестационарной диффузии тепла и примеси применяется метод разделения переменных и численное обращение образов по Лапласу от соответствующих функций.

**Научная новизна** работы заключается в том, что в ней:

- впервые приведено самое полное известное на данный момент и отражённое в литературе решение задачи групповой классификации уравнений конвективного и молекулярного тепломассообмена относительно коэффициентов переноса, зависящих от параметров состояния. Найдено точечное преобразование независимых переменных, сохраняющее форму уравнений диффузии тепла и примеси и позволяющее существенно упростить процедуру вычисления коэффициентов инфинитезимального оператора при построении симметрий систем эволюционных уравнений достаточно общего вида;
- проведено обобщение результатов решения задачи о разделении смесей в вертикальном слое с подогреваемыми стенками, моделирующем термогравитационную колонну, на случай произвольного уравнения состояния. Исследовано влияние нелинейной зависимости плотности от температуры на возникающие неоднородности концентрации, индуцируемые термодиффузионным эффектом;
- на основе построенного в работе точного решения уравнений Обербека – Буссинеска, неизвестного ранее и не являющегося обобщением известных, изучены однонаправленные горизонтальные течения бинарных смесей в случае, когда нагрев одной из стенок канала происходит по квадратичному закону относительно продольной координаты. Указана единственно возможная постановка граничных условий для описания подобного течения в узком зазоре между твёрдыми стенками, получены условия на физические параметры смесей, при которых возможно описание режима двухслойного течения со слабым испарением на границе раздела в рамках используемой модели. Изучено влияние геометрических и физических факторов на характер разделения смеси в слое жидкости и массовую скорость испарения – в двухслойной системе;
- доказана стабилизация нестационарных однонаправленных горизонтальных течений бинарных смесей в узких каналах с неоднородным нагревом стенок. Предложен критерий, дающий ограничение на на-

чальный градиент концентрации, расход смеси и градиенты температуры, задаваемые на стенках канала, при выполнении которого при больших временах осуществляется переход к предельному стационарному режиму. Важным моментом при доказательстве является то, что оно проводится именно в рамках моделей движения бинарных смесей. При исследовании решений уравнений для однородных жидкостей ограничений, подобных установленным в диссертационной работе, не возникает;

- на основе решения уравнений термодиффузии впервые проведено аналитическое и численное моделирование режимов теплообмена в двухкомпонентных жидкостях с изменяющимися физическими свойствами. Предложен универсальный алгоритм решения задачи об установлении степени влияния переменных коэффициентов переноса на возникновение неоднородностей концентрации. С помощью данного алгоритма проведено сравнение режимов разделения жидкостей с учётом и без учёта зависимости коэффициентов теплопроводности, диффузии и термодиффузии от параметров состояния. Обнаружены смеси, для которых изменениями тепловых и диффузионных свойств невозможно пренебречь.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Исследование уравнений движения с помощью методов группового анализа даёт возможность установить их качественные свойства и построить точные решения, пригодные для дальнейшего использования в приложениях. Данный подход, основанный на применении специальных преобразований, упрощающих исходные уравнения, позволяет эффективно изучать процессы теплопереноса в различных конфигурациях. Вычисленные в результате решения задачи групповой классификации зависимости коэффициентов переноса, входящих в математическую модель, могут быть использованы при выборе аппроксимирующей функции для интерполяции при обработке экспериментальных данных.

Построение точных решений уравнений механики сплошной среды остаётся актуальной задачей, несмотря на возросшую мощность современной вычислительной техники и быстрое развитие численных методов. Полученные автором диссертации аналитические решения уравнений термодиффузии и их свойства, описанные в работе, могут быть использованы при систематическом изучении движений жидкостей с неоднородностями температуры и концентрации, объяснении возможных упрощений исходной математической модели, выполнении качественного сравнения теоретических и экспериментальных данных. Кроме того, точные решения сложных

систем уравнений смешанного типа, каковой является система уравнений тепломассообмена с переменными коэффициентами переноса, могут быть эталонами для верификации численных кодов и модификации модулей программ символьных вычислений, использующих в своих пакетах базу данных точных решений.

Результаты анализа поставленных краевых и начально-краевых задач для построенных решений дают возможность понять роль отдельных механизмов, в частности, действия нелинейной силы плавучести, эффекта термодиффузии, переменных коэффициентов переноса при формировании неоднородностей температурного и концентрационного полей в бинарных смесях, способствуют выявлению доминирующих параметров, влияющих на термодиффузионное разделение. Ограничения на физические постоянные, выведенные при решении краевых задач, помогают, например, найти недоступные в литературе коэффициенты равновесия Генри и концентрационного параметра поверхностного натяжения, а также определить диапазоны применимости используемых моделей посредством, например, рестрикции функции концентрации значениями от нуля до единицы или отсека решения, дающих отрицательные значения функции, входящей в уравнение состояния и имеющей смысл плотности.

Полученные данные о закономерностях молекулярного и конвективного тепломассопереноса бинарных смесей с переменными физическими свойствами могут быть использованы для прогнозирования поведения двухкомпонентных смесей в природных и технологических процессах (распределение компонентов в месторождениях углеводородов, теплообменные процессы в мантии Земли, разделение изотопов в жидких и газовых смесях и др.), при планировании и подготовке экспериментов по измерению коэффициентов переноса для соблюдения условий, поддерживающих устойчивое состояние механического равновесия, при создании технологий интенсификации тепломассообмена в системах охлаждения и обогрева, а также при производстве или эксплуатации современных миниатюрных электронных устройств.

**Достоверность результатов** диссертационной работы обеспечивается использованием адекватных, физически обоснованных моделей тепломассообмена; строгих математических методов теории группового анализа, построения точных решений дифференциальных уравнений, доказательств теорем существования решений; сравнением результатов работы с известными данными, полученными другими авторами для частных случаев.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Результаты групповой классификации уравнений конвективного и

молекулярного термодиффузионного теплообмена в бинарной смеси относительно коэффициентов переноса, зависящих от температуры и концентрации.

2. Обобщение результатов анализа течения бинарной смеси в термогравитационной колонне на случай термодиффузионного разделения жидкости с плотностью, произвольно зависящей от температуры, полученное с помощью решений, инвариантных относительно построенных в работе групповых преобразований.

3. Результаты теоретического исследования структур и свойств однонаправленных движений бинарной смеси в протяжённом горизонтальном слое, полученные на основе анализа точных решений уравнений Обербека–Буссинеска с учётом эффекта термодиффузии. Описание режима течения, нереализуемого в однородной жидкости, посредством решения указанной системы, впервые построенного в диссертации. Расчёт характеристик и изучение влияния физических и геометрических факторов на разделение двухкомпонентной жидкости под действием эффекта Соре в узком горизонтальном зазоре и двухслойное течение бинарных смесей со слабым испарением на границе раздела фаз.

4. Обоснование необходимости использования ограничения на начальный градиент концентрации для обеспечения стабилизации и выхода на найденный стационарный режим движения бинарной смеси, описываемый аналогом решения Остроумова–Бириха для жидкостей с неоднородным полем концентрации.

5. Результаты аналитического и численного исследования теплообмена в двухкомпонентной жидкости с переменными физическими свойствами под действием эффекта Соре. Построение универсального алгоритма решения одномерной задачи теплопереноса с дополнительным условием на концентрацию. Применение полученных с помощью предложенного алгоритма решений для анализа влияния эффекта Соре на разделение бинарных смесей при зависимости коэффициентов теплопроводности, диффузии и термодиффузии от температуры и концентрации.

**Личный вклад автора.** Основные результаты, включённые в диссертацию и выносимые автором на защиту, получены соискателем самостоятельно или при его непосредственном участии. Постановка исследуемых задач, выбор методов их решения, отбор данных экспериментов, аналитические и численные расчёты, а также интерпретация результатов осуществлялись диссертантом как лично, так и в сотрудничестве с В. К. Андреевым, И. И. Рыжковым, В. Б. Бекежановой. Из 25 публикаций, в которых описаны основные результаты диссертации, 14 выполнены без соавторов; вклад

соавторов в совместные публикации равнозначен.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на VIII Международной конференции «Symmetry in nonlinear mathematical physics» (Kyiv, Ukraine, 2009); Всероссийской конференции «Новые математические модели в механике сплошных сред: построение и изучение» (Новосибирск, 2009, 2014); Международной конференции «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, 2010); Зимней школе по механике сплошных сред (Пермь, 2011); Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011; Казань, 2015); Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Beijing, China, 2012); Всероссийской конференции по обратным и некорректно поставленным задачам (Новосибирск, 2012); Международном семинаре «Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems» (Protaras, Cyprus, 2012; Larnaca, Cyprus, 2016); Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория продолжений» (Новосибирск, 2013, 2018); XXX Международном коллоквиуме «Group theoretical methods in physics» (Ghent, Belgium, 2014); Международном семинаре «Lie theory and its applications in physics» (Varna, Bulgaria, 2015); Международной конференции «Euromech Fluid Mechanics Conference-11» (Seville, Spain, 2016); Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017); I международной конференции «Symmetry» (Barcelona, Spain, 2017); Всероссийской конференции «Современные проблемы механики сплошных сред» (Москва, 2017); Международном семинаре «A Century of Noether's theorem and beyond» (Opava, Czech Republic, 2018); VII Всероссийской конференции с участием зарубежных учёных «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Красноярск, 2020); Конференции международных математических центров мирового уровня (Сочи, 2021); Объединённом семинаре ИВМ СО РАН и СФУ «Математическое моделирование в механике» (руководители профессор В.К. Андреев, профессор В.М. Садовский, Красноярск); Объединённом семинаре ИВМ СО РАН и СФУ «Математические модели и методы интегрирования» (руководитель профессор О.В. Капцов, Красноярск); Семинаре ИГиЛ СО РАН «Прикладная гидродинамика» (руководители член-корреспондент РАН В.В. Пухначев, д.ф.-м.н. В.Е. Ерманык, Новосибирск); Семинаре ИМ СО РАН «Теоретические и вычислительные проблемы задач математической физики» (руководитель профессор М. А. Блохин, Новосибирск); Семинаре ИГиЛ СО

РАН «Краевые задачи механики сплошных сред» (руководители член-корреспондент РАН П. И. Плотников и д.ф.-м.н. В. Н. Старовойтов, Новосибирск); Семинаре ИПМ РАН «Математическая физика» (руководители д.ф.-м.н. В. В. Веденяпин и д.ф.-м.н. В. А. Дородницын, Москва).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 25 работах, в том числе 18 статьях в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук (из них 8 статей в зарубежных научных журналах, входящих в Web of Science, 1 статья в зарубежном научном журнале, входящем в Scopus, 1 статья в российском научном журнале, переводная версия которого входит в Web of Science, 2 статьи в российских научных журналах, переводные версии которых входят в Scopus, 2 статьи в российских научных журналах, входящих в Web of Science), 2 статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Web of Science и/или Scopus, 1 статья в прочем научном журнале, 4 статьи в сборниках материалов международных и всероссийских научных конференций и съезда.

**Структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объём работы — 221 страница, 32 рисунка и 10 таблиц. Список литературы содержит 239 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы и приводится краткое изложение диссертации.

**Глава 1** содержит обзор литературы и современного состояния изучаемых проблем. Обсуждается необходимость использования переменных коэффициентов переноса при моделировании течения бинарных смесей, а также применение метода симметрий для задач групповой классификации и построения точных решений уравнений конвективной и молекулярной диффузии двухкомпонентных жидкостей.

В **главе 2** для изучения конвективного тепломассопереноса в бинарной жидкости под действием силы тяжести и эффекта термодиффузии используется математическая модель<sup>8,9</sup>, согласно которой искомые функции удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

---

<sup>8</sup>Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 796 с.

<sup>9</sup>Де Гроот, С. Неравновесная термодинамика / С. де Гроот, П. Мазур. – М.: Мир, 1964. – 456 с.

$$\rho_0(\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \operatorname{div}(2\rho_0\nu\mathcal{D}) + \rho_0 F \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$T_t + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \operatorname{div}(\chi \nabla T), \quad (3)$$

$$C_t + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \operatorname{div}(D \nabla C + D^\theta \nabla T). \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – вектор скорости,  $p$  – давление, скалярные функции температуры  $T$  и концентрации одного из компонентов  $C$  считаются мало отклоняющимися от их средних постоянных значений  $T_0$  и  $C_0$  соответственно, концентрация второго компонента находится как  $1 - C$ . В системе (1)–(4)  $t$  обозначает время,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  – вектор координат, оператор градиента  $\nabla$  вычисляется по пространственным переменным,  $\mathcal{D}_{ij} = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2$  – тензор скоростей деформации,  $\mathbf{g} = (0, -g)$  – постоянный вектор,  $g$  – ускорение силы тяжести. Коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\chi$ , диффузии  $D$ , термодиффузии  $D^\theta$  в общем случае есть непрерывные функции температуры и концентрации. Уравнение состояния изучаемой бинарной смеси имеет вид  $\rho = \rho_0 F(T, C)$ , где  $\rho_0$  – постоянная средняя плотность,  $F$  – произвольная положительная гладкая функция.

Для уравнений (1)–(4) решается задача групповой классификации относительно пяти параметров: коэффициентов  $\nu(T, C)$ ,  $\chi(T, C)$ ,  $D(T, C)$ ,  $D^\theta(T, C)$  и функции  $F$ , определяющей силу плавучести. В п. 2.1 получена основная алгебра Ли операторов

$$L^0 = \left\langle X_0 = \partial_t, H_0 = h_0 \partial_p, H_i = h_i \partial_{x_i} + \frac{\partial h_i}{\partial t} \partial_{u_i} - \rho_0 x_i \frac{\partial^2 h_i}{\partial t^2} \partial_p, \quad i = 1, 2 \right\rangle,$$

допускаемых системой при произвольных значениях классифицируемых функций. Здесь оператор  $X_0$  задаёт сдвиг по времени, отсутствие в системе (1)–(4) производных давления по переменной  $t$  приводит к появлению оператора  $H_0$ , означающего, что  $p(t, x, y)$  определена с точностью до произвольной функции времени  $h_0(t)$ . Условие несжимаемости приводит к расширению толкования принципа относительности Галилея (наличие операторов  $H_i$ ), тем самым уравнения (1)–(4) сохраняют свой вид во всех системах координат, движущихся относительно данной с произвольным линейным ускорением. При этом гладкие функции  $h_i(t)$  задают законы движения системы координат относительно исходной. Если функция  $F = 0$ , то основная алгебра Ли более широкая и имеет вид

$$L^1 = \left\langle L^0, Z = 2t \partial_t + x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} - u_1 \partial_{u_1} - u_2 \partial_{u_2} - 2p \partial_p, \right. \\ \left. X_{12} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} + u_2 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_2} \right\rangle.$$

В формировании алгебры  $L^1$  кроме операторов из  $L^0$  участвуют оператор  $X_{12}$ , соответствующий инвариантности исходной системы относительно вращения в горизонтальной плоскости, и оператор дилатации  $Z$ , играющий важную роль при построении автомодельных решений. Отметим, что алгебра  $L^1$  наследуется системой (1)–(4) от уравнений Навье–Стокса<sup>10</sup>. Специфических именно для уравнений конвекции операторов в ней нет. Это легко объясняется зависимостью классифицируемых функций от температуры и концентрации, следовательно, нарушением свойства инвариантности относительно преобразований, связанных с этими параметрами. Отсутствие операторов, ассоциированных с тепловыми и диффузионными эффектами, означает чувствительность системы к виду уравнения состояния, малые изменения которого могут повлиять на свойства решений<sup>11</sup>.

Различные представления элементов  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $D$ ,  $D^\theta$ ,  $F$  получены в виде степенных, экспоненциальных и логарифмических функций, зависящих от температуры и концентрации. Эти функции составляют полный набор спецификаций для коэффициентов переноса системы (1)–(4), которые могут быть получены с использованием метода Ли–Овсянникова. Дополнительные к  $L^0$ ,  $L^1$  операторы, допускаемые при конкретных видах классифицируемых параметров, являются линейными комбинациями слагаемых из набора

$$Z_1 = (n - m)t\partial_t + nx_1\partial_{x_1} + nx_2\partial_{x_2} + mu_1\partial_{u_1} + mu_2\partial_{u_2} + 2mp\partial_p,$$

$$Z_2 = t\partial_t + 2x_1\partial_{x_1} + 2x_2\partial_{x_2} + u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2} + 2p\partial_p,$$

$$Z_3 = t\partial_t + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2},$$

$$U = \rho_0 x_2 \partial_p, \quad T^1 = T \partial_T, \quad T^3 = \partial_T, \quad C^1 = C \partial_C, \quad C^2 = T \partial_C, \quad C^3 = \partial_C$$

и представляют собой одновременное растяжение независимых переменных и растяжений/сдвигов зависимых функций ( $m, n$  – произвольные постоянные,  $n \neq 2m$ ). Оператор  $C^2$  соответствует учёту эффекта термодиффузии в последнем уравнении системы (1)–(4). С помощью полученных в работе и известных ранее результатов решения задач классификации для упрощённых уравнений конвекции можно проследить, как меняются качественные свойства имеющейся математической модели, если отказаться от постоянства коэффициентов переноса или, помимо теплообмена, учесть изменение состава жидкости посредством функции  $C$ .

<sup>10</sup>Бытев, В. О. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса / В. О. Бытев // Численные методы механики сплошной среды. – Новосибирск. – 1972. – Т. 3, № 3. – С. 13-17.

<sup>11</sup>Байдулов, В. Г. Инвариантные свойства систем уравнений механики неоднородных жидкостей / В. Г. Байдулов, Ю. Д. Чашечкин // ПММ. – 2011. – Т. 75, вып. 4. – С. 552–562.

В пункте **2.2** на основе полученного решения задачи групповой классификации построены примеры редукций исходной системы к системам обыкновенных дифференциальных уравнений или более простым уравнениям с частными производными. Получены некоторые инвариантные решения, описывающие распространение тепла и примеси в случае механического равновесия, автомодельный режим, течение Пуазейля в бинарной смеси.

В разделе **2.3** рассматриваются две краевые задачи описания конвективной термодиффузии с постоянными коэффициентами переноса для нелинейной функции  $F$ , определяющей силу плавучести, в вертикальном слое ширины  $2L$ , ограниченном твёрдыми стенками, на которых поддерживается заданный закон распределения температуры. Схема течения приведена на рисунке 1. В п. **2.3.1** параметр  $F$  выбирается из таблицы групповой классификации:  $F = -C + f_1(T)$  с произвольной гладкой функцией  $f_1(T)$ . Строится решение системы (1)–(4), инвариантное относительно подалгебры ( $A = \text{const}$ )

$$\left\langle \partial_t, \partial_{x_2} + A(Ug + C^3) = \partial_{x_2} + A(\rho_0 g x_2 \partial_p + \partial_C) \right\rangle.$$

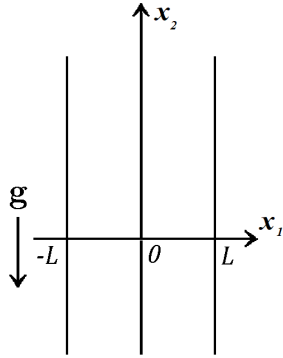


Рисунок 1 – Схема течения

Согласно используемой подалгебре представление решения таково:

$$u_1 = u_1(x_1), \quad u_2 = u_2(x_1), \quad p = P(x_1) + A\rho_0 g x_2^2/2, \\ T = T(x_1), \quad C = K(x_1) + Ax_2.$$

Из уравнения неразрывности следует, что  $u_1$  есть постоянная величина, которая далее считается равной нулю. Тогда из (2)  $P = \text{const}$ . В безразмерных переменных

$$x = \frac{x_1}{L}, \quad y = \frac{x_2}{L}, \quad w = \frac{\nu}{gL^2} u_2, \\ T^* = \frac{T}{\theta}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_0 g L}, \quad C^* = C \quad (5)$$

редуцированная система запишется как

$$w_{xx} + K - f_1(T) = 0, \quad \frac{1}{\text{Pr}} T_{xx} = 0, \quad \frac{1}{\text{Sc}} K_{xx} + \varepsilon T_{xx} - \text{Ga} R w = 0, \quad (6)$$

здесь  $\text{Pr} = \nu/\chi$ ,  $\text{Sc} = \nu/D$ ,  $\text{Ga} = gL^3/\nu^2$  – числа Прандтля, Шмидта и Галилея соответственно. Безразмерный вертикальный градиент концентрации, определяемый по постоянной  $A$ , есть  $R = AL$ ;  $\varepsilon = D^\theta \theta/\nu$  – безразмерный аналог параметра термодиффузии;  $\theta$  – характерная температура, измеряемая в градусах Цельсия; символ «звёздочка» опущен.

На твёрдых стенках  $x = \pm 1$  для безразмерных переменных из системы (6) задаются равенства

$$w = 0, \quad T = \pm 1, \quad K_x + \varepsilon \text{Sc} T_x = 0, \quad (7)$$

соответствующие выполнению условий прилипания, температуре нагрева границ и отсутствию потока вещества через твёрдые стенки. Кроме того, справедливы условия нулевого расхода жидкости через поперечное сечение слоя, сохранения массы компонентов смеси в сечении  $y = 0$  (в размерных переменных  $x_2 = 0$ ) и отсутствия полного потока вещества через поперечное сечение слоя. В безразмерных переменных (5) эти условия имеют вид

$$\int_{-1}^1 w \, dx = 0, \quad \int_{-1}^1 K \, dx = 2C_0, \quad \int_{-1}^1 K w \, dx - \frac{2R}{\text{GaSc}} = 0. \quad (8)$$

С использованием замены  $Q = - \int_{-1}^x w(\tau) \, d\tau$  задача (6)–(8) переписывается для функции  $Q$ :

$$Q^{(IV)} + \text{GaSc} R Q = \sigma(x), \quad \sigma(x) = -\varepsilon \text{Sc} - \frac{df_1}{dT}. \quad (9)$$

$$Q(-1) = Q(1) = Q'(-1) = Q'(1) = 0. \quad (10)$$

$$\varepsilon \text{Sc} \int_{-1}^1 Q(x) \, dx + \text{GaSc} R \int_{-1}^1 Q^2(x) \, dx + \frac{2R}{\text{ScGa}} = 0. \quad (11)$$

Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и доказанного в работе утверждения о самосопряжённости однородной задачи (9), (10) следует, что условием однозначной разрешимости задачи (9), (10) является выполнение условия ортогональности

$$\int_{-1}^1 \sigma(x) Q_0(x) \, dx = 0, \quad (12)$$

где  $Q_0$  – решение соответствующей однородной краевой задачи. В зависимости от знака выражения  $\text{GaSc} R$ , определяемого только постоянной  $R$  вследствие неотрицательности остальных множителей, входящих в это выражение, однородное уравнение для (9) имеет разную фундаментальную систему решений. В работе вычислены решения задачи (9), (10) во всех возникающих случаях: 1)  $\text{GaSc} R = 4\eta^4 > 0$  (здесь условие (12) всегда выполнено); 2)  $\text{GaSc} R = -\gamma^4 < 0$ , таких, что (12) выполнено;

3)  $\text{GaSc} R = -\gamma^4 < 0$ , таких, что (12) не выполнено. Показано, что в последнем случае решение задачи (9), (10) неединственно.

После того как найдена функция  $Q(x, R)$ , выражение для неё подставляется в (11) и решается трансцендентное уравнение для определения  $R$ . Затем по вычисленной постоянной  $R$  и функции  $Q$  восстанавливаются скорость  $w = -Q'$  и концентрация

$$C = C_0 + Ry - \varepsilon \text{Sc} x - \text{GaSc} R \int_{-1}^x Q(\tau) d\tau + \frac{\text{GaSc} R}{2} \int_{-1}^1 (1 - \tau) Q(\tau) d\tau.$$

Давление и температура есть  $p = Ry^2/2 + \text{const}$ ,  $T = x$  соответственно.

Далее построен пример решения задачи (6)–(8) для функции  $f_1$ , линейно и квадратично зависящей от  $T$  в случае  $R > 0$ . В обоих случаях при  $\varepsilon < 0$  нормальный эффект термодиффузии приводит к накоплению примеси в той части слоя, где выше температура ( $x = 1$ ). Тогда плотность смеси около горячей стенки понижается из-за теплового расширения и по причине обогащения лёгким компонентом. Как следствие, скорость движения при этом возрастает. В случае линейного распределения ярко выражено, что аномальная термодиффузия ( $\varepsilon > 0$ ) ведёт к торможению потока, скорость меньше, чем для течения с нормальным эффектом Соре. При квадратичной зависимости функции  $F$  величина скорости не зависит от нормального/аномального эффекта термодиффузии при использованных входных параметрах задачи. Конвективное течение, удовлетворяющее условию замкнутости потока, состоит из трёх частей разной интенсивности: вблизи стенок жидкость поднимается вверх, в центре слоя опускается вниз, что согласуется с поведением функции  $F$ , соответствующей плотности смеси.

Рассмотренный пример показывает, что отличие процесса разделения смесей в случае предположения линейной и нелинейной зависимости плотности от параметров состояния (в данном примере только температуры) может быть весьма существенным. Поскольку описываемая конфигурация соответствует термодиффузионной колонне – экспериментальной установке, предназначенной для разделения смесей и измерения коэффициентов термодиффузии, то это отличие может сыграть важную роль при использовании в качестве рабочей смеси в колонне жидкостей с нелинейным уравнением состояния.

В разделе **2.3.2** функция, определяющая силу плавучести, найденная при решении задачи групповой классификации, есть  $F = F(C - qT)$ . Стро-

ится решение уравнений (1)–(4), инвариантное относительно подалгебры

$$\left\langle \partial_t, \partial_{x_2} + \bar{\varphi} \partial_p + A(T^3 + qC^3) = \partial_{x_2} + \bar{\varphi} \partial_p + A(\partial_T + q\partial_C) \right\rangle, \quad A, \bar{\varphi}, q = \text{const}. \quad (13)$$

Представление решения таково:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1), & u_2 &= u_2(x_1), & p &= P(x_1) + \bar{\varphi}x_2, \\ T &= \Theta(x_1) + Ax_2, & C &= K(x_1) + Aqx_2. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей задаче  $P = \text{const}$ ,  $u_1$  считается равной нулю. С использованием безразмерных переменных (5) редуцированная система запишется как

$$\begin{aligned} w_{xx} &= \varphi + F[K - \Theta + (R_1 - R)y], \\ \Theta_{xx} &= \text{PrGa}Rw, \quad K_{xx} = \text{ScGa}(R_1 - \varepsilon R\text{Pr})w, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\varphi = \rho_0 g \bar{\varphi}$  – безразмерный градиент давления;  $R = AL/\theta$  и  $R_1 = ALq$  – безразмерные вертикальные градиенты температуры и концентрации,  $\theta$  – размерная температура (в градусах Цельсия) на стенке  $x_1 = L$  – принимается за характерный масштаб температуры. Поскольку все функции, входящие в (14), зависят только от  $x$ , то  $R_1 = R$ , и параметр  $q$  в (13), считавшийся пока произвольным, должен быть равен  $1/\theta$ .

Для безразмерных переменных из системы (14) задаются граничные условия (схема течения приведена на рисунке 1)

$$w|_{x=\pm 1} = 0, \quad \Theta|_{x=\pm 1} = \pm 1, \quad [K_x + \varepsilon \text{Sc} \Theta_x]|_{x=\pm 1} = 0, \quad \int_{-1}^1 K dx = 2C_0, \quad (15)$$

соответствующие выполнению условий прилипания, заданной температуре на вертикальных границах, отсутствию потока вещества через твёрдые стенки и сохранению массы компонентов смеси. В работе доказано

**Утверждение.** *Решение задачи (14), (15) обладает следующими свойствами:*

1) при  $R = 0$  решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta &= x, & K &= -\varepsilon \text{Sc} x + C_0, \\ w(x) &= \frac{\varphi(x^2 - 1)}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 G(x, s) F[C_0 - s(1 + \varepsilon \text{Sc})] ds, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $G(x, s)$  – функция Грина, выражаемая формулой

$$G(x, s) = \begin{cases} (s+1)(x-1), & -1 \leq s \leq x, \\ (s-1)(x+1), & x \leq s \leq 1; \end{cases}$$

2) при  $R \neq 0$  среднее значение функции  $w(x)$  на интервале  $[-1, 1]$  равно нулю, то есть  $\int_{-1}^1 w(x) dx = 0$ ;

3) при  $R \neq 0$  и  $\varphi > 0$  задача решения не имеет.

Справедливость доказанного утверждения проиллюстрирована посредством численного интегрирования системы (14) при условиях (15) для квадратичной зависимости функции  $F$  от её аргумента. Если  $R = 0$ , используются формулы (16). Построенные решения  $w(x)$  и  $F(x)$  показывают, что при  $R \neq 0$  имеют место зоны прямого и возвратного течения, функция скорости  $w(x)$  меняет знак. Смена зон происходит в точке перегиба функции плотности  $F$ . При отсутствии вертикального градиента температуры и концентрации ( $R = 0$ ) возвратного течения не возникает, наблюдается профиль скорости, близкий к течению Пуазейля, при этом минимальному значению функции  $F$ , отвечающей за силу плавучести, соответствует максимальное по модулю значение функции скорости  $w$ .

Краевую задачу (14), (15) можно свести к операторному уравнению

$$w(x) = \mathcal{A}(w) = \int_{-1}^1 H_2(x, s) F\{H_1[w(s)]\} ds. \quad (17)$$

Здесь  $H_1$  – функционал от  $w(x)$ , вычисленный с помощью представлений функций температуры, концентрации и градиента давления  $\bar{\varphi}$  как функционалов от  $w(x)$ . Ядро интегрального оператора  $\mathcal{A}$  есть непрерывная на квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  функция

$$H_2(x, s) = \frac{1}{2} G(x, s) - \frac{3}{8} (x^2 - 1)(s^2 + 3).$$

В силу ограниченности функции  $F < m = \text{const}$ , имеющей смысл плотности, для всякой функции  $w \in C[-1, 1]$  выполнено

$$\mathcal{A}(w) \leq m \cdot \max_{x, s \in [-1, 1]} |H_2(x, s)| = \frac{3}{2} m.$$

Следовательно,  $\mathcal{A}$  является компактным отображением шара  $|w| \leq 3m/2$  в себя, что доказывает выполнение теоремы Шаудера о существовании неподвижной точки<sup>12</sup>. Если функция  $F(s)$  имеет ограниченную производную по своему аргументу, то при естественных условиях ограниченности физических параметров задачи к уравнению (17) применим классический принцип неподвижной точки, и решение будет единственным.

<sup>12</sup>Ниренберг, Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу / Л. Ниренберг. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

В **третьей** главе рассматриваются уравнения Обербека – Буссинеска однонаправленного (вектор скорости  $(u(y, t), 0, 0)$ ) движения бинарной смеси, которые в безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} u_t &= u_{yy} - p_x, \quad T + C = p_y, \\ T_t + \text{Gr } u T_x &= \frac{1}{\text{Pr}} (T_{xx} + T_{yy}), \\ C_t + \text{Gr } u C_x &= \frac{1}{\text{Sc}} [C_{xx} + C_{yy} - \psi(T_{xx} + T_{yy})], \end{aligned} \quad (18)$$

здесь  $T(x, y, t)$  – температура,  $C(x, y, t)$  – концентрация одного из компонентов смеси,  $p(x, y, t)$  – давление за вычетом гидростатического. Уравнения в размерных переменных, соответствующие системе (18), выводятся из равенств (1)–(4) при постоянных коэффициентах  $\nu$ ,  $\chi$ ,  $D$  и  $D^\theta$ ; функция  $F$  при этом считается линейно зависящей от температуры и концентрации; уравнение состояния есть  $\rho = \rho_0(1 - \beta_1 T - \beta_2 C)$  с коэффициентами теплового и концентрационного расширения  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ . Кроме введённых выше чисел Прандтля и Шмидта, используются безразмерные величины  $\text{Gr} = g\beta_1 \Delta T L^3 / \nu^2$  – число Грасгофа,  $\psi = -\beta_2 D^\theta / (\beta_1 D)$  – параметр разделения; через  $L$  обозначена ширина горизонтального слоя,  $\Delta T$  – характерная разность температур на стенках слоя.

В работе показано, что система (18) совместна, если функция температуры удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\begin{aligned} T_{xx} + T_{yy} &= \text{Pr}[\alpha(y, t)x + \beta(y, t)], \\ \alpha(y, t) &= (a_{yy}/\text{Sc} - a_t)_y, \quad \beta(y, t) = (b_t - b_{yy}/\text{Sc})_y - \text{Gr } u a_y, \end{aligned}$$

здесь параметры  $a, b$  такие, что выполняются соотношения

$$p(x, y, t) = b(y, t) - a(y, t)x, \quad C = b_y - a_y x - T. \quad (19)$$

Таким образом, представление функции  $T(x, y, t)$  в виде полинома может быть многочленом относительно  $x$  степени не выше третьей. Далее в этой главе строятся решения системы (18) в случаях, когда функция температуры представляет собой полином по  $x$  третьего, второго и первого порядков, а также обсуждается возможность применения полученных решений для моделирования режимов течения бинарных смесей.

Показано, что при кубическом по  $x$  распределении функции  $T(x, y, t)$  все стандартные постановки граничных условий для уравнений (18) приводят к выражениям для функции скорости  $u = \text{const}$  или  $u = u(t)$ .

При квадратичном по  $x$  законе для  $T(x, y, t)$  построено новое точное решение уравнений (18) в стационарном случае. Это решение получено

впервые и не описано ранее в литературе. Функция температуры имеет вид

$$T = \frac{1}{\text{Gr}\Psi} \left[ \frac{\bar{a}''}{2\text{Sc}u} x^2 + \frac{\bar{b}'' - \text{Gr Sc } \bar{a} u}{\text{Sc}u} x + \gamma(y) \right], \quad (20)$$

где  $\bar{a}(y) = a_y$ ,  $\bar{b}(y) = b_y$ ,  $\gamma(y)$  удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \bar{a}'' &= (a_0 y + a_1)u, \quad \bar{b}'' = [\text{Gr}(\text{Sc} + \text{Pr}) \bar{a} - b_0 y - b_1]u, \\ \gamma'' &= \frac{\text{Pr Gr}}{\text{Sc}} \left( \bar{a} \text{Gr Pr} - b_0 y - b_1 \right) u - \frac{a_0 y + a_1}{\text{Sc}}, \end{aligned}$$

$a_0, a_1, b_0, b_1$  – постоянные интегрирования.

Функция скорости находится из уравнения  $u^{(V)} - (a_0 y + a_1)u = 0$  и в случае  $a_0 = 0, a_1 > 0$  записывается как

$$\begin{aligned} u(y) &= C_1 e^{\lambda y} + e^{\lambda \mu_1 y} (C_2 \cos \lambda \mu_2 y + C_3 \sin \lambda \mu_2 y) + \\ &\quad + e^{\lambda \mu_3 y} (C_4 \cos \lambda \mu_4 y + C_5 \sin \lambda \mu_4 y). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $C_i, i = 1, \dots, 5$ , – постоянные интегрирования; остальные константы:

$$\lambda = \sqrt[5]{a_1}, \quad \mu_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \mu_{2,4} = \frac{\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}}{4}, \quad \mu_3 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Для решения системы (18), выраженного функциями скорости (21), температуры (20), давления и концентрации (19), проведён анализ постановок краевых задач, описывающих течения бинарной смеси в узком зазоре между двумя твёрдыми стенками. Обнаружено, что единственными граничными условиями для температуры, с помощью которых замыкается задача, должны быть заданное распределение температуры по квадратичному закону на одной из границ и выполнение условия теплоизоляции другой границы. В данной постановке, дополненной условиями прилипания и отсутствия потока вещества через стенки, решение системы уравнений для определения постоянных интегрирования сводится к квадратному уравнению на одну из констант. Селекция корня, дающего решение задачи, имеющее физический смысл, проводится с помощью анализа эффекта термодиффузии. Выбирается тот корень, для которого согласованы поля температуры и концентрации: при нормальном эффекте Соре лёгкий по плотности компонент скапливается в более нагретой области.

На рисунке 2 изображены профили скорости, температуры и концентрации для 70 %-го раствора этанола в воде, построенные для одного из двух наборов постоянных интегрирования при выполнении вышеуказанной корреляции теплового и диффузионного полей (рисунки 2 *b, c*). Можно

видеть, что существуют зоны прямого и возвратного течения, функция скорости меняет знак (рисунок 2 *a*). Для задачи в указанной постановке проанализировано влияние ширины канала на интенсивность разделения смеси этанол–вода. Показано, что самые большие градиенты концентрации этанола возникают для самой большой из рассматриваемых толщины слоя  $L = 0.0024$  м, при этом скорость и градиент температуры увеличиваются с ростом ширины зазора.

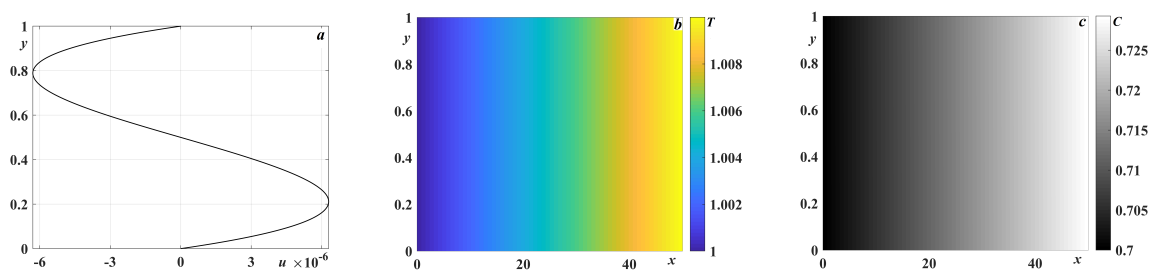


Рисунок 2 – Распределение безразмерных скорости (*a*), температуры (*b*) и концентрации (*c*) для бинарной смеси вода–этанол (70 % раствор этанола) при ширине слоя  $L=0.002$  м, разности температур  $\Delta T = 1$  °C

Построенное решение использовано и для описания течения в двух-слойной системе, где нижний слой заполнен жидкой бинарной смесью, через недеформируемую границу раздела происходит слабое испарение одного из компонентов; в верхнем слое находится смесь испаряющегося из нижнего слоя компонента и спутного газа, подаваемого в систему с некоторой скоростью, которая определяется за счёт контролируемого постоянного расхода. Функции скорости, давления, температуры и концентрации в каждом слое удовлетворяют соотношениям (21), (20), (19) соответственно. В качестве условий на границе раздела задаются равенство скоростей, температур, диффузионных потоков, тепловых потоков с учётом испарения на границе раздела и баланс концентраций, а также динамическое условие с линейной зависимостью поверхностного натяжения от температуры и концентрации. На нижней стенке выполняется закон квадратичного по продольной координате распределения температуры, верхняя – считается теплоизолированной.

С помощью решения задачи в указанной постановке проведено исследование влияния гравитации и эффекта Соре на течение в системе «вода–этанол — азот–пары этанола» и интенсивность испарения этанола на межфазной границе. В основе анализа лежит наблюдение за величиной  $M$  – массовой скоростью испарения<sup>13</sup>. Важно, что параметр  $M$  может

<sup>13</sup>Шлиомис, М.И. Конвекция в двухслойной бинарной смеси с испарением / М.И. Шлиомис, В.И. Якушин // Гидродинамика. – 1972. – № 4. – С. 129–140.

быть измерен экспериментально, следовательно, возможно количественное и/или качественное сравнение при условии, что для расчётов будут использоваться близкие к экспериментальным значения физических и геометрических параметров течения.

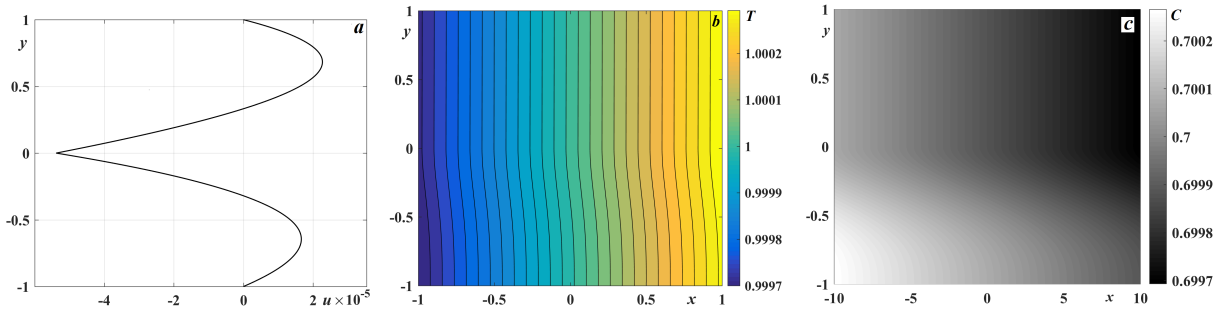


Рисунок 3 – Безразмерная функция скорости ( $a$ ), безразмерные поля температуры ( $b$ ) и концентрации ( $c$ ) в двухслойной системе бинарных смесей при нормальной гравитации  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ , толщинах слоёв  $0.003 \text{ м}$  и  $0.005 \text{ м}$  соответственно, расходе газа в верхнем слое  $1.3 \cdot 10^{-6} \text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$

На рисунках 3  $a$ ,  $b$ ,  $c$  приведены безразмерные зависимости скорости, температуры на участке  $x \in [-1, 1]$  и концентрации на участке  $x \in [-10, 10]$  для изучаемой системы при земной гравитации. Функция  $u$  демонстрирует формирование зоны с возвратным течением вблизи границы раздела благодаря эффекту Марангони в случае пониженной и нормальной гравитации (график функции  $u$  для  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  приведён на рисунке 3  $a$ ). Появление термокапиллярного эффекта вызвано изменениями поверхностного натяжения, которые, в свою очередь, обусловлены наличием градиента температуры вдоль границы раздела (рисунок 3  $b$ ). С увеличением ускорения свободного падения эффект Марангони подавляется действием массовых сил, что приводит к изменению поля скорости: влияние поверхностного натяжения ослабевает при переходе от низкой к земной гравитации и исчезает при дальнейшем росте  $g$ . Поле концентрации, представленное на рисунке 3  $c$ , демонстрирует скопление этанола в менее нагретой области в обоих слоях, распределение концентрации в жидком слое более неоднородно.

Анализ влияния эффекта Соре показывает, что в слабом поле массовых сил он приводит к убыванию температуры и падению массовой скорости испарения; при этом в отсутствие термодиффузионного эффекта температура и концентрация этанола на границе раздела выше. Рост интенсивности гравитационного воздействия приводит к ослаблению температурного влияния на границе раздела и изменению характера воздействия термодиффузионного эффекта. Для рассматриваемой геометрии задачи в земных условиях имеет место конкуренция гравитационного и термока-

пиллярного эффектов, действие гравитации подавляет эффект Марангони и вызывает перестройку профилей температуры и концентрации (рисунки 4 *a*, *b*). Под влиянием эффекта Соре возникающие тепловое и диффузионное поля на границе двух фаз приводят к увеличению массовой скорости испарения (сплошные линии на рисунке 4 *c*) по сравнению с течением без учёта термодиффузии (пунктирные линии на рисунке 4 *c*): чем меньше концентрация паров этанола в газовой фазе, тем быстрее этанол испаряется из нижнего слоя.

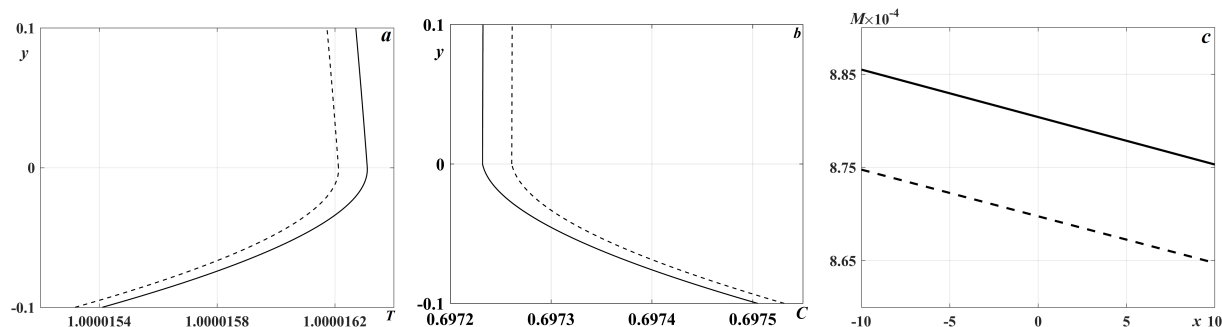


Рисунок 4 – Распределение безразмерных температуры (*a*) и концентрации (*b*) в сечении  $x = 0$  вблизи границы раздела  $y = 0$ ; безразмерная массовая скорость испарения  $M(x)$  на границе раздела (*c*). Сплошные линии соответствуют характеристикам, вычисленным с учётом эффекта термодиффузии в обоих слоях, пунктирные – без учёта эффекта термодиффузии в обоих слоях в системе бинарных смесей. Все кривые построены при тех же параметрах, что и на рисунке 3

В работе также исследовано влияние толщины нижнего слоя и расхода газа в верхнем слое на испарительную конвекцию. Рост толщины нижнего слоя от 0.0025 м до 0.01 м ведёт к ослаблению термокапиллярного эффекта, перестройке поля концентрации, заметное перераспределение компонентов в смеси происходит не вблизи границы раздела, а в холодной зоне. Увеличение расхода от нуля до  $10^{-6}$  кг/(м·с) приводит к возрастанию сдвиговых напряжений и, как следствие, интенсификации течения в верхнем слое, снижению концентрации, температуры и массовой скорости испарения.

Проведённый анализ решения уравнений однонаправленного течения бинарной смеси с квадратичным распределением температуры по горизонтальной координате позволяет заключить, что построенное решение физически правдоподобно описывает характер испарительной конвекции в двухслойной системе бинарных смесей. Качественное подтверждение такого вывода обеспечивают данные экспериментов<sup>14</sup> и теоретического анализа<sup>15</sup>.

<sup>14</sup>Lyulin, Y. Measurement of the evaporation mass flow rate in a horizontal liquid layer partly opened into flowing gas / Y. Lyulin, O. Kabov // Tech. Phys. Lett. – 2013. – № 39. – P. 795–797.

<sup>15</sup>Bekezhanova, V. B. Influence of the Dufour and Soret effects on the characteristics of evaporating liquid flows / V. B. Bekezhanova, O. N. Goncharova // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2020. – № 154. – P. 1–15.

При линейном распределении по переменной  $x$  функции температуры и концентрации имеют вид

$$T(x, y, t) = A(y, t)x + B(y, t), \quad C(x, y, t) = N(y, t)x + M(y, t). \quad (22)$$

Подстановка представлений (22) в уравнения переноса тепла и массы системы (18) и расщепление по степеням  $x$  приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} A_t &= \frac{1}{\text{Pr}} A_{yy}, & B_t &= \frac{1}{\text{Pr}} B_{yy} - \text{Gr } uA, \\ N_t &= \frac{1}{\text{Sc}} (N_{yy} - \psi A_{yy}), & M_t &= \frac{1}{\text{Sc}} (M_{yy} - \psi B_{yy}) - \text{Gr } uN. \end{aligned} \quad (23)$$

Скорость  $u(y, t)$  есть решение уравнения

$$u_t - u_{yy} = - \int_{y_0}^y [A(z, t) + N(z, t)] dz - f(t). \quad (24)$$

Давление находится с точностью до произвольных функций  $f(t)$  и  $f_1(t)$ :

$$p(x, y, t) = \left\{ \int_{y_0}^y [A(z, t) + N(z, t)] dz + f(t) \right\} x + \int_{y_0}^y [B(z, t) + M(z, t)] dz + f_1(t). \quad (25)$$

Если рассмотреть задачу о движении бинарной смеси в слое с твёрдыми стенками, на которых задан линейный по  $x$  закон распределения температуры  $T(x, 0, t) = A_1(t)x + B_1(t)$ ,  $T(x, 1, t) = A_2(t)x + B_2(t)$ , отсутствует поток вещества через стенки ( $C_y - \psi T_y = 0$ ) и выполнены условия прилипания  $u = 0$ , то начальные и граничные условия для функций из (23), (24) таковы:

$$\begin{aligned} A(y, 0) &= A_0(y), & A(0, t) &= A_1(t), & A(1, t) &= A_2(t), \\ B(y, 0) &= B_0(y), & B(0, t) &= B_1(t), & B(1, t) &= B_2(t), \\ N(y, 0) &= N_0(y), & N_y &= \psi A_y & \text{при } y &= 0, 1, \\ M(y, 0) &= M_0(y), & M_y &= \psi B_y & \text{при } y &= 0, 1, \\ u(y, 0) &= u_0(y), & u(0, t) &= u(1, t) = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для определения горизонтального градиента давления  $f(t)$  из формулы (25) задаётся расход смеси  $v(t)$  через поперечное сечение слоя

$$\int_0^1 u(y, t) dy = \frac{v(t)}{\nu \rho_0 \text{Gr}} = q(t), \quad (27)$$

где  $q(t)$  – безразмерный аналог функции расхода  $v(t)$ . Задача (23), (24), (26), (27) является обратной, её решение отвечает на вопрос: какой градиент давления нужно приложить, чтобы обеспечить заданный расход смеси?

Решена стационарная задача, соответствующая поставленной нестационарной (23), (24), (26), (27). Для замыкания задачи используется дополнительное условие на среднюю концентрацию  $c_0$  в сечении  $x = 0$ :

$$\int_0^1 M^s(y) dy = c_0, \quad (28)$$

где  $M^s(y)$  – независимый от времени аналог функции  $M(t, y)$ . Стационарное решение получено в конечных формулах, с помощью него исследовано влияние размеров канала, величины расхода и действия гравитации на градиенты концентрации и температуры, а также скорость. Установлено, что при ненулевом параметре разделения  $\psi$  неоднородности поля концентраций более выражены при больших толщинах слоя, нулевом расходе и в условиях гипергравитации. Если  $\psi = 0$ , то есть эффект термодиффузии отсутствует, поле концентраций остается однородным при остальных меняющихся параметрах процесса.

Решение полной нестационарной задачи (23), (24), (26), (27) получено в виде рядов. При этом проблема нахождения скорости сводится к нестандартной краевой задаче с нелокальными граничными условиями, для решения которой получены априорные оценки и показана его ограниченность.

Из соотношений (23)–(27) несложно видеть, что линейная задача об определении нестационарной функции скорости, а также продольных градиентов давления, температуры и концентрации отделяется. Её решение может быть получено с помощью преобразования Лапласа и позволит оценить влияние изменения температуры и концентрации в продольном направлении на гидродинамические характеристики без выстраивания теплового и диффузионного полей. При проверке свойств преобразования Лапласа для функций  $A$ ,  $N$ ,  $u$  выведены условия, при выполнении которых искомые величины при больших временах будут стремиться к их стационарным значениям. Кроме ограничений, совпадающих с ограничениями на соответствующие функции для аналогичной задачи движения однородной жидкости (существование конечных пределов функций  $A_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $q(t)$ , равных их стационарным значениям  $A_j^s$ ,  $q^s$  соответственно), для бинарной смеси важным условием сходимости нестационарного решения задачи к построенному с учётом условия (28) стационарному является выполнение ин-

тегрального тождества для начального градиента концентрации  $N_0$ :

$$\int_0^1 N_0(y) dy = \frac{\psi(A_1^s + A_2^s)}{2} \left[ \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} + \frac{A_2^s - A_1^s}{720q^s + \psi(A_1^s - A_2^s)} \right]. \quad (29)$$

На рисунке 5 приведены результаты расчёта функции скорости, полученные посредством численного обращения образов по Лапласу, в разные моменты времени. Профили скорости построены для следующих значений параметров: 1) безразмерные комплексы  $\text{Pr} = 398.403$ ,  $\text{Sc} = 112040.8$ ,  $\psi = -0.1144$ ; 2) распределение температуры на стенках  $A_1^s = A_0 = -0.005$ ,  $A_2 = A_2^s = 0.006$ ,  $A_1(t) = A_1^s + 10 \sin(0.02t) e^{-0.05t}$ . Выбранные условия для  $A_1$  и  $A_2$  обеспечивают выполнение предельных равенств для  $A_j(t)$ ,  $j=1, 2$ , и условий согласования; 3) для выполнения условий согласования в качестве начального условия для функции скорости используется  $u_0(y) = 0$ . Для упрощения расчёта принимается  $q(t) = q^s = 0$ , а также  $f(t) = f^s$ ; 4) в качестве функции  $N_0(y)$  берётся постоянное значение и используется формула (29). При перечисленных выше значениях параметров имеем  $N_0 \approx 0.0005002$ .

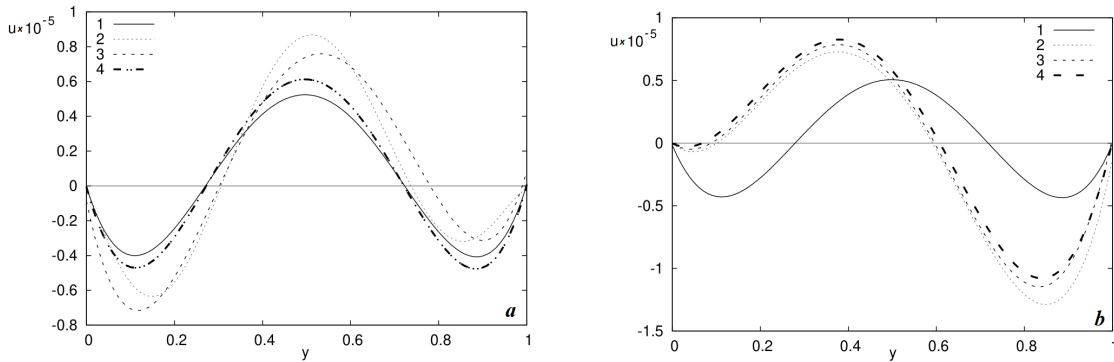


Рисунок 5 – Профили безразмерной скорости при  $u(y, t)$  в разные моменты времени: 1 –  $u^s(y)$ , 2 –  $u(y, 600)$ , 3 –  $u(y, 800)$ , 4 –  $u(y, 1500)$ ; (a) – график построен при выполнении условия (29),  $N_0 = 0.0005002$ ; (b) – для параметров, при которых условие (29) не выполнено,  $N_0 = 0.0004$

Когда условие (29) выполнено (рисунок 5 a), можно наблюдать сходимость нестационарного решения к найденному стационарному режиму (кривая 1). На рисунке 5 b представлен расчёт для функции  $u$ , когда ограничение (29) не выполнено. Как видно из рисунка, сходимость при больших временах есть, что следует из доказанной ограниченности решения при  $t \rightarrow \infty$ , но не к вычисленному с помощью дополнительного условия (28) стационарному решению (кривая 1).

В последнем разделе четвёртой главы показано, что условием совместности стационарных уравнений однонаправленного течения бинарной смеси

$$\begin{aligned} \rho_0^{-1} p_y &= -gF(T, C), & \rho_0^{-1} p_x &= \nu u_{yy}, \\ uT_x &= \chi(T_{xx} + T_{yy}), & uC_x &= D(C_{xx} + C_{yy}) + D^\theta(T_{xx} + T_{yy}) \end{aligned} \quad (30)$$

является уравнение на функцию  $F(T, C)$

$$T_x^2 F_{TT} + 2T_x C_x F_{TC} + C_x^2 F_{CC} + T_{xx} F_T + C_{xx} F_C = 0. \quad (31)$$

Анализ уравнения (31) даёт возможность построить некоторые точные решения системы (30), позволяющие описать режимы течения с линейным распределением температуры и концентрации по поперечной координате, а также с линейной по вертикальной переменной функцией температуры и концентрацией, существенно зависящей от обеих пространственных координат; показать, что режим течения с пропорциональными градиентами  $C_x$  и  $T_x$  невозможен, если вторые производные по  $x$  от функций температуры и концентрации пропорциональны квадратам указанных градиентов. Для системы (30), записанной для однородной жидкости с логарифмической зависимостью функции, определяющей силу плавучести, от температуры, получено точное решение.

В разделе 4.1 рассматривается система эволюционных уравнений диффузии

$$u_t^a = F^{ab}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) u_{x_i x_i}^b + G^a(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}). \quad (32)$$

Здесь  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$  – вектор пространственных координат,  $t$  – время,  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$  – зависимые переменные, индексы  $a, b = 1, \dots, m$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , оператор  $\nabla$  вычисляется по пространственным переменным. Матрица коэффициентов  $F$  произвольная ненулевая, то есть существует такая пара  $a, b$ , что  $F^{ab} \neq 0$ . Вектор  $G$  не содержит производных второго порядка и может быть нулевым. Наряду с уравнениями (32) рассматриваются аналогичные равенства

$$\tilde{u}_t^a = \tilde{F}^{ab}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i}^b + \tilde{G}^a(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}}). \quad (33)$$

Предполагается, что системы (32) и (33) связаны между собой точечными преобразованиями

$$\tilde{t} = T(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{U}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (34)$$

с ненулевым якобианом перехода. Доказано утверждение, что для любого невырожденного преобразования (34) перехода от системы (32) к систе-

ме (33) выполнено  $\tilde{t} = T(t)$  и  $\tilde{x} = X(t, x)$ . Это свойство позволяет упростить подсчёт коэффициентов инфинитезимального оператора при вычислении симметрий уравнений класса (32). Так, например, поскольку преобразование переменной  $t$  зависит только от времени, то и коэффициент инфинитезимального оператора при  $\partial_t$  может зависеть только от  $t$ . Соответствующая теорема доказана в работе Дж. Кингстона и К. Софоклеуса<sup>16</sup> и подтверждается многочисленными примерами. Поскольку уравнения (32) имеют достаточно произвольный вид, то результат доказанного утверждения о виде преобразования (34) применим ко многим уравнениям, описывающим диффузионные процессы разной природы.

Другие разделы **четвёртой** главы посвящены решению задачи групповой классификации для трёхмерных уравнений диффузии тепла и смеси с учётом эффекта Core

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi(T, C)\nabla T), \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(D(T, C)\nabla C + D^\theta(T, C)\nabla T). \quad (35)$$

Система (35) относится к классу (32), где  $m = 2$ ,  $n = 3$ ,  $u^1 = T$ ,  $u^2 = C$ .

Вычисленная основная алгебра операторов конечномерна и имеет вид

$$L^0 = \left\langle \partial_t, \partial_{x^i}, 2t\partial_t + \sum_{i=1}^3 x^i \partial_{x^i}, x^j \partial_{x^i} - x^i \partial_{x^j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j.$$

Её структура достаточно проста: в ней содержатся операторы переноса по времени и пространственным координатам, означая инвариантность уравнений (35) относительно сдвигов по переменным  $t$  и  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ; один оператор растяжения, не связанный с неизвестными функциям  $T$  и  $C$ , с помощью которого можно построить автомодельные решения исходных уравнений; три оператора вращения относительно всех трёх плоскостей. Все полученные операторы вполне естественны и допускаются многими уравнениями механики сплошных сред.

Найдены преобразования растяжения и сдвига, действующие на независимые и зависимые переменные и произвольные функции, не меняющие дифференциальной структуры исходных уравнений. Они используются для упрощения функциональной зависимости параметров при решении задачи групповой классификации относительно коэффициентов теплопроводности  $\chi$ , диффузии  $D$  и термодиффузии  $D^\theta$ , зависящих от температуры и концентрации. Все полученные результаты классификации уравнений (35) для удобства вынесены в таблицы. Анализ проводится по

<sup>16</sup>Kingston, J. G. On form-preserving point transformations of partial differential equations / J. G. Kingston, C. Sophocleous // J. Phys. A: Math. Gen. – 1998. – Vol. 31. – P. 1597–1619.

параметру  $\chi$ : рассматриваются 1)  $\chi = \text{const}$ , 2)  $\chi_c = 0$ , 3)  $\chi_c \neq 0$ . В случае  $\chi = \chi(T)$  выделяется функция  $\chi = \chi_0 T^{-4/5}$ , при которой координаты инфинитезимального оператора нелинейно зависят от пространственных переменных. Впервые степенная зависимость коэффициента переноса с отрицательным показателем была обнаружена Л. В. Овсянниковым при решении задачи групповой классификации для уравнения нелинейной теплопроводности<sup>17</sup>. Позже было отмечено<sup>18</sup>, что показатель зависит от размерности пространства и в трёхмерном случае равен  $-4/5$ .

В разделе 5.1 рассматриваются решения системы (35), инвариантные относительно переносов по  $t, x^1, x^2$ , то есть функции температуры  $T$  и концентрации  $C$  будут зависеть только от  $x^3 = z$ . Одномерные стационарные уравнения тепломассообмена имеют вид

$$\frac{d}{dz} \left( \kappa(T, C) \frac{dT}{dz} \right) = 0, \quad (36)$$

$$\frac{d}{dz} \left[ \rho(T, C) \left( D(T, C) \frac{dC}{dz} + C(1 - C) D_T(T, C) \frac{dT}{dz} \right) \right] = 0. \quad (37)$$

По сравнению с исходной системой (35), в уравнениях (36), (37) учтена переменная плотность  $\rho(T, C)$ , а коэффициент термодиффузии представляется в виде  $D^\theta = C(1 - C) D_T(T, C)$ . Вследствие формы уравнения теплопереноса (36) допустимо вместо параметра температуропроводности  $\chi$  использовать коэффициент теплопроводности  $\kappa = \rho_0 c_p \chi$ , где  $\rho_0$  – некоторая средняя плотность смеси,  $c_p$  – удельная теплоёмкость.

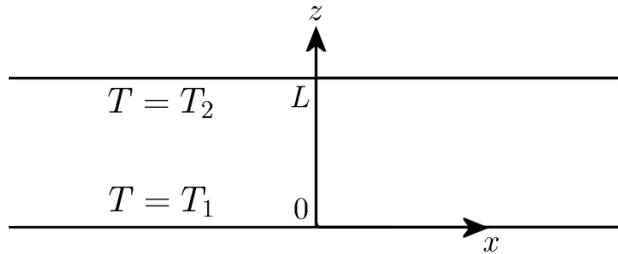


Рисунок 6 – Схема течения

Рассматривается изначально изотермическая ( $T = T_0$ ) и однородная ( $C = C_0$ ) жидкость, заполняющая область между двумя твёрдыми пластинами (рисунок 6).

Обозначая  $\Delta T = T_2 - T_1$  прилагаемую разность температур  $T_1$  и  $T_2$  на нижней и верхней стенке соответственно, считаем

$$T_1 = T_0 - \frac{\Delta T}{2}, \quad T_2 = T_0 + \frac{\Delta T}{2}.$$

Граница  $z = 0$  является менее нагретой по сравнению со стенкой  $z = L$  для всех постановок задач в этой главе. Разделение смеси на компо-

<sup>17</sup>Овсянников, Л. В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л. В. Овсянников // ДАН СССР. – 1959. – Т. 125, № 3. – С. 492–495.

<sup>18</sup>Дородницын, В. А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трёхмерном случаях / В. А. Дородницын, И. В. Князева, С. Р. Свирщевский // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т. 19, № 7. – С. 1215–1223.

ненты происходит вследствие действия эффекта Соре, изменяющего поле концентрации. В общем случае объём, который занимает смесь, не является постоянным в процессе разделения. Для того чтобы записать условие сохранения массы корректно, предположим, что жидкость занимает некоторый объём  $V$  в трёхмерном пространстве. Если верхняя и нижняя стенки имеют конечную площадь  $S$ , то  $V = SL$ . Условия сохранения массы выбранного компонента и сохранения общей массы смеси имеют вид

$$S' \int_0^{L'} \rho(T, C) C dz = \rho_0 C_0 SL, \quad S' \int_0^{L'} \rho(T, C) dz = \rho_0 SL, \quad (38)$$

где  $C_0$  – средняя концентрация,  $\rho_0 = \rho(T_0, C_0)$  – средняя плотность,  $V' = S'L'$  – модифицированный объём. В реальных экспериментах по определению коэффициентов переноса объём полости не меняется, избыточная жидкость выделяется через малое отверстие в стенке полости<sup>19</sup>. Выведенная в работе формула

$$\frac{V'}{V} = \frac{\rho_0 \int_{T_1}^{T_2} \kappa(T, C(T)) dT}{\int_{T_1}^{T_2} \rho(T, C(T)) \kappa(T, C(T)) dT} \quad (39)$$

позволяет оценить вклад учёта переменной плотности и теплопроводности в изменение объёма смеси.

Условия для температуры на стенках и свойство их непроницаемости выражены равенствами

$$T(0) = T_1, \quad T(L') = T_2, \quad (40)$$

$$\rho(T, C) \left( D(T, C) \frac{dC}{dz} + C(1 - C) D_T(T, C) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad \text{при } z = 0, L'. \quad (41)$$

Далее строится решение задачи (36), (37), (40), (41) с дополнительным условием на концентрацию (используется одно из равенств (38)).

Интегрируя уравнения (36) и (37) один раз, учитывая граничные условия (41), находим

$$\kappa(T, C) \frac{dT}{dz} = \kappa_0, \quad \frac{dC}{dz} + C(1 - C) S_T(T, C) \frac{dT}{dz} = 0, \quad (42)$$

<sup>19</sup>Mialdun, A. Measurement of the Soret and diffusion coefficients for benchmark binary mixtures by means of digital interferometry / A. Mialdun, V. Shevtsova // J. Chem. Phys. – 2011. – Vol. 134. – P. 044524.

где  $\kappa_0$  – постоянная интегрирования,  $S_T = D_T/D$  – коэффициент Соре,  $D \neq 0$ . Применим к системе (42) преобразование годографа: пусть теперь  $T$  – новая независимая переменная,  $z$  и  $C$  – неизвестные функции аргумента  $T$ , то есть  $z = z(T)$ ,  $C = C(T)$ . Тогда уравнения (42) и граничные условия (40) могут быть записаны в виде

$$\frac{dz}{dT} = \frac{\kappa(T, C)}{\kappa_0}, \quad z(T_1) = 0, \quad z(T_2) = L', \quad (43)$$

$$\frac{dC}{dT} = -C(1 - C)S_T(T, C), \quad C(T_1) = C_1. \quad (44)$$

Здесь добавлено условие с неизвестной постоянной  $C_1$  – значение концентрации на нижней границе слоя. Эта константа находится из соотношения

$$\int_{T_1}^{T_2} \rho(T, C(T)) \kappa(T, C(T)) (C(T) - C_0) dT = 0, \quad (45)$$

которое является следствием равенств в (38).

Предлагается следующая **схема** построения решения для нахождения функций температуры и концентрации в общем случае (когда все коэффициенты переноса зависят от неизвестных  $T$  и  $C$ ):

1. Аналитически или численно решается задача (44), (45) для определения концентрации  $C(T)$ . В случае численного интегрирования следует применить метод пристрелки.
2. Из (43) восстанавливается функция  $z(T)$ , которую следует обратить для того, чтобы найти  $T(z)$ .
3. Чтобы вычислить  $C(z)$ , необходимо  $T(z)$  подставить в полученную при реализации п. 1 функцию  $C = C(T)$ .

Отметим, что обратная замена в п. 2 возможна, когда зависимость  $z(T)$  монотонна. В изучаемых далее частных случаях построения решения задачи (43), (44), (45) предложенный алгоритм будет использоваться для тех задач, где функция  $T$  не находится явно через переменную  $z$  (как правило, при зависимости коэффициентов переноса от обоих параметров состояния). Если последнее не выполнено, то решение строится простым последовательным интегрированием.

Возможность получения аналитического решения задачи (44), (45) зависит от вида коэффициента  $C(1 - C)S_T(T, C) = S'_T$ . Точные решения построены и использованы для описания термодиффузионного разделения в смеси вода–этанол ( $S'_T = \text{const}$ ), водном растворе хлорида натрия ( $S'_T = S'_T(T)$ ), коллоидной суспензии частиц полистирола ( $S'_T = CS'_T(T)$ ).

Показано, что необходимо приложить достаточно большую разность температур  $\Delta T$  для того, чтобы разница характеристик теплообмена в перечисленных смесях, посчитанных при постоянных и переменных коэффициентах переноса, стала заметной. Приведём здесь два примера, в которых решение задачи (43), (44), (45) построено численно для изменяющихся физических параметров.

**Пример 1.** Рассматривается смесь вода–этанол при средней температуре  $T_0 = 30^\circ\text{C}$  и средней концентрации этанола  $C_0 = 0.14$ . Теплопроводность  $\kappa$  может быть аппроксимирована полиномом

$$\kappa(T, C) = 0.56607 + 0.00152 T - 0.56360 C - 1.59 \cdot 10^{-6} T^2 - 0.00172 T C + 0.17006 C^2.$$

Эта формула применима в диапазоне  $0 \leq T \leq 80^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq C \leq 1$ . Коэффициент Соре задан выражением<sup>20</sup>

$$S_T(T, C) = (1 - 0.00931 T)(11.46 - 15.36 C - 145.3 C^2 + 237.8 C^3 - 65.16 C^4) \cdot 10^{-3},$$

которое справедливо для  $10^\circ\text{C} \leq T \leq 60^\circ\text{C}$ ,  $0 \leq C \leq 0.6$ . Плотность предполагается постоянной. Задача решена в соответствии с общей схемой, предложенной выше, посредством численного интегрирования.

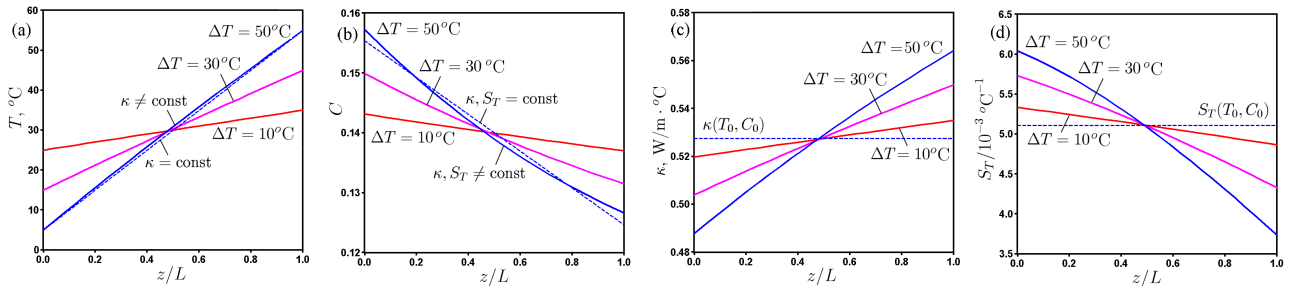


Рисунок 7 – Профили температуры (а), концентрации этанола (б), теплопроводности (с) и коэффициента Соре (д) в смеси вода–этанол в зависимости от приложенной разности температур  $\Delta T$

Полученные профили температуры и концентрации показаны на рисунках 7 а, б. Компонент смеси этанол скапливается у менее нагретой стенки, поскольку для концентраций менее 30 процентов раствор вода–этанол демонстрирует аномальный эффект термодиффузии. Разделение становится более выраженным при увеличении разности температур. Для

<sup>20</sup>Königer, A. Measurement of Soret, diffusion and thermal diffusion coefficients of three binary organic mixtures using a beam deflection technique / A. Königer, B. Meier, W. Köhler // Philos. Magazine. – 2009. – Vol. 89. – P. 907–923.

$\Delta T = 50^\circ\text{C}$  разница между линейными и нелинейными профилями обеих функций  $T$  и  $C$ , соответствующая постоянным (сплошная синяя кривая) и переменным (пунктирная синяя кривая) свойствам смеси, наиболее существенна. Меньшие разности температур таких отличий не дают и для  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$ ,  $\Delta T = 30^\circ\text{C}$  на рисунках приведены результаты расчёта только для постоянных параметров. Изменения теплопроводности и коэффициента Соре относительно их средних постоянных значений показаны на рисунках 7 *c, d* для разных  $\Delta T$ . Вариабельность этих параметров связана с приложенной температурой и индуцируемой эффектом термодиффузии разностью концентраций.

**Пример 2.** Данный пример основан на исследовании, моделирующем разделение смеси полимеров полидиметилсилоксан и полиэтилметилсилоксан (PDMS/PEMS) вблизи точки фазового расслоения<sup>21</sup>. Часть фазовой диаграммы для этой смеси на плоскости  $C$ – $T$  показана на рисунке 8 *c*. Двухфазная область ограничена сверху кривой бинодалью. Кривая спинодаль соответствует абсолютной неустойчивости смеси. Вне этой кривой смесь метастабильна. Экстремум обеих кривых называется критической точкой разделения.

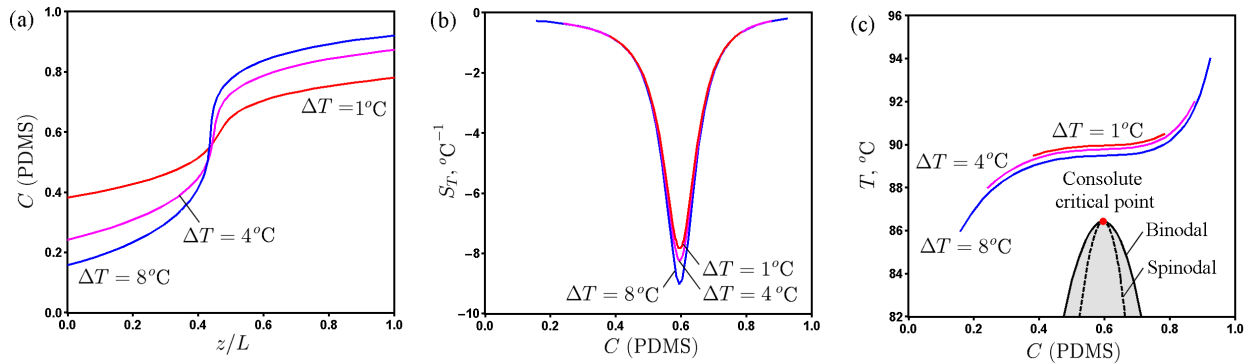


Рисунок 8 – Профили концентрации PDMS (a) и коэффициента Соре (b). Траектории системы на фазовой плоскости  $C$ – $T$  (c). В закрашенной области реализуется двухфазное течение

Параметр  $S_T$  аппроксимируется выражением

$$S_T(T, C) = S_T^0 \left( \frac{T - T_{sp}}{T} \right)^{-1}, \quad (46)$$

где  $S_T^0 = -0.07611 \text{ K}^{-1}$ ,  $T_{sp} = 200.3 + 356.8 C - 423 C^4 \text{ K}$ . Температура в (46) измеряется в градусах Кельвина, коэффициент Соре – в  $\text{K}^{-1}$ , для вычислений и построения графиков проводится пересчёт в градусы Цельсия. Кри-

<sup>21</sup>Voit, A. Laser-induced structures in a polymer blend in the vicinity of the phase boundary / A. Voit, A. Khrekov, A. Köhler // Phys. Rev. E. – 2007. – Vol. 76. – P. 011808.

тическая точка расслоения соответствует  $T_c = 86.4^\circ\text{C}$ ,  $C_c = 0.6$  (см. рисунок 8 с). Поскольку полимеры PDMS и PEMS имеют близкие плотности и теплопроводности, эти параметры в смеси считаются постоянными.

Используя представление коэффициента Соре (46), исследуем разделение смеси вблизи точки расслоения при  $T_0 = 90^\circ\text{C}$ ,  $C_0 = 0.6$ . Будем считать, что профиль температуры линейный и задан формулой

$$T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} z. \quad (47)$$

Функция  $C(z)$  (рисунок 8 а) получена численным интегрированием задачи (44) посредством метода пристрелки для определения постоянной  $C_1$  из (45). Можно видеть, что даже малые разности температур ( $\Delta T = 1^\circ\text{C}$ ) индуцируют большие разности концентраций ( $\Delta C = 0.398$ ). Это можно наблюдать и на рисунке 8 с, где изображены траектории в фазовой плоскости  $C$ – $T$ . Заметное разделение соответствует значительному росту коэффициента  $S_T$  вблизи  $C_0 = 0.6$  (рисунок 8 б). С ростом  $\Delta T$  разделение в слое становится ещё более явным: для разности  $\Delta T = 10^\circ\text{C}$  (синяя кривая на рисунке 8 а) разность концентраций составляет около 60 %. Расчёты показывают, что в удалённой от критической точки ( $T_c = 86.4^\circ\text{C}$ ,  $C_c = 0.6$ ) области коэффициент Соре уменьшается, и потребуются прикладывать большие разности температур, чтобы достичь такого же эффекта расслоения, как вблизи точки  $T_c$ ,  $C_c$ .

Хорошо известно, что диффузия примеси в жидкости происходит намного медленнее диффузии тепла. Следуя этому, в разделе 5.2 считается, что коэффициент теплопроводности постоянный, температура уже установилась и определяется по формуле (47). Тем самым рассматривается нестационарное уравнение термодиффузионного массообмена

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D(T, C) \frac{\partial C}{\partial z} + D^\theta(T, C) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (48)$$

здесь  $z$  – по-прежнему вертикальная координата, схема течения приведена на рисунке 6. На границах  $z = 0$ ,  $z = L$  сохраняются условия отсутствия потока вещества через твёрдые стенки:

$$D(T, C) \frac{\partial C}{\partial z} + D^\theta(T, C) \frac{\partial T}{\partial z} = 0. \quad (49)$$

В начальный момент времени  $t = 0$  концентрация постоянна и совпадает со средней, то есть выполнено

$$C|_{t=0} = C_0 \quad \text{при} \quad 0 < z < L. \quad (50)$$

Решение задачи (48)–(50) построено для следующих зависимостей коэффициентов диффузии и термодиффузии от температуры и/или концентрации

$$1. D(T) = b_0 + b_1 T, \quad D^\theta(T) = C_0(1 - C_0)(a_0 + a_1 T + a_2 T^2),$$

$$2. D = \text{const}, \quad D_1^\theta = F_0 C, \quad D_2^\theta = (F_0 T + F_1) C,$$

где  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $b_j$ ,  $F_j$ ,  $j = 0, 1$ , – постоянные. В первом случае построенное с помощью численного обращения преобразования Лапласа решение использовано для описания массообмена в водном растворе хлорида натрия, доказано утверждение, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} C(z, t) = C^s(z)$ , где функция  $C^s(z)$  соответствует стационарному режиму, стабилизация происходит за время, меньшее диффузионного времени процесса, равного  $L^2/D \approx 10^6$  с. В обоих вариантах представления коэффициента  $D^\theta$  в случае 2 решение задачи строится в виде рядов с параметрами, соответствующими водной суспензии частиц полистирола. Графически показано, что при приближении расчётного значения  $t$  к диффузионному времени устанавливается соответствующий стационарный режим.

**В заключении** приведены **основные результаты диссертации**:

1. Для двумерных уравнений конвекции бинарной смеси впервые решена задача групповой классификации относительно пяти параметров, зависящих от температуры и концентрации: коэффициентов вязкости, температуропроводности, диффузии, термодиффузии и функции, определяющей силу плавучести. Получены представления указанных коэффициентов и группы преобразований зависимых и независимых переменных, входящих в исходную систему. Этот результат является обобщением известных на настоящее время классификаций уравнений конвекции: для бинарной смеси при постоянных коэффициентах переноса и в случае движения однородной жидкости с постоянными и переменными физическими свойствами. С помощью полученных групп преобразований построены примеры редукций исходной системы, некоторые из них проинтегрированы в конечных формулах, другие сведены к квадратурам. Рассмотрены две задачи о конвективном течении в вертикальном слое под действием нелинейной силы плавучести и градиентов концентрации и температуры, моделирующие течение в термогравитационной колонне. Для обеих задач доказан ряд свойств их решений. Построены профили скорости и функции, определяющей силу плавучести, иллюстрирующие доказанные свойства и показывающие отличия режимов течения, учитывающих линейную и нелинейную зависимость плотности от температуры.

2. Исследованы режимы однонаправленных движений бинарных смесей посредством анализа точных решений уравнений термодиффузионной конвекции в приближении Обербека – Буссинеска. Получены следующие результаты:

- впервые установлено, что для существования решения исследуемых уравнений необходимо, чтобы в случае полиномиальной зависимости температуры от горизонтальной координаты это был многочлен степени не выше третьей. При этом все известные постановки задач для кубического распределения температуры приводят к выражению для функции скорости  $u = \text{const}$ ,  $u = u(t)$ ;
- для квадратичной зависимости температуры от продольной координаты построены два новых точных стационарных решения, не являющиеся обобщением известных ранее и не сводящиеся к ним в предельных случаях. Показано, что одно из решений имеет физическую интерпретацию. На его основе исследован режим течения бинарной смеси в узком зазоре, проведён анализ влияния толщины канала на интенсивность термодиффузионного разделения. Обосновано использование полученного решения для моделирования испарения на границе раздела двухслойной системы, в нижнем слое которой находится жидкая бинарная смесь, в верхнем – смесь испаряющегося из нижнего слоя компонента и пассивного газа. Изучено воздействие гравитационных сил, эффекта Соре, скорости подачи газа, а также влияние размеров жидкого слоя на массовую скорость испарения примеси с границы раздела двух фаз. Тем самым к немногим имеющимся в литературе примерам точных решений уравнений термодиффузионной конвекции добавлено новое, адекватно описывающее тепломассоперенос в двухкомпонентных смесях, решение;
- решена задача об определении градиента давления, необходимого для обеспечения заданного расхода жидкости через поперечное сечение слоя, стенки которого подогреваются по линейному закону относительно продольной координаты. Получены условия установления нестационарного процесса на больших временах; показано, что важным ограничением на выполнение свойства сходимости к соответствующему стационарному режиму является необходимость согласования начального градиента концентрации со стационарным распределением градиентов температуры на стенках и заданным расходом;
- для уравнений однонаправленного течения бинарной смеси при

нелинейной силе плавучести выведено условие их совместности, выражающееся уравнением параболического типа для функции, определяющей силу плавучести. В зависимости от коэффициентов этого уравнения построены некоторые решения исходной системы. Показано, что возможно существование режима течения однородной жидкости с логарифмической зависимостью силы плавучести от температуры при условии экспоненциального распределения последней на стенках горизонтального канала.

3. Для общих многомерных уравнений диффузии найдены точечные преобразования, переводящие данный класс уравнений в себя, упрощающие поиск инфинитезимальных преобразований эволюционных систем достаточно общего вида. С их помощью, применяя метод симметрий, для системы, описывающей процесс бесконвективного термодиффузионного разделения бинарной смеси, впервые получено исчерпывающее решение задачи групповой классификации относительно коэффициентов температуропроводности, диффузии и термодиффузии, являющихся функциями температуры и концентрации.
4. Изучен процесс термодиффузионного разделения бинарной смеси на компоненты в плоском горизонтальном слое под действием разности температур с изменяющимися физическими свойствами на основе анализа точных решений нелинейных уравнений одномерного теплообмена. Доказано, что решение поставленной задачи единственно, если функции плотности и теплопроводности зависят только от температуры. Предложена универсальная схема построения решения задачи, которая иллюстрируется шестью примерами описания процесса разделения разных смесей с переменными коэффициентами переноса. Обнаружено, что их непостоянство особенно сильно проявляется при решении задач о смесях полимеров вблизи критической точки расслоения. Исследован нестационарный режим массообмена при установившейся температуре для двух бинарных смесей с переменными коэффициентами диффузии и/или термодиффузии. Показана стабилизация и сходимость к соответствующим стационарным режимам при приближении времени расчёта к диффузионному времени процесса разделения.

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ТРУДОВ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

*Статьи в журналах, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук:*

1. Андреев В. К. Неклассические модели конвекции: точные решения и их устойчивость / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова, М. В. Ефимова, И. И. Рыжков, **И. В. Степанова** // Вычислительные технологии. – 2009. – Т. 14, № 6. – С. 5–18. – 0,64 / 0,1 а. л.
2. Андреев В. К. Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15, № 4. – С. 47–55. – 0,41 / 0,27 а. л.
3. **Степанова И. В.** О конвекции бинарной смеси в вертикальном слое под действием эффекта Соре при нелинейной силе плавучести / И. В. Степанова // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – № 4–3. – С. 1135–1136. – 0,1 а. л.
4. Андреев В. К. Об одном конвективном течении бинарной смеси в вертикальном слое / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14, № 1. – С. 17–26. – 0,46 / 0,23 а. л.
5. **Степанова И. В.** Об инвариантном решении уравнений термодиффузии при нелинейной силе плавучести / И. В. Степанова // Прикладная математика и механика. – 2013. – Т. 77, № 3. – С. 452–461. – 0,5 а. л.

*в переводной версии журнала, входящей в Web of Science:*

**Stepanova I. V.** The invariant solution of thermal diffusion equations for a non-linear buoyancy force / I. V. Stepanova // PMM Journal Of Applied Mathematics And Mechanics. – 2013. – Vol. 77, is. 3. – P. 330–337. – DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.00.

6. Андреев В. К. Однонаправленные течения бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Известия РАН: Механика жидкости и газа. – 2016. – № 2. – С. 13–24. – 0,5 / 0,25 а. л.

в переводной версии журнала, входящей в *Scopus*:

Andreev V. K. Unidirectional flows of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51, № 2. – P. 136–147. – DOI: 10.1134/S0015462816020022.

7. Андреев В. К. Об условиях существования однонаправленных движений бинарных смесей в модели Обербека–Буссинеска / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Сибирский журнал промышленной математики. – 2019. – Т. 22, № 2(78). – С. 3–12. – DOI: 10.33048/SIBJIM.2019.22.201. – 0,46 / 0,23 а. л.

в переводной версии журнала, входящей в *Scopus*:

Andreev V. K. On the conditions for existence of unidirectional motions of binary mixtures in the Oberbeck–Boussinesq model / В. К. Андреев, **И. В. Степанова** // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2019. – Vol. 13, № 2. – P. 185–193. – DOI: 10.1134/S1990478919020017.

8. **Stepanova I. V.** Construction and analysis of exact solution of Oberbeck–Boussinesque equations / I. V. Stepanova // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2019. – Т. 12, № 5. – С. 590–597. – DOI: 10.17516/1997-1397-2019-12-5-590-597. – 0,36 а. л.

*Web of Science*: **Stepanova I. V.** Construction and analysis of exact solution of Oberbeck–Boussinesque equations / I. V. Stepanova // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2019. – Vol. 12, № 5. – P. 590–597.

9. Andreev V. K. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions / V. K. Andreev, **I. V. Stepanova** // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2021. – Т. 14, № 4. – С. 445–451. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451. – 0,27 / 0,14 а. л.

*Web of Science*: Andreev V. K. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions / V. K. Andreev, **I. V. Stepanova** // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2021. – Vol. 14, № 4. – P. 445–451.

10. **Stepanova I. V.** Group classification for equations of thermodiffusion in binary mixture / I. V. Stepanova // Communications in Nonlinear Science

- and Numerical Simulation. – 2013. – Vol. 18, № 6. – P. 1341–1346. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.10.013. – 0,27 а. л. (*Web of Science*).
11. Andreev V. K. Ostroumov–Birikh solution of convection equations with nonlinear buoyancy force / V. K. Andreev, **I. V. Stepanova** // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 228. – P. 59–67. – DOI: 10.1016/j.amc.2013.11.002. – 0,41 / 0,2 а. л. (*Web of Science*).
  12. **Stepanova I. V.** Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect / I. V. Stepanova // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – Vol. 20, № 3. – P. 684–691. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2014.06.043. – 0,36 а. л. (*Web of Science*).
  13. Ryzhkov I. I. On thermal diffusion separation in binary mixtures with variable transport coefficients / I. I. Ryzhkov, **I. V. Stepanova** // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2015. – Vol. 86. – P. 268–276 – DOI:10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.02.069. – 0,41 / 0,2 а. л. (*Web of Science*).
  14. **Stepanova I. V.** Symmetry of heat and mass transfer equations in case of dependence of thermal diffusivity coefficient either on temperature or concentration / I. V. Stepanova // Mathematical Methods in Applied Science. – 2018. – Vol. 41, № 8. – P. 3213–3226. – DOI:10.1002/mma.4811. – 0,59 а. л. (*Web of Science*).
  15. **Stepanova I. V.** Group analysis of variable coefficients heat and mass transfer equations with power nonlinearity of thermal diffusivity / I. V. Stepanova // Applied Mathematics and Computations. – 2019. – Vol. 343. – P. 57–66. – DOI: 10.1016/j.amc.2018.09.036. – 0,46 а. л. (*Web of Science*).
  16. Andreev V. K. Non-stationary unidirectional motion of binary mixture in long flat layer / V. K. Andreev, **I. V. Stepanova** // International Journal of Applied and Computational Mathematics. – 2020. – Vol. 6, № 6. – P. 169. – DOI: 10.1007/s40819-020-00924-0. – 0,27 / 0,14 а. л. (*Scopus*).
  17. **Stepanova I. V.** On influence of geometrical parameters and flow rate on mass transfer through interface of two binary mixtures / I. V. Stepanova // Interfacial phenomena and heat transfer. – 2020. – Vol. 8, № 4. – P. 273–290. – 0,82 а. л. (*Web of Science*).

18. Bekezhanova V. B. Evaporation convection in two-layers binary mixtures: equations, structure of solution, study of gravity and thermal diffusion effects on the motion [Electronic resource] / V. B. Bekezhanova, **I. V. Stepanova** // Applied Mathematics and Computations. – 2022. – Vol. 414. – Article number 126424. – 15 p. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300321005130?> – DOI: 10.1016/j.amc.2021.126424. – 0,68 / 0,36 а. л. (*Web of Science*).

*Статьи в сборниках материалов конференций, представленных в изданиях, входящих в Web of Science и/или Scopus:*

19. Ryzhkov I. I. On some exact solutions of heat and mass transfer equations with variable transport coefficients / I. I. Ryzhkov, **I. V. Stepanova** // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2016. – Vol. 191 : Proceedings of the 11th International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics. Varna, Bulgaria, June 15–21, 2015. – P. 599–605. – DOI: 10.1007/978-981-10-2636-248. – 0,27 / 0,14 а. л. (*Scopus*).
20. **Stepanova I. V.** On some group properties of heat and mass transfer equation [Electronic resource] / I. V. Stepanova // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 894 : All-Russian conference with international participation modern problems of continuum mechanics and explosion physics dedicated to the 60th anniversary of Lavrentyev institute of hydrodynamics SB RAS. Novosibirsk, September 04–08, 2017. – Article number 012190. – 8 p. – URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/894/1/012090> (access date: 24.03.2022). – DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012090. – 0,36 а. л. (*Web of Science*).

*Прочие публикации:*

21. **Степанова И. В.** Модели термодиффузионной конвекции: симметрии и точные решения / И. В. Степанова // Современные проблемы математического моделирования : материалы XV Всероссийской конференции-школы молодых исследователей. Абрау-Дюрсо, 16–21 сентября 2013 г. – Ростов-на-Дону, 2013. – С. 241–245. – 0,23 а. л.
22. **Степанова И. В.** О точных решениях уравнений конвекции при нелинейной силе плавучести / И. В. Степанова // Успехи механики сплошных сред : материалы международной конференции. Владивосток, 28 сентября – 04 октября 2014 г. – Владивосток, 2014. – С. 462–465. – 0,18 а. л.

23. **Степанова И. В.** О влиянии переменных коэффициентов переноса на термодиффузионное разделение бинарных смесей / И. В. Степанова // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики : сборник докладов. Казань, 20–24 августа 2015 г. – Казань, 2015. – С. 3586–3588. – 0,14 а. л.
24. **Степанова И. В.** Симметрии в уравнениях тепломассопереноса в вязких жидкостях (обзор) / И. В. Степанова // Вестник Омского университета. – 2019. – Т. 24, № 2. – С. 51–65. – 0,68 а. л.
25. **Stepanova I. V.** On some exact solutions of convection equations with buoyancy force / I. V. Stepanova // Group analysis of Differential equations and integrable systems : proceedings of the 6th Workshop. Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012. – Nicosia, 2013. – P. 219–224. – 0,23 а. л.

*Издание подготовлено в авторской редакции*

Подписано в печать 15.06.2022 г.

Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .

Усл. печ. л. 2.55. Тираж 130 экз.

Отпечатано в ИВМ СО РАН

660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, 50/44