**Кальницкий, Вячеслав Степанович.**

## Симметрии геодезического потока на гладких многообразиях с аффинной связностью : диссертация ... кандидата физико-математических наук : 01.01.04. - Санкт-Петербург, 1999. - 72 с.

## Введение диссертации (часть автореферата)на тему «Симметрии геодезического потока на гладких многообразиях с аффинной связностью»

Диссертация относится к активно развивающемуся направлению, связанному с изучением бесконечномерных пространств, возникающих в дифференциальной геометрии. Примерами таких пространств служат группы диффеоморфизмов гладких многообразий, пространство векторных полей, тензорных полей и связностей на гладком многообразии.

Создатели теории Ли рассматривали группу Ли как группу сим-метрий алгебраического или геометрического объекта; соответствующая алгебра Ли рассматривалась как множество инфините-зимальных преобразований. Поскольку группа симметрий такого объекта не обязательно конечномерна, Софус Ли рассматривал не только проблему классификации подгрупп группы 0Ьп, но также проблему классификации бесконечных групп преобразований. В начале 20-го века Э. Картан классифицировал простые бесконечномерные алгебры Ли векторных полей на конечномерном пространстве.

Однако работы Картана были практически забыты до середины шестидесятых годов. Интерес к этой области начал возрождаться с работ Гийемина и Стернберга, которые развили соответствующий алгебраический язык и технику фильтрованных и градуированных алгебр Ли. Им удалось доказать классификационную теорему Картана аналитически, а позже Вейсфейлер привел ее алгебраическое доказательство.

В настоящее время нет общей теории бесконечных групп и ал2 гебр Ли и их представлений. Имеется некоторый набор классов бесконечномерных групп и алгебр, которые подвергались более или менее интенсивному исследованию. Прежде всего это алгебры Ли векторных полей и соответствующие группы диффеоморфизмов многообразия.

Рассмотрим, например, группу И(М) всех диффеоморфизмов гладкого многообразия М. Пространство инфинитезимальных автоморфизмов— это пространство всех гладких векторных полей Х(М). Если М не компактно, то о О(М) и Х(М) практически ничего не известно (см. [1]). Одна из трудностей в наделении В(М) структурой бесконечномерной группы Ли (в каком- либо смысле) заключается в отсутствии соответствующей алгебры Ли. Так как векторные поля не полны, то Х(М) слишком обширна для того, чтобы быть алгеброй Ли группы £>(М). С другой стороны, подмножество в Х(М), состоящее из полных полей, не является даже линейным подпространством в Х(М). Пале [2] привел пример двух полных векторных полей, сумма которых не является полным векторным полем.

Не все геометрические структуры, выражаясь словами Кобая-си, созданы равными в смысле строения ее группы автоморфизмов. Однако обширность объектов не умаляет их значимости. Так в 1966 году В. И. Арнольд ввел в рассмотрение группу гладких диффеоморфизмов многообразия, сохраняющих элемент объема, и показал, что геодезические на этой группе представляют собой потоки идеальной несжимаемой жидкости. Эта работа в значительной ме3 ре стимулировала изучение групп диффеоморфизмов, сохраняющих тот или иной геометрический объект на многообразии.

Одной из мало изученых в силу своей обширности является группа автоморфизмов векторного поля на многообразии. Если поле нулевое, то ее группа симметрии это уже упомянутая группа диффеоморфизмов многообразия. В 1970 году X. Омори [3] определил на этой группе так называемую структуру ШЬ-группы Ли, рассматривая ее как обратный предел банаховых многообразий. В 1984 году в продолжение работ В. И. Арнольда Н. К. Смоленцев [4] показал, что если гладкое векторное поле X на компактном многообразии М бездивергентно и нигде не обращается в ноль, то группа диффеоморфизмов, сохраняющих объем и поле X, является 1НЬ-группой и ее алгебра Ли состоит из бездивергентных векторных полей на М, коммутирующих с X.

Для случая вещественно-аналитического многообразия М2п в 1995 году М. А. Паринов [5] доказал, что если А— ковекторное поле, чей дифференциал задает симплектическую структуру, то группа автоморфизмов А является конечномерной группой Ли и ее размерность не превосходит 2п2 + п. Отмечено, что для неаналитического случая утверждение не имеет места.

Гамильтоновы поля на кокасательном расслоении Т\*М С00-многообразия М2 были изучены в работах В. В. Козлова [6, 7, 8]. Изучая динамические системы, порождаемые гамильтоновым полем Уд с гамильтонианом Н, В. В. Козлов пришел к изучению полей симметрии {11\[?/, Уя] = 0}. Оказывается, что наличие и вид полей 4 симметрии существенно зависит от топологии М2. Разлагая поле симметрии в окрестности равновесия, В. В. Козлов вводит понятие однородного поля степени к, по степени однородности полиномов, являющихся компонентами разложения. Показывается, что если поле II является полем симметрии, то и каждое однородное поле из разложения является таковым, что сводит изучение полей симметрии к полям выделенного типа. Основные результаты исследования выражаются в формулировании топологических препятствий к полному интегрированию геодезических потоков на двумерных замкнутых поверхностях. Этот вопрос для больших размерностей затрагивается в работе И.А.Тайманова [9].

При исследовании однородных полей симметрии естественным образом возникают симметричные тензорные поля. Следует отметить, что математический анализ кососимметрических тензорных полей на многообразиях имеет давнюю историю и глубокие результаты. Большая часть из них относится к оператору дифференцирования. Совершенно иная ситуация наблюдается в анализе симметричных тензорных полей. Здесь, за исключением младших степеней 1 и 2, нет сколько-нибудь общих результатов и даже не выделены диференциальные операторы, представляющие интерес для исследования. В работе В. А. Шарафутдинова [10] предпринято систематическое исследование структуры пространства симметрических тензорных полей на римановом С°°-многообразии М в связи с решением некоторого уравнения на ТМ, задаваемого геодезическим векторным полем и имеющего приложение в геодезии. 5

Как аналог оператора дифференцирования рассматривается симме-тризованый оператор ковариантного дифференцирования, вводится в рассмотрение алгебра симметричных тензоров с симметричным умножением. Все указанные понятия, хотя и отличаются простотой и естественностью, по всей видимости, введены автором впервые (см. обзор [11]).

Оперирование с симметрическими тензорами высоких рангов естественным образом приводит к необходимости введения удобных обозначений для проведения доказательств и записи результатов. На возникающем в ходе исследования пространстве симметрических тензоров, следуя общей идеологии [10], в §2 Гл. I вводятся симметризованный дифференциал и операция дифференцирования вдоль поля. Отличие от [10] состоит лить в том, что объектом настоящего исследования являются поля типа (1,к), а не (0,к). Это вносит свою специфику в рассуждения. Большой объем прямых вычислений, приводимых в Приложении А, приходится на доказательство основных соотношений между введенными операциями. Однако в дальнейшем это компенсируется простотой доказательства основных результатов.

Рассматривая наиболее общую постановку задачи об исследовании симметрии геодезического поля аффинной связности на касательном расслоении, следует иметь в виду, что из общих соображений, не затрагивающих тонких вопросов полноты инфинитезималь-ных симметрии поля или глобальных свойств движений, не удается сформулировать сколько-нибудь содержательный результат, каса6 ющийся структуры группы симметрий. Этот тезис, в частности, подтверждается всей предыдущей историей вопроса. В настоящей диссертации сделан первый шаг в этом направлении. Наличие послойной гомотетии касательного расслоения позволяет построить внутренний гомоморфизм группы симметрий, деформирующий непрерывно в смысле компактно-открытой топологии любую симметрию к симметрии особого вида— дифференциалу некоторого диффеоморфизма самого многообразия. Последние, в свою очередь, образуют группу преобразований, для которой введено обозначение Т~С. Глава I посвящена исследованию свойств этих преобразований. Основным результатом исследования является

Теорема 1.5. Группа Л является группой Ли преобразований Мп в компактно-открытой топологии и имеет размерность сИт'Н < п2 + п.