

На правах рукописи

ШАБУРОВ Александр Александрович

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ГЛАДКИМИ
ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ
И ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ
КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Екатеринбург—2019

Работа выполнена на кафедре математического анализа Института естественных наук и математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования “Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина”.

Научный руководитель: **Данилин Алексей Руфимович**
доктор физико–математических наук,
профессор

Официальные оппоненты: **Курина Галина Алексеевна**
доктор физико–математических наук,
профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО “Воронежский государственный университет”.

Зайцев Василий Александрович
доктор физико–математических наук,
доцент, начальник управления развитием научной и инновационной деятельности ФГБОУ ВО “Удмуртский государственный университет”.

Ведущая организация: Институт математики с вычислительным центром—обособленное структурное подразделение ФГБНУ Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

Защита состоится 11 декабря 2019 г. в 15 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620108, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН:

http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01.

Автореферат разослан “ ” октября 2019 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико–математических наук,

Костоусова Елена Кирилловна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Математическая теория оптимального управления создана в 60–х и 70–х годах усилиями отечественных математиков: Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Красовского, а также зарубежных авторов: Р. Э. Беллмана и Р. Ф. Калмана.

Опубликованные в период с 1948 по 1952 гг. работы А. Н. Тихонова о дифференциальных уравнениях с малым параметром при старшей производной стали отправной точкой для последующего глубокого развития теории сингулярно возмущенных задач. Такие задачи характеризуются неравномерным приближением решения к решению вырожденной задачи (когда малый параметр при производной равен нулю) и наличием пограничного слоя. Асимптотический метод М. И. Вишика и Л. А. Люстерника применим к широким классам уравнений с частными производными с малым параметром при старших производных. В случае периодической задачи пользуются другим подходом — “методом усреднения” Боголюбова–Крылова. Построение асимптотики сингулярно возмущенных уравнений в различных формулировках содержатся в работах В. Ф. Бутузова, А. Б. Васильевой, А. Б. Зиминой, А. М. Ильина, К. А. Касимова и др.

Начало активному изучению асимптотики решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления положила совместная статья Н. Х. Багировой, А. Б. Васильевой, М. И. Иманалиева¹. Такие задачи рассматривались в работах отечественных математиков, например в статьях В. Г. Гайцгори, В. Я. Глизера, М. Г. Дмитриева. В различной постановке сингулярно возмущенные задачи управления изучены в работах зарубежных исследователей: А. Е. Bryson, А. Dontchev, W. Fleming, T. R. Gichev, А. Н. Haddad, Y. С. Ho, R. Isaaks, Н. К. Khalil, D. E. Kirk, P. V. Kokotovich, L. B. Lee, L. Markus, D. S. Naidu, R. E. O’Malley, R. Rishel.

При решении задач с открытой областью управления пользуются “методом пограничных функций” или “пограничного слоя”, разработанным А. Б. Васильевой и впоследствии усовершенствованным с учениками В. Ф. Бутузовым, Н. Н. Нефедовым. “Метод прямой схемы”, основанный на “методе пограничных функций”, применялся С. В. Белокопытовым, М. Г. Дмитриевым для решения сингулярно возмущенных задач.

Для решения задач с замкнутой и ограниченной областью управления реализация указанных подходов встречает серьезные трудности, поскольку отсутствует необходимая гладкость управления для применения вышеописанных

¹Багирова Н. Х. К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления / Н. Х. Багирова, А. Б. Васильева, М. И. Иманалиев // Дифференц. уравнения. — 1967. — Т. 3, №. 11. — С. 1895–1902.

асимптотических методов из-за наличия ограничений и использования принципа максимума. А. Дончевым исследован предельный переход решения возмущенной задачи к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Для задач с выпуклым терминальным функционалом качества им была получена предельная задача оптимизации, для которой предельный переход от значения функционала качества в возмущенной задаче дает значение функционала качества в предельной задаче.

П. В. Кокотович и А. Хаддад рассматривали системы с ограничениями на управление в виде многогранника, а также вопросы вполне управляемости сингулярных линейных задач оптимального управления.

А. И. Калинин и его коллеги: Я. О. Грудю, Л. И. Лавринович, К. В. Семенов, пользуясь “методом базовых задач”, рассматривали сингулярные задачи оптимального управления, в случае, когда на значения управляющей функции наложены ограничения типа нестрогих неравенств.

При наличии гладких геометрических ограничений на управление в виде шара усложняется вид оптимального управления. Использование данных ограничений характерно для задач управления механическими системами, в которых управляющими воздействиями, как правило, являются ограниченные по величине силы. В совместных работах А. М. Ильина и А. Р. Данилина показано, что асимптотическое разложение решения в этом случае может обладать довольно сложной структурой (например, при решении задачи быстрогодействия с ограничением на управление типа шара асимптотическое разложение решения в смысле Пуанкаре при некоторых начальных условиях не может быть получено с калибровочными функциями, являющимися рациональными функциями от ε и $\ln \varepsilon$). Основным методом решения таких задач было нахождение асимптотики вектора, определяющего оптимальное управление, из нелинейного уравнения с интегральным слагаемым, которому удовлетворяет этот вектор. Данный вектор не является функцией, которая зависит от переменной t , и поэтому работать с таким объектом удобнее. Через определяющий вектор находится оптимальное управление и оптимальное значение функционала качества. Такой метод можно назвать “методом определяющего вектора”.

В дальнейшем задачи с подобными ограничениями, но при других условиях, были изучены с использованием “метода базовых задач” в работах А. И. Калинина, Ф. М. Кирилловой и Я. О. Грудю.

“Метод определяющего вектора” получил дальнейшее развитие в научной школе А. М. Ильина и применялся в работах его учеников А. Р. Данилина, О. О. Коврижных, Ю. В. Парышевой.

Обзоры других постановок задач, методов и результатов исследований в об-

ласти асимптотики решений сингулярно возмущенных задач управления, и методов их решения содержатся в публикациях А. Б. Васильевой, М. Г. Дмитриева, Е. Ю. Долгополовой и Г. А. Куриной.

Цели и задачи. Основная цель кандидатской диссертации — построение и обоснование полной асимптотики решения задачи оптимального управления на фиксированном временном промежутке для линейной системы с быстрыми и медленными переменными, интегрально выпуклым функционалом качества, терминальная часть которого содержит как медленные переменные, так и для класса задач с “непрямым” управлением — быстрые. Предполагается, что присутствуют гладкие геометрические ограничения на управление в виде шара в соответствующем евклидовом пространстве.

Методология и методы исследования. Основу работы составляют асимптотические методы анализа, методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и результаты классической теории оптимального управления (принцип максимума Л.С. Понтрягина, условия вполне управляемости и т. п.). Используются результаты выпуклого анализа, теории экстремальных задач и функционального анализа, а также классические факты линейной алгебры. Основным в диссертационной работе является метод нахождения асимптотического разложения вектора, определяющего оптимальное управление (“метод определяющего вектора”).

Положения, выносимые на защиту. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. С помощью “метода определяющего вектора” исследовано асимптотическое поведение решения задачи оптимального управления для системы с быстрыми и медленными переменными и гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого есть непрерывная, строго выпуклая, кофинитная и бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от медленных и быстрых переменных. Найдены достаточные условия, когда “определяющий вектор” имеет степенное асимптотическое разложение.
2. В случае, когда терминальная часть критерия качества зависит только от медленных переменных, получена и обоснована полная степенная по малому параметру асимптотика “определяющего вектора”. Предложен алгоритм определения всех коэффициентов этого асимптотического разложения. Показано, что в этом случае можно отказаться от условия кофинитности на терминальную часть функционала качества.
3. Получена и обоснована полная степенная по малому параметру асимптоти-

ка “определяющего вектора” и предложен алгоритм определения всех коэффициентов этого асимптотического разложения для задач с “полупрямым” управлением и функционалом качества, аддитивно зависящим от быстрых и медленных переменных.

Научная новизна. Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дополняют теорию асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач оптимального управления. Разработанный в работе математический аппарат может быть использован при вычислении асимптотических приближений с точностью до любого порядка малости для решений рассмотренного класса задач с гладкими геометрическими ограничениями на управление с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит как от медленных, так и от быстрых переменных.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов проведенных исследований подтверждена строгостью математических доказательств, приведенных с использованием асимптотических методов анализа, методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимального управления. В работе использованы результаты выпуклого анализа, теории экстремальных задач, математического и функционального анализа, а также классические факты линейной алгебры.

Результаты диссертации обсуждались на семинарах кафедры математического анализа Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина “Экстремальные задачи теории функций и операторов” под руководством проф. В. В. Арестова и семинаре отдела динамических систем Института математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, а также представлялись на Международных (47-й, 48-й, 49-й, 50-й Всероссийских) молодежных школах–конференциях “Современные проблемы математики и ее приложений” (Екатеринбург, 2016, 2017, 2018, 2019), XVII Всероссийской молодежной школе-конференции “Лобачевские чтения—2018” (Казань, 2018), Международной конференции “Оптимальное управление и дифференциальные игры”, посвященной 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 2018), Воронежской зимней математической школе “Современные методы теории функции и смежные проблемы” (Воронеж, 2019), Воронежской весенней математической школе “Современные методы теории краевых задач” (Воронеж, 2019), Международной конференции “Теория математической оптимизации и исследование операций (МОТОР 2019)”

(Екатеринбург, 2019), Международной конференции “Математика в приложениях” в честь 90-летия С. К. Годунова (Новосибирск, 2019).

Публикации. Основной материал диссертации опубликован в 11 научных работах [1–11], список которых приведен в конце автореферата. Из них 5 статей опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий списка ВАК [1, 3], или в приравненных к ним изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования (Web of Science, Scopus, MathSciNet, zbMATH) [2, 4, 5]. Статьи [1, 2] имеют переводные версии на английском языке. При этом статьи [1, 3, 5] опубликованы в журналах, входящих в Web of Science.

В работах [6–11] представлены тезисы к докладам на всероссийских и международных математических конференциях.

Личный вклад автора. Все основные результаты кандидатской диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора. В тезисах [7, 8], выполненных в соавторстве, научному руководителю А. Р. Данилину принадлежат постановка задачи и схема ее исследования. В статье [5] научному руководителю А. Р. Данилину кроме постановки задачи принадлежит идея доказательства теоремы 3, а соискателю А. А. Шабурову точные формулировки и доказательства результатов.

Благодарности. Автор диссертации выражает благодарность родителям и близким за эмоциональную поддержку; преподавателям выпускающей кафедры ИЕиМ УрФУ и сотрудникам ИММ УрО РАН за ценные советы при апробации результатов на семинарах; своему научному руководителю Данилину Алексею Руфимовичу за постановку задачи, постоянное внимание к работе. Выражаю признательность кандидату физико-математических наук Коврижных Ольге Олеговне и кандидату физико-математических наук Хачаю Олегу Юрьевичу, сделавшим ряд ценных замечаний, учет которых при подготовке кандидатской диссертации и автореферата к печати, позволил автору улучшить текст работы.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, списка использованных обозначений, четырех глав, приложения, заключения и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Объем диссертации составляет 132 страницы, включая библиографический список из 100 ссылок.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В автореферате порядковые номера приведенных лемм, определений, предположений, теорем, уравнений и утверждений отличаются от порядковых номеров

в кандидатской диссертации.

Во **введении** дана общая характеристика работы, обоснована актуальность темы исследования, приведен обзор литературы, относящейся к рассматриваемым в диссертации вопросам, кратко излагается содержание работы.

Первая глава диссертации посвящена рассмотрению основных соотношений для исследуемой задачи в общем случае. В частности выведены определяющие соотношения для вектора λ_ε начальных условий сопряженных переменных принципа максимума, определяющего оптимальное управление. Показано, что данный вектор является решением некоторого нелинейного уравнения, зависящего от малого параметра, и что исследование асимптотики решения задачи оптимального управления сводится к исследованию асимптотики вектора λ_ε (“определяющего вектора”).

В первом разделе первой главы дана постановка возмущенной задачи оптимального управления на фиксированном промежутке времени $[0, T]$ для линейной системы с медленными $x_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$ и быстрыми $y_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^m$ переменными, а также начальными условиями x^0, y^0 :

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, & t \in [0, T], & \|u_\varepsilon\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x^0, & y_\varepsilon(0) = y^0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь, для всех $i, j \in \{1, 2\}$ A_{ij}, B_i — постоянные действительные матрицы соответствующей размерности, и на вектор управления $u_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^r$ наложены гладкие геометрические ограничения типа шара.

Функционал качества является интегральным выпуклым, терминальная часть которого представляет собой выпуклую непрерывно дифференцируемую функцию φ , зависящую от медленных и быстрых переменных в конечный момент времени T :

$$J_\varepsilon(u) := \varphi(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Используется обозначение для матриц системы и управления:

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} \cdot A_{21} & \varepsilon^{-1} \cdot A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon := \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1} \cdot B_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Предполагается выполнение следующих предположений:

Предположение 1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ вполне управляема, т. е. $\text{rank}[\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{n+m-1} \mathcal{B}_\varepsilon] = n + m$.

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.

Предположение 3. Пары (A_0, B_0) и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

Стандартно вводится вырожденная система и вырожденный функционал качества. В частности, матрицы вырожденной для (3) системы имеют вид

$$A_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2. \quad (4)$$

Из результатов П.В. Кокотовича и А. Хаддада следует, что для выполнения предположения 1 достаточно выполнения предположений 2 и 3.

Известно², что при выполнении предположений 2 и 3 задача (1), (2) и вырожденная задача разрешимы и оптимальные управления в них единственны.

Как следствие, основной задачей исследования является нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε при фиксированных начальных условиях x^0, y^0 и конечного момента времени T оптимального управления $u_\varepsilon^{opt}(t)$, оптимального значения функционала качества $J_\varepsilon(u_\varepsilon^{opt})$ в задаче (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Во втором разделе первой главы с применением принципа максимума Понтрягина находится вид оптимального управления и выводится основное уравнение для нахождения вектора, определяющего оптимальное управление.

Оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ единственно и определяется формулой

$$u_\varepsilon^{opt}(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-t)} \lambda_\varepsilon}{S(\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-t)} \lambda_\varepsilon\|)}, \quad \text{где} \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases} \quad (5)$$

а вектор λ_ε , определяющий оптимальное управление, есть единственное решение уравнения

$$-\lambda = \nabla \varphi \left(e^{\mathcal{A}_\varepsilon T} \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \int_0^T e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t} \lambda}{S(\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* t} \lambda\|)} dt \right), \quad (6)$$

где $\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$ определены в (3).

Одним из важных результатов, следующих из формулы (5), является следующее утверждение

Утверждение 1. Пусть $u_\varepsilon^{opt}(t)$ — оптимальное управление в задаче (1), (2). Тогда функция $u_\varepsilon^{opt}(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и бесконечно дифференцируема в точках $\bar{t}$ таких, что $\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T-\bar{t})} \lambda_\varepsilon\| \neq 2$. Здесь λ_ε — вектор, определяющий оптимальное управление в задаче (1), (2).

²Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. — Москва.: Наука, 1972. — 576 с. [п.3.5, следствие после теоремы 12]

Далее **в третьем разделе первой главы** приводятся основные определения выпуклого анализа, в том числе определение строгой выпуклости и кофинитности. Приведен критерий кофинитности выпуклой функции (если $\forall y \neq 0 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda y)}{\lambda} = +\infty$). Доказано, что если φ — строго выпуклая, кофинитная и бесконечно дифференцируемая, то и сопряженная к ней в смысле выпуклого анализа функция будет обладать такими же свойствами.

Если φ — строго выпуклая, кофинитная и непрерывно дифференцируемая функция, то уравнение (6) принимает вид

$$\nabla \varphi^*(-\lambda) = e^{A_\varepsilon T} z^0 + \int_0^T e^{A_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* t} \lambda}{S(\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{A_\varepsilon^* t} \lambda\|)} dt. \quad (7)$$

В четвертом разделе первой главы приведены некоторые обозначения и определения, необходимые для постановки задачи и при исследовании асимптотики ее решения. Наряду с классическими определениями теории асимптотических методов введено обозначение $\mathbb{O}$ для вектор-функции $f_\varepsilon(t)$ такой, что $f_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $\alpha > 0$ равномерно на $[a, b]$. Кроме этого, здесь приведен асимптотический аналог теоремы о функции, заданной неявно, обосновывающий наличие степенной асимптотики такой функции. Эта теорема используется в работе при обосновании асимптотического разложения определяющего вектора.

В пятом разделе первой главы, следуя “методу пограничных функций” А. Б. Васильевой, получены рекуррентные формулы матричных коэффициентов в асимптотике матричной экспоненты

$$e^{A_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\mathcal{W}_k(t) + \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau) \right), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon},$$

где при каждом $k \geq 0$ блоки матричной экспоненты имеют вид:

$$\mathcal{W}_k(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_k(\tau) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \tilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \tilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix}.$$

Причем, для нулевого (при $k = 0$), первого (при $k = 1$) и второго приближения (при $k = 2$) выписаны общие формулы для матриц $\mathcal{W}_0(t, \varepsilon)$, $\mathcal{W}_1(t, \varepsilon)$, $\mathcal{W}_2(t, \varepsilon)$, $\tilde{\mathcal{W}}_0(\tau, \varepsilon)$, $\tilde{\mathcal{W}}_1(\tau, \varepsilon)$ и $\tilde{\mathcal{W}}_2(\tau, \varepsilon)$.

Показано, что величина $\|\tilde{\mathcal{W}}_{ij,k}(t/\varepsilon)\|$ при $t \in [\varepsilon^p, T]$, где $p \in (0, 1)$, есть асимптотический ноль относительно асимптотической последовательности по степеням ε .

Итоговым результатом пятого раздела является следующая теорема

Теорема 1. Пусть λ_ε — вектор, определяющий оптимальное управление в задаче (1), (2), а $\lambda_{\varepsilon,N}$ удовлетворяет соотношению $\|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,N}\| = O(\varepsilon^{N+1})$. Тогда на отрезке $[0, T]$ справедлива асимптотическая оценка

$$\sup_{t \in [0, T]} |u_\varepsilon^{opt}(t) - u_{\varepsilon,N}^{opt}(t)| = O(\varepsilon^N),$$

где u_ε^{opt} — оптимальное управление в задаче (1), (2), а $u_{\varepsilon,N}^{opt}$ — управление, определяемое по формуле (5) вектором $\lambda_{\varepsilon,N}$.

В шестом разделе первой главы рассмотрены вспомогательные функции $C_{1,\varepsilon}(t) := \mathcal{W}_{11}(t, \varepsilon)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon)B_2$, $C_{2,\varepsilon}(t) := \mathcal{W}_{21}(t, \varepsilon)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_{22}(t, \varepsilon)B_2$, $C_\varepsilon(t) := e^{A_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon$, для которых находятся асимптотические формулы с точностью до второго порядка малого параметра ε , а для их производных — с точностью до первого порядка малости.

Во второй главе диссертации на основе общих результатов исследована система (1) с интегрально выпуклым функционалом качества

$$J_\varepsilon(u) := \varphi_1(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (8)$$

терминальная часть которого есть выпуклая непрерывно дифференцируемая функция, зависящая только от медленных переменных в конечный момент времени T (т. е. $\varphi(z_\varepsilon(T)) := \varphi_1(x_\varepsilon(T))$).

Отметим³, что в таком случае предельная задача оптимизации совпадает с вырожденной задачей, в том числе $J_\varepsilon(u) \rightarrow J_0(u)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В первом разделе второй главы с учетом равенств

$$\nabla \varphi(x_\varepsilon(T), y_\varepsilon(T)) = \begin{pmatrix} \nabla \varphi_1(x_\varepsilon(T)) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_\varepsilon = -\nabla \varphi(z_\varepsilon(T)),$$

$$\begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_\varepsilon := \begin{pmatrix} -\nabla \varphi_1(x_\varepsilon(T)) \\ 0 \end{pmatrix},$$

получены формулы для оптимального управления и основное уравнение в рассматриваемом случае. Оптимальное управление $u_\varepsilon^{opt}(t)$ в задаче (1), (8) согласно формуле (5) имеет вид:

$$u_\varepsilon^{opt}(T - t) = \frac{C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon}{S(\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\|)}, \quad \text{где} \quad S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2, \end{cases} \quad (9)$$

³Дончев А. Системы оптимального управления. Возмущения, приближения и анализ чувствительности / А. Дончев. — Москва: Мир, 1987. — 156 с. [п. 3.4.2, задача Больца]

а вектор l_ε есть единственное решение уравнения (6):

$$-l = \nabla \varphi_1 \left(\mathcal{W}_{11}(T, \varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T, \varepsilon)y^0 + \int_0^T \frac{C_{1,\varepsilon}(t)C_{1,\varepsilon}^*(t)l}{S(\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l\|)} dt \right). \quad (10)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае выпуклая функция φ_0 (терминальная часть функционала качества предельной задачи) совпадает с φ_1 , а вектор l_0 , определяющий оптимальное управление в предельной задаче, есть единственное решение уравнения

$$-l = \nabla \varphi_1 \left(e^{A_0 T} x^0 + \int_0^T e^{A_0 t} B_0 \frac{B_0^* e^{A_0^* t} l}{S(\|B_0^* e^{A_0^* t} l\|)} dt \right), \quad (11)$$

где матрицы A_0 и B_0 определяются из обозначения (4). Отметим, что в рассматриваемом случае заключение теоремы 1 можно уточнить, заменив $O(\varepsilon^N)$ на $O(\varepsilon^{N+1})$. Основным результатом первого раздела второй главы является следующая теорема

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения 2 и 3. Тогда*

$$l_\varepsilon \rightarrow l_0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12)$$

где l_ε — единственное решение уравнения (10), а l_0 — единственное решение уравнения (11).

В дальнейшем, для упрощения техники нахождения асимптотического разложения вектора l_ε , предполагалось выполнение следующего предположения

Предположение 4. *Выпуклая функция $\varphi_1(\cdot)$ — бесконечно дифференцируемая, строго выпуклая и кофинитная.*

В силу предположения 4 уравнение (10) принимает вид

$$\nabla \varphi_1^*(-l) = \mathcal{W}_{11}(T, \varepsilon)x^0 + \mathcal{W}_{12}(T, \varepsilon)y^0 + \int_0^T \frac{C_{1,\varepsilon}(t)C_{1,\varepsilon}^*(t)l}{S(\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l\|)} dt, \quad (13)$$

$$\text{а уравнение (11) — } \nabla \varphi_1^*(-l) = e^{A_0 T} x^0 + \int_0^T e^{A_0 t} B_0 \frac{B_0^* e^{A_0^* t} l}{S(\|B_0^* e^{A_0^* t} l\|)} dt.$$

Во втором разделе второй главы проведено исследование точек смены вида оптимального управления (9) в зависимости от значения $S(\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\|)$.

Если на промежутке $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ выполняется условие $\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\| \neq 2$, то оптимальное управление согласно формуле (9) на этом промежутке определяется одной из двух формул $C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon/2$, либо $C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon/\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\|$.

Определение 1. Точки $t_{i,\varepsilon}$ — решения уравнения $\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\| = 2$ называются точками смены вида оптимального управления.

В дальнейшем предполагалось выполнение следующего предположения

Предположение 5. $\|B_0^*l_0\| \neq 2$.

В этом случае, уравнение $\|C_{1,0}^*(t)l_0\| = 2$ при $t \in [0, T]$ и уравнение

$$\|\psi^*(\tau)l_0\| = 2 \quad (14)$$

при $\tau > 0$ имеют не более чем конечное число решений.

Здесь и далее $\psi^*(\tau) := B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*$.

Уравнение (13) исследуется на количество точек смены вида управления (9). Показано, что решения уравнения $\|C_{1,\varepsilon}^*(t)l_\varepsilon\| = 2$ при $t \in [\sqrt{\varepsilon}, T]$ находятся вблизи решений уравнения $\|C_{1,0}^*(t)l_0\| = 2$, т. е. вблизи точек смены вида управления в вырожденной задаче, а при $\tau \in [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — вблизи решений уравнения (14).

Теорема 3. Пусть выполнено предположение 5, $l_\varepsilon \rightarrow l_0$, $\{t_i\}_1^p \subset [0, T]$ — все решения уравнения $\|C_{1,0}^*(t)l_0\| = 2$, а $\{\tau_j\}_1^q \subset [0, +\infty)$ — все решения уравнения (14), и при $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ выполнены условия

$$\left. \frac{d}{dt} \|C_{1,0}^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_i} = 2 \left\langle B_0^*e^{A_0^*t_i}l_0, B_0^*A_0^*e^{A_0^*t_i}l_0 \right\rangle \neq 0, \quad (15)$$

$$\left. \frac{d}{d\tau} \|\psi^*(\tau)l_0\|^2 \right|_{\tau=\tau_j} = 2 \left\langle (B_0^* + B_2^*e^{A_{22}^*\tau_j}(A_{22}^*)^{-1}A_{12}^*)l_0, B_2e^{A_{22}^*\tau_j}A_{12}^*l_0 \right\rangle \neq 0, \quad (16)$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют точки $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ и $\{\tau_{j,\varepsilon}\}_1^q \subset [0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ — точки смены вида оптимального управления в задаче (1), (8). Других точек смены вида управления нет и при всех $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$ справедливы соотношения

$$t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i, \quad \tau_{j,\varepsilon} \rightarrow \tau_j, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Определение 2. Решения уравнений $\|C_{1,0}^*(t)l_0\| = 2$ и (14), удовлетворяющие условиям (15) и (16) теоремы 3, называются регулярными.

В конце второго раздела второй главы приведены примеры матриц системы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и управления $\mathcal{B}_\varepsilon$, показывающие, что количество точек переключения t и τ вида оптимального управления в задаче (1), (8) может быть сколь угодно большим.

В третьем разделе второй главы проведено исследование асимптотического разложения вектора l_ε . Доказано, что оператор первого приближения $\mathcal{H}$ расширенной системы (основное уравнение дополнено уравнениями для точек смены вида оптимального управления) непрерывно обратим и согласно теореме из раздела 4 первой главы, “определяющий вектор” имеет степенное асимптотическое разложение. Основным результатом этого раздела является следующая теорема

Теорема 4. Пусть выполнены предположения 2, 3, 4 и условия теоремы 3. Тогда вектор l_ε и моменты времени

$$\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\} \subset [\sqrt{\varepsilon}, T], \quad \{\varepsilon\tau_{1,\varepsilon}, \varepsilon\tau_{2,\varepsilon}, \dots, \varepsilon\tau_{q,\varepsilon}\} \subset [0, \sqrt{\varepsilon}]$$

раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad t_{i,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad \text{при } i = 1, \dots, p,$$

$$\varepsilon\tau_{j,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \varepsilon\tau_j + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{j,k}, \quad \text{при } j = 1, \dots, q, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

В четвертом разделе второй главы показано, что основной результат предыдущего раздела справедлив и для модифицированного процесса построения асимптотического разложения вектора l_ε в случае, когда функция φ_1 бесконечно дифференцируема, строго выпукла, но не является кофинитной.

Третья глава диссертации посвящена изучению системы (1) с интегрально выпуклым функционалом качества, терминальная часть которого имеет вид

$$J_\varepsilon(u) := \varphi_1(x_\varepsilon(T)) + \varphi_2(y_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (17)$$

т. е. $\varphi(z_\varepsilon(T)) := \varphi_1(x_\varepsilon(T)) + \varphi_2(y_\varepsilon(T))$.

Аналогом предположения 4 является следующее предположение

Предположение 6. Функции φ_1, φ_2 — бесконечно дифференцируемые, строго выпуклые и кофинитные.

В этом случае уравнение (7) для задачи (1), (17) распадется на два независимых уравнения относительно компонент l_ε , ρ_ε вектора λ_ε . Также выписан вид оптимального управления (5) в общем случае.

Начиная с **первого раздела третьей главы** и в дальнейшем изучен случай системы (1) с “полупрямым” ($A_{21} = \mathcal{O}$, $B_1 \neq \mathcal{O}$) управлением:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u_\varepsilon, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{22}y_\varepsilon + B_2u_\varepsilon, \end{cases} \quad (18)$$

и интегральным выпуклым функционалом качества (17) когда функция φ_2 удовлетворяет следующему условию: $\varphi_2(0) = 0$, $\nabla \varphi_2(0) = 0$.

Матричная экспонента управляемой системы (18) имеет вид

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} e^{A_{11}t} & \mathcal{W}_{12}(t, \varepsilon) \\ \mathcal{O} & e^{A_{22}t} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathcal{O} & \varepsilon^{-1} \cdot A_{22} \end{pmatrix}.$$

Далее, **во втором разделе третьей главы** для системы (18) и функционала качества (17) выписана основная система уравнений

$$\begin{cases} \nabla \varphi_1^*(-l_\varepsilon) = e^{A_{11}T}x^0 + \mathcal{W}_{12}(T, \varepsilon)y^0 + \int_0^T C_{1,\varepsilon}(t)u_\varepsilon^{opt}(T-t) dt, \\ \nabla \varphi_2^*(-\rho_\varepsilon) = e^{A_{22}T/\varepsilon}y^0 + \int_0^T C_{2,\varepsilon}(t)u_\varepsilon^{opt}(T-t) dt. \end{cases} \quad (19)$$

для вектора λ_ε :

$$\begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \end{pmatrix} := \lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} -\nabla \varphi_1(x_\varepsilon(T)) \\ -\nabla \varphi_2(y_\varepsilon(T)) \end{pmatrix}.$$

В третьем разделе третьей главы получены теоремы о предельном поведении векторов l_ε и ρ_ε :

Теорема 5. Пусть выполнены предположения 2 и 3, вектор λ_ε — единственное решение системы уравнений (19). Тогда векторы l_ε , ρ_ε ограничены и справедливо соотношение (12), где l_0 — единственное решение уравнения (11).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5, а B_2 есть отображение $\mathbb{R}^r$ на все $\mathbb{R}^m$ (в частности $r \geq m$). Тогда $\rho_\varepsilon \rightarrow 0$, а величина $\{r_\varepsilon\}$ ($r_\varepsilon := \varepsilon^{-1}\rho_\varepsilon$) ограничена при $\varepsilon \rightarrow +0$ и все ее предельные точки r_0 удовлетворяют уравнению

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{A_{22}\tau} B_2 \frac{B_0^* l_0 + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (r_0 + (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^* l_0)}{S(\|B_0^* l_0 + B_2^* e^{A_{22}^* \tau} (r_0 + (A_{22}^*)^{-1} A_{12}^* l_0)\|)} d\tau. \quad (20)$$

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда уравнение (20) имеет единственное решение r_0 и $r_\varepsilon \rightarrow r_0$.

В четвертом разделе третьей главы при дополнительном предположении

Предположение 7. Пусть выполняется следующее:

$$r = m, \quad A_{22} = -I, \quad B_2 = I \quad (21)$$

в классе систем с “непрямым” ($A_{21} = \mathcal{O}$, $B_1 = \mathcal{O}$) управлением находится представление вектора r_0 через вектор l_0 :

Лемма 1. Пусть выполнены условия (21) и условия теоремы 5. Тогда

$$r_\varepsilon \rightarrow r_0 = (A_{12}^* - 2B_0^*)l_0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

В рассматриваемом случае аналогом уравнения (14) будет уравнение

$$\|B_0^*l_0\| \cdot |1 - 2e^{-\tau}| = 2. \quad (22)$$

Аналогично теореме 3 о количестве точек смены вида оптимального управления доказывается следующая теорема

Теорема 8. Пусть выполнено предположение 7, $l_\varepsilon \rightarrow l_0$, $r_\varepsilon \rightarrow (A_{12}^* - 2B_0^*)l_0$. Пусть $\{t_i\}_1^p \subset [0, T]$ — все решения уравнения $\|C_{1,0}^*(t)l_0\| = 2$, а $\{\tau_j\}_1^q \subset [0, +\infty)$ — все решения уравнения (22), и при всех $i = 1, \dots, p$ и $j = 1, \dots, q$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \|C_{1,0}^*(t)l_0\|^2 \right|_{t=t_i} &= 2 \left\langle B_0^* e^{A_0^* t_i} l_0, B_0^* A_0^* e^{A_0^* t_i} l_0 \right\rangle \neq 0, \\ \left. \frac{d}{d\tau} \|\psi^*(\tau)l_0\|^2 \right|_{\tau=\tau_j} &= 2 \left\langle (1 - 2e^{-\tau}) B_0^* l_0, 2e^{-\tau} B_0^* l_0 \right\rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют точки смены вида оптимального управления $\{t_{i,\varepsilon}\}_1^p \subset [\sqrt{\varepsilon}, T]$ и не более двух точек τ_j смены вида оптимального управления на отрезке $[0, 1/\sqrt{\varepsilon}]$ в задаче (18), (17). Других точек смены вида оптимального управления нет и при всех $i = 1, \dots, p$, $j = 1, 2$ справедливо

$$t_{i,\varepsilon} \rightarrow t_i, \quad \tau_{j,\varepsilon} \rightarrow \tau_j, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

При этом, всегда $0 \leq q \leq 2$, и $q = 0$ при условии $\|B_0^*l_0\| < 2$ ввиду того, что уравнение не имеет решений при $\tau \geq 0$.

Основным результатом этого раздела является следующая теорема

Теорема 9. Пусть выполнены предположения 2 и 3, а также условия теоремы 8. Тогда векторы l_ε , r_ε и моменты времени $\{t_{1,\varepsilon}, t_{2,\varepsilon}, \dots, t_{p,\varepsilon}\} \subset (\sqrt{\varepsilon}, T)$ раскладываются в степенные асимптотические ряды

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad r_\varepsilon \stackrel{as}{=} (A_{12}^* - 2B_0^*)l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k r_k,$$

$$t_{i,\varepsilon} \stackrel{as}{=} t_i + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k t_{i,k}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

коэффициенты которых находятся рекуррентным образом.

Пусть выполнено условие $\|B_0^* l_0\| > 2$. В этом случае существуют только две точки $\{\tau_{1,\varepsilon}, \tau_{2,\varepsilon}\} \subset (0, \sqrt{\varepsilon})$, для которых справедливо

$$\tau_{j,\varepsilon} \stackrel{as}{=} \tau_j + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{j,k}, \quad j = 1, 2, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

В **пятом разделе третьей главы** приводится подробное нахождение асимптотического разложения вектора λ_ε для задачи управления точками малой массы в среде с сопротивлением:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & t \in [0, T], \quad \|u_\varepsilon\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \end{cases}$$

где $x_\varepsilon(t)$, $y_\varepsilon(t)$, $u_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$, с интегральным выпуклым функционалом качества:

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} (\|x_\varepsilon(T)\|^2 + \|y_\varepsilon(T)\|^2) + \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt \rightarrow \min.$$

В случае $\|x^0\| < T + 2$ удастся получить полную асимптотику векторов l_ε и r_ε в явном виде до заданного порядка точности. В другом случае $\|x^0\| \geq T + 2$ коэффициенты разложений этих векторов находятся из решения нелинейных систем уравнений.

В **четвертой главе** рассмотрены различные частные случаи матриц системы и управления, иллюстрирующие общие результаты.

В **первом разделе четвертой главы** приведены первые приближения (при $k = 1, 2$) для блоков-матриц $\mathcal{W}_{ij}(t, \varepsilon)$ при всех $i, j = 1, 2$ в случае рассмотрения “механоподобных” систем $\mathcal{A}_\varepsilon$ и также при условии коммутирования блоков-матриц $\mathcal{A}_{ij}$. Наконец, когда $A_{11} = \mathcal{O}$, $A_{12} = \mathcal{I}$, $A_{21} = \mathcal{O}$, $B_1 = \mathcal{O}$, найдены в

явном виде блоки–матрицы $\mathcal{W}(t, \varepsilon)$ до первого порядка включительно. Остальные $\mathcal{W}_k(t)$ и $\tilde{\mathcal{W}}_k(t)$ при $k \geq 2$ — нулевые.

Во втором разделе четвертой главы приведены примеры конкретных управляемых систем. Для “механоподобной” системы (управление точками малой массы в среде с сопротивлением) строятся асимптотические разложения вектора l_ε , а при конкретных значениях начальных условий x^0, y^0 , конечного момента времени T выписаны первые коэффициенты разложения этого вектора.

В приложении приведены подробные вычисления для примеров задач (1), (8), рассмотренных **во втором разделе четвертой главы**.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:

- Полностью описано теоретическое исследование случая, когда терминальная часть φ представляет собой строго выпуклую бесконечно дифференцируемую функцию, зависящую только от медленных переменных в конечный момент времени T . Результаты второй главы диссертации могут успешно применяться как при теоретических исследованиях, так и в приложениях к задачам, в которых управляющими воздействиями являются ограниченные по величине силы. Показано, что точек смены вида оптимального управления может быть сколь угодно много.
- Алгоритм нахождения асимптотик вектора l_ε и точек смены вида управления $t_{i,\varepsilon}$ обоснован, проиллюстрирован для конкретного класса матриц системы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и управления $\mathcal{B}_\varepsilon$. Отмечается, что при нахождении асимптотики интегрального члена дополнительно использовались методы асимптотического анализа.
- Для линейной системы (при $A_{21} = \mathcal{O}$) с “непрямым” или “полупрямым” (когда $B_1 = \mathcal{O}$ и $B_1 \neq \mathcal{O}$ соответственно) с интегрально выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит аддитивно от медленных и быстрых переменных, построен алгоритм нахождения асимптотики векторов $l_\varepsilon, r_\varepsilon$. Для конкретного класса матриц системы и управления исследованы условия, при которых асимптотика определяющих векторов обладает степенным характером с известными коэффициентами или асимптотика определяется из решения нелинейной системы уравнений. В явном виде найдена зависимость точек смены вида оптимального управления от определяющих векторов $l_\varepsilon, r_\varepsilon$. Показано, что нелинейные уравнения не зависят

от точек смены вида оптимального управления, а позволяют сразу найти асимптотику векторов l_ε , ρ_ε .

- Приведены конкретные классы задач, для которых находятся первые приближения для l_ε , а также точек $t_{i,\varepsilon}$, $\tau_{j,\varepsilon}$. При дополнительных условиях, например для класса коммутирования блоков–матриц $\mathcal{A}_{ij}$ на матрицу системы $\mathcal{A}_\varepsilon$, можно строить представления для блоков–матриц $\mathcal{W}_{ij}(t, \varepsilon)$ с требуемой точностью до любой степени ε .

Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для нахождения асимптотического разложения решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления для линейных систем с постоянными коэффициентами и интегрально выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных в конечный момент времени. Кроме того, описанный в диссертации алгоритм построения асимптотики, может составить основу изучения управляемых систем в случае, когда функционал качества содержит в подынтегральном выражении функцию, зависящую и от медленных переменных. Рассмотрение такого класса задач является перспективным направлением будущего исследования.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК

- [1] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве $\mathbb{R}^n$ с интегральным выпуклым критерием качества. / А. А. Шабуров // Труды ИММ УрО РАН. — 2017. — Т. 23, №. 2. — С. 303–310.

Переводная версия:

Shaburov A. A. Asymptotic expansion of a solution for one singularly perturbed optimal control problem in $\mathbb{R}^n$ with a convex integral quality index / A. A. Shaburov // Ural Math. Journal. — 2017. — Vol. 3, №. 1. — P. 68–75.

- [2] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление / А. А. Шабуров // Изв. ИМИ УдГУ. — 2017. — Т. 50. — С. 110–120.

Переводная версия:

Shaburov A. A. Asymptotic expansion of a solution for the singularly perturbed

optimal control problem with a convex integral quality index and smooth control constraints / A. A. Shaburov // Ural Math. Journal. — 2018. — Vol. 4, №. 1. — P. 63–73.

- [3] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных / А. А. Шабуров // Труды ИММ УрО РАН. — 2018. — Т. 24, №. 2. — С. 280–289.
- [4] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных / А. А. Шабуров // Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки. — 2019. — Т. 24, №. 125. — С. 119–136.
- [5] Данилин А. Р. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных / А. Р. Данилин, А. А. Шабуров // Уфимск. матем. журн. — 2019. — Т. 11, №. 2. — С. 83–98.

Публикации в сборниках тезисов конференций

- [6] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Тезисы докладов Семнадцатой молодежной научной школы–конференции “Лобачевские чтения — 2018” — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2018. — С. 322–324.
- [7] Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных (Asymptotic expansion of a solution to a singularly perturbed optimal control problem with a convex integral performance index whose terminal part depends on slow and fast variables) // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина, Москва, 12–14 декабря 2018 г. — Москва: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. — С. 76–77.

- [8] Данилин А. Р., Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных и гладкими ограничениями на управление // Материалы Международной конференции “Воронежская зимняя математическая школа” (28 января – 2 февраля 2019 г.) — Воронеж: Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. — С. 111–112.
- [9] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Материалы Международной конференции “Воронежская весенняя математическая школа” (3 мая – 9 мая 2019 г.) — Воронеж: Воронежский государственный университет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН. — С. 308–309.
- [10] Shaburov A. A. Asymptotic Expansion of a Solution for One Singularly Perturbed Optimal Control Problem with a convex Integral Quality Index Depends on Slow Variables and Smooth Control Constraints // XVIII International Conference “Mathematical Optimization Theory and Operations Research” (MOTOR 2019), Ekaterinburg, Russia, 2019. — p. 98.
- [11] Шабуров А. А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит только от медленных переменных // Математика в приложениях. Международная конференция в честь 90-летия Сергея Константиновича Годунова (4–10 августа 2019, Новосибирск): Тез. докладов. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2019. — С. 234.