На правах рукописи

-Г РЯІПКО Лев Борисович

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ: УСТОЙЧИВОСТЬ, ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ**

05.13.01 - системный анализ, управление и обработка информации

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Екатеринбург - 2006

Работа выполнена на кафедре математической физики Уральского государ­ственного университета им. А.М.Горького

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук профессор Б.И. Ананьев

доктор физико-математических наук профессор В.В. Дикусар

доктор физико-математических наук профессор А.В. Назин

Ведущая организация:

Институт системного анализа РАН

Защита состоится 30 мая 2006 г. в *\ L* часов на заседании диссертационно­го совета Д 212.133.01 в Московском государственном институте электроники и математики по адресу: 109028, Москва, Б.Трехсвятительский пер., д.3/12

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государствен­ного института электроники и математики.

Автореферат разослан /,( апреля 2006г.



Ученый секретарь диссертационного совета к.т.н., доцент

СЕ. Вузников

**ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ**

**Предыстория и актуальность темы.** Диссертация посвящена анализу устой­чивости, чувствительности и возможностей управления в стохастически возму­щенных нелинейных динамических системах. Объектом исследования являются компактные инвариантные многообразия, связанные с точками покоя, периоди­ческими и квазипериодическими решениями стохастических дифференциаль­ных уравнений.

Исследования последних лет показали, что разнообразие, наблюдаемое в по­ведении нелинейных динамических систем, можно свести к анализу относи­тельно простых инвариантных многообразий и их качественных преобразова-ний (бифуркаций). Так, например, одним из стандартных сценариев перехода от порядка к хаосу служит цепь последовательных бифуркаций: положение рав­новесия (точка покоя) - периодические колебания (цикл) - квазипериодические колебания (тор) - хаотические колебания (странный аттрактор). Каждый такой переход сопровождается потерей устойчивости простого многообразия и рожде­нием нового, более сложного устойчивого многообразия. Присутствие случай­ных возмущений, связанных как с внешними неконтролируемыми воздействия­ми, так и внутренними параметрическими флуктуациями, может существенно повлиять на тонкий механизм бифуркаций и вызвать неожиданные качествен­ные изменения в поведении системы. Анализ стохастической устойчивости со­ответствующих колебательных режимов является здесь ключевым моментом в понимании механизма сложных явлений нелинейной динамики. Разработка методов управления даст возможность, придавая аттракторам те или иные же­лаемые вероятностные свойства, решать важные прикладные задачи синтеза систем с требуемыми наперед заданными характеристиками.

В современной теории случайных процессов имеется большое количество различных динамических моделей, отражающих те или иные вероятностные особенности исследуемых реальных систем. В данной работе рассматривается классическая модель - система стохастических дифференциальных уравнений Ито. Первым примером стохастического дифференциального уравнения в фи­зике было уравнение Ланжевена, которое оказалось идейно связано с предло­женной Эйнштейном и Смолуховским конструкцией броуновского движения. Развитие математической теории броуновского движения, начатое в работах Винера, привело к разработке его формальных моделей - винеровского процес­са и мартингала.

Построение теории стохастических дифференциальных уравнений **с** исполь­зованием соответствующих разностных уравнений дано в работах С.Н. Берн-штейна и И.И. Гихмана. Другой подход, опирающийся на конструкцию стоха­стического интеграла по винеровскому процессу, использовал Ито. Его простая

**3**

и удобная конструкция решения стохастического уравнения и соответствующее стохастическое исчисление (формула Ито) являются общепринятыми и хоро­шо представлены в научно-методической литературе. Система стохастических уравнений Ито служит базовой моделью в современной теории стохастической устойчивости и управления. Дальнейшая разработка стохастического анализа привела к появлению новых конструкций и более общих схем (интеграл Стра-тоновича, интегралы по мартингалам и точечным процессам), позволяющих существенно расширить класс стохастических дифференциальных уравнений. В настоящее время стохастические дифференциальные уравнения имеют хо­рошо разработанную формальную математическую теорию и разнообразные приложения.

Современная математическая теория устойчивости и управления стохастиче­скими системами охватывает широкий круг актуальных задач, включает боль­шое число разнообразных методов, имеет прочные связи с другими раздела­ми математики и многочисленные приложения. Ее становление относится к шестидесятым годам ХХ-го столетия и связано с именами Н.Н. Красовского, Р.З. Хасьминского, Г.Дж. Кушнера (Y.J. Kushner), У.Флеминга (W.H. Fleming). Существенный вклад в ее дальнейшее развитие внесли В.Н. Афанасьев, И.И. Гихман, Л.Г. Евланов, И.Я. Кац, В.Б. Колмановский, В.М. Константинов, Д.Г. Кореневский, Н.В. Крылов, А.В. Куржанскиц, М.Б. Левит, Э.А. Лидский, Г-Н. Милыптейн, М.Б. Невельсон, П.В. Пакшин, А.В. Скороход, Е.Ф. Царьков, Ф.Л. Черноусько, Л.Е. Шайхет, М. Aoki, L. Arnold, K.J. Astrom, J.E. Bertram, R.S. Bucy, M.H.A. Davis, U.J. Haussman, D.L. Kleinman, P. Kozin, X. Mao, P.J. McLane, J.S. Meditch, T. Morozan, P.E. Sarachik, T. Sasagava, E. Ike, J.L. Willems, W.M. Wonham и многие другие ученые.

Теория стохастической устойчивости отличается большим разнообразием за­дач и методов их решения. Это связано с двумя обстоятельствами: существова­нием большого количества типов вероятностных динамических моделей и на­личием нескольких различных видов стохастической устойчивости. Тематика диссертации примыкает к той части этой теории, в которой для инвариантных многообразий стохастических дифференциальных уравнений Ито исследуется экспоненциальная устойчивость в среднем квадратичном методом стохастиче­ских функций Ляпунова,

Метод стохастических функций Ляпунова, начиная с основополагающей ра­боты *1* И.Я. Каца и Н.Н. Красовского 1960г., является теоретическим фун­даментом анализа устойчивости стохастических систем. Этот метод позволил не только распространить на стохастические уравнения базовые конструкции классической теории детерминированной устойчивости, но и получить новые

\*Кац ИЛ., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. I960. Т. 24. Вып. 5. С. 809-823.

**4**

интересные результаты, отражающие особенности, присущие только вероят­ностным системам. Теоретические основы, связанные с применением метода функций Ляпунова к решению задач стабилизации стохастических систем, бы­ли заложены в работе 2 Н.Н, Красовского и Э.А. Лидского.

Случай, когда инвариантное многообразие есть точка покоя, рассматрива­ется давно, достаточно хорошо исследован и имеющиеся здесь результаты уже составляют глубоко разработанную часть общей теории стохастической устой­чивости и стабилизации нелинейных динамических систем.

Следующим за точкой покоя в цепи бифуркаций инвариантных многооб­разий является предельный цикл. Предельный цикл является математической моделью автоколебаний, наблюдаемых в системах самой различной природы - электронных генераторах, механических конструкциях, химических реакци­ях, сообществах живых организмов. Исследование детерминированной устой­чивости периодических решений на плоскости качалось с работ Ляпунова и Пуанкаре. Для предельных циклов многомерных систем основные результаты детерминированного варианта теории устойчивости (теорема Андронова-Витта и ее аналоги) были получены с помощью теории Флоке в русле первого метода Ляпунова еще в 30-х годах. Соответствующие конструкции функций Ляпунова, необходимые для анализа устойчивости стохастически возмущенных предель­ных циклов, долгое время отсутствовали.

Исследование воздействий случайных возмущений на поведение автоколеба­ний нелинейных систем было начато в классической работе 3 Л.С. Понтрягина, А.А. Андронова, А.А. Витта 1933г. В дальнейшем эти исследования были про­должены в большом числе работ и отражены в монографиях B.C. Анищенко, В.В. Болотина, М.Ф. Диментберга, А.Н. Малахова, *СМ,* Рытова, Р.Л. Стра-тоновила, М. Grigoriu, R.A. Ibrahim, Т.Т. Soong, посвященных флуктуациям в радиофизических и механических системах.

Под воздействием стохастических возмущений случайные траектории си­стемы покидают замкнутую орбиту детерминированного предельного цикла и формируют вокруг него некоторый пучок. Благодаря устойчивости цикла плот­ность распределения вероятности случайных состояний в этом пучке стабилизи­руется. Установившееся вокруг цикла стационарное вероятностное распределе­ние определяет стохастический аттрактор (стохастический предельный цикл). Для теории случайных нелинейных колебаний несомненный интерес представ­ляют исследования стохастических предельных циклов как вблизи точки би­фуркации Андронова-Хопфа (квазигармонические колебания), так и в зоне па­раметров, удаленной от этой точки (релаксационные колебания). Стохастиче-

3КрасОЕСКий Н.Н., Ладский Э.А. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. І-Щ // Автоматика и телемеханика. 1961. Т. 22. №9-11. С. 1145-1150, 1273-1278,1425-1431.

5Повтряган Л.С., Андрояоа А.А., Вктт А.А. О статистическом рассмотрении динамических систем // ЖЭТФ. 1933. Т. 3- Вып. 3. С. 165-180.

5

ски возмущенные предельные циклы изучали П.С. Ланда, Г.Н. Мильштейн, Р.Л. Стратонович, F. Baras, M.V. Day, M.I. Dykman, R. Graham, M.M. Klosek,

D. Ludvig, R.S. Maier, B.J. Matkowsky, T. Naeh, T. Ohta, Z. Schuss, T. Tel,  
K. Tornita, H. Tomita.

Связанные с шумами качественные эффекты, наблюдаемые в зоне рождения цикла, рассматривались в работах L. Arnold, Р.Н. Baxendale, G. Bleckert, Н. Crauel, F. Flandoli, R. Lefever, H.K. Leung, P.V.E. McClintok, F. Moss, N.Sri. Namachchivaya, H.F. Schenk-Hoppe, J. Turner. Существенная неравномерность стохастических пучков вдали от точки бифуркации исследовалась F. Ali, R.J. Deissler, J.D. Farmer, G. Haubs, C. Kurrer, M. Menzinger, G. Meyer-Kress, J.S. Nicolis, K. Schulten.

Развитие теории нелинейных систем, вызванное открытием хаотических ос­цилляции, и разработка общих сценариев разрушения регулярных колебаний, связанных с последовательными бифуркациями удвоения периода, поставили новые актуальные задачи исследования стохастических возмущений сложных пространственных многооборотных предельных циклов.

Сложности аналитического описания вероятностных характеристик стоха­стических аттракторов размерности три и выше заставили исследователей об­ратиться к методам прямого численного моделирования случайных траекторий. Это стимулировало разработку численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Полученные в этом направлении теоретиче­ские результаты представлены в монографиях Г.Н. Мильштейна, Р.Е. Kloeden,

E. Platen. Численному исследованию классических моделей Ресслера и Лорен­  
ца в присутствии случайных возмущений посвящены работы B.C. Анищенко,  
Т.Е. Вадивасовой, А.С. Копейкина, Г.А. Окрокверцхова, Г.И. Стрелкова, А.  
Zippelius, М. Lucke, J. Keizer, R.F. Fox, J. Wagner.

Следующее по сложности за циклом инвариантное многообразие - тор. Этот объект, ставший классическим после работ Пуанкаре, Данжуа и Арнольда, до­статочно подробно исследовался с точки зрения его структурной устойчивости (КАМ-теория). Анализу детерминированной устойчивости тороидальных дви­жений к возмущению начальных данных посвящены работы А.С. Гуртовника, А.Ю. Колесова, Е.Ф. Мищенко, Ю.И. Неймарка, A.M. Самойленко.

Бифуркации тороидальных многообразий исследовались Н.А. Магницким, СВ. Сидоровым, A. Arneodo, Р.Н. Coullet, К. Kaneko, Е.А. Spigel.

Поведение стохастически возмущенной системы исчерпывающим образом (в терминах переходной плотности распределения) описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. Непосредственное использование этого уравне­ния даже в простейших ситуациях (например, когда рассматривается стацио­нарно-распределенное состояние автоколебательной системы с одной степенью свободы) весьма затруднительно. Важный для практики случай — воздействия

**6**

малых помех — приводит к известным проблемам анализа уравнений с малы­ми коэффициентами при старших производных. В настоящее время известны различные подходы, позволяющие для искомых вероятностных характеристик найти соответствующие приближения. Разработан метод, основанный на замене исследуемого процесса на эквивалентный гауссовский. Аналитически этот ме­тод сводится к обрыву бесконечномерной последовательности уравнений для моментов высших порядков, когда ограничиваются лишь первыми двумя мо­ментами. Для случая квазигармонических колебаний данный прием использо­вали М. Grigoriu, Т.Т. Soong. Подход, связанный со стохастическим усреднени­ем в русле метода малого параметра теории возмущений, рассмотрен в работах Р.Л. Стратоновича и М.Ф. Диментберга.

Для систем с малыми случайными возмущениями в работе А.Д. Вентцеля и М.И. Фрейдлина \* предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова - *квазипотенциал,* с помощью которой можно находить асимптотики ряда важных вероятностных характеристик вы­хода случайных траекторий из области (задача о выбросах), содержащей устой­чивое предельное множество исходной детерминированной системы. Примени­тельно к точке покоя данный подход в рамках теории больших уклонений раз­вивался в работах J.A. Bucklew, М. Dembo, О. Zeitouni. Метод квазапотенциала для предельного цикла рассматривался в работах Г.Н. Милыптейна, M.V. Day, M.I. Dykman, R. Graham, M.M. Klosek, D. Ludvig, R..S. Maier, B.J. Matkowsky, T. Naeh, V.N. Smelyanskiy, Z. Schuss, T. Tel. Теория больших уклонений в ана­лизе стохастических дифференциальных уравнений на торе получила развитие в работах А.Ю. Веретенникова.

Разнообразие форм аттракторов, наблюдаемых в нелинейных динамических системах, заставляет искать общие подходы, которые позволили бы охватить единой теорией как уже исследованные, так и потенциально возможные слу­чаи. Таким направлением является качественная теория динамических систем с произвольными инвариантными многообразиями. В детерминированном слу­чае теория устойчивости общих инвариантных многообразий развивалась в ра­ботах И.У. Бронштейна^ Г.С. Осипенко, А.А. Рейнфельда, А.Ю. Копанского, N. Fenichel, M.W. Hirsch, U. Kirchgaber, К. Palmer, C.C. Pugh, R.C. Robinson, M. Shub, S. Wiggins. Общие вопросы, касающиеся многообразий и аттракторов стохастических систем, рассматривали М.Л. Бланк, L. Arnold, М. Arnaudon, Р. Baxendale, P. Boxler, М. Emery, S.-E.A. Mohammed, М. Scheutzow, В. Schmalfuss, A. Thalmaier.

Одним из актуальных разделов естествознания, где находит применение со­временная теория устойчивости вероятностных нелинейных процессов, являет-

■\*Веігщель А.Д., фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979.

**7**

ся стохастический анализ перехода от ламинарного течения к турбулентному. В последние годы и особенно после оригинальной работы L. N. Trefethen, А. Е. Trefethen, S. С. Reddy, Т.А. Driscol 1993г. 5 активно развивается теория тако­го перехода, основанная на свойстве ненормальности оператора динамической системы. Ненормальность линеаризованного уравнения Навье-Стокса вызыва­ет всплеск возмущений даже в случае устойчивости равновесного состояния. Нелинейность системы приводит к дальнейшему усилению малых начальных возмущений. В результате переход к турбулентности происходит не вследствие линейной неустойчивости стационарного ламинарного потока, а в результате сочетания ненормальности, порождающей высокую чувствительность к возму­щениям, и нелинейности, переводящей систему в бассейн притяжения турбу­лентного режима. Обзоры исследований этого явления имеются в работах J. S. Baggett, S. J. Chapman, S. Grossmann, D. S. Henningson, P. J. Schmid. Неко­торые теоретические исследования, посвященные стохастически возмущенным динамическим системам с ненормальным оператором, представлены работами В. Bassam, М. Dahleh, В. F. Farrell, P. J. Іоашіои.

Свойство ненормальности играет важную роль и в понимании природы ге­нерации больших магнитных полей в астрофизических объектах. Традиционно явление генерация магнитного поля связывают с переходом системы из зоны устойчивости (субкритический случай) в зону неустойчивости (суперкритиче­ский случай). С точки зрения классической теории детерминированной устой­чивости генерация магнитного поля должна наблюдаться лишь в суперкрити­ческом случае. Однако в работах В. F. Farrell и P. J. Ioannou было показано, что вследствие ненормальности возможна генерация поля и в зоне парамет­ров, относящихся к субкритическому случаю. Такой субкритический переход из нулевого равновесия в области, где действуют уже значительные по вели­чине магнитные поля, невозможно удовлетворительно объяснить, оставаясь в рамках чисто детерминированной теории. Важность влияния шума в пробле­ме генерации магнитного поля сейчас общепризнанна. Стохастическая дина­мика магнитных полей рассматривалась в работах В. F. Farrell, P. Hoyng, Р. J. Ioannou, D. Schmitt, L. J. W. Teuben. Таким образом, понимание природы генерации магнитного поля предполагает учет трех факторов: нелинейности, стохастической устойчивости и ненормальности.

Задачи управления колебаниями в нелинейных динамических системах ис­следуются достаточно давно. Необходимость в стабилизации неустойчивых пе­риодических решений (орбит) возникает при устранении вибраций механиче­ских конструкций, подавлении шумов и нежелательных гармоник в системах связи и электронных устройствах, локализации возможных отклонений от тре-

6Trefethen *L.* N., Trefethen А. Е., Reddy S. С, Driscol Т.А. Hydrodynamic stability without eigenvalues // Science. 1993. V. 261. P. 578.

**8**

буемых характеристик в формируемых периодических режимах. Наряду с за­дачей стабилизации, связанной с подавлением нежелательных колебаний, рас­сматривается задача возбуждения заданного колебательного режима.' Подобная задача встречается при разработке вибрационных механизмов, акустических и электронных генераторов. Необходимость согласования во времени состоя­ний взаимодействующих колебательных систем привела к задачам управления синхронизацией. В настоящее время результаты исследований по управлению колебаниями составляют глубоко разработанную теорию, основное содержание которой представлено работами Л.Д. Акуленко, И.И. Влехмана, В.И. Зубова, А.С. Ковалевой, П.Д. Крутько, Г.А. Леонова, А.Ю. Погромского, Б.Н.Соколова, А.Л. Фрадкова, Ф.Л.Черноусько, В.А. Якубовича, A. Bacciotti, Z. Galias, L. Mazzi, P.Parmananda, S. Zang, X. Yang.

В последнее время в теории управления нелинейными колебательными систе­мами появилось и активно разрабатывается новое научное направление - управ­ление хаосом. Всплеск интереса к задачам управления хаотическими аттракто­рами связывают с выходом в 1990г. работы Т. Ott, С. Grebogi, G. Jorke8. Здесь наряду с традиционными задачами подавления хаоса, когда целью управления является преобразование хаотического аттрактора в регулярный (предельный цикл или точку покоя), рассматриваются задачи возбуждения в управляемой системе хаотических колебаний, построения генераторов хаоса. Генераторы ха­оса активно используются в области защиты информации. Соответствующее научное направление (controlling chaos) представлено работами В.В. Алексее­ва, А.Ю. Лоскутова, Н.А. Магницкого, СВ. Сидорова, А.Л. Фрадкова, F.T. Arecchi, S. Boccaletti, J. Brindley, L.O. Chua , G. Chen , W.L. Ditto, X. Dong, R.J. Evans, J.Q. Fang, C. Grebogi, T. Kapitaniak, Y.C. Lai, H. Mancini, D. Maza, K. Pyragas, T. Shinbrot, X. Yu и др.

Вопросы управления колебаниями в системах со случайными возмущениями рассматривались в работах А.С. Ковалевой, Г.Н. Мильштейна.

Цель работы - построение теории экспоненциальной среднеквадратичной ус­тойчивости и чувствительности стохастических колебаний нелинейных динами­ческих систем и ее приложение к задачам стабилизации и управления, включая задача генерации и подавления хаоса.

Методы исследования. Представленные в диссертации исследования опира­ются на подходы и методы стохастического анализа случайных процессов, тео­рию устойчивости и управления стохастическими дифференциальными урав­нениями. Используются конструкции метода функций Ляпунова и квазипотен­циала, теория положительных операторов.

eOtt В., Grebodi С, *УЪЛв* J.A. Controlling chaos // Phys. Rev. Lett. X990. V. 64. P. 1196-1199.

9

**Научная новизна.**

1. Разработан общий вариант метода функций Ляпунова для анализа экс­поненциальной среднеквадратичной устойчивости компактных инвариантных многообразий нелинейных стохастических дифференциальных уравнений. Вве­дена конструкция системы стохастического линейного расширения и понятие Р-устойчивости, доказана теорема о стохастической устойчивости по первому приближению. Получен общий критерий, сводящий исследование стохастиче­ской устойчивости к оценкам спектрального радиуса некоторого положитель­ного оператора.
2. Как следствие этих общих результатов, получены конструктивные пара­метрические критерии стохастической устойчивости как для точки покоя, так и для основных колебательных режимов - предельного цикла и тороидального инвариантного многообразия; решена задача об устойчивости линейных стоха­стических систем с периодическими коэффициентами.
3. Для случая малых шумов, не вырождающихся на многообразии, разра­ботан общий подход, направленный на анализ стохастической чувствительно­сти исследуемого аттрактора. Основной конструкцией предлагаемого подхода является задаваемая на многообразии функция стохастической чувствительно­сти. Введение данной функции позволило в достаточно сжатой форме описать основные пространственные вероятностные характеристики пучка случайных траекторий системы, локализованного в окрестности исследуемого инвариант­ного множества. Разработаны численные методы, позволяющие находить функ­цию стохастической чувствительности для сложных пространственных много­оборотных предельных циклов и двумерных тороидальных многообразий. ■
4. Новые возможности разработанной теории стохастической чувствительно­сти нашли свое применение в ряде приложений: проведен анализ вероятностных механизмов субкритического перехода ламинарного потока в турбулентный и генерации магнитного поля галактик; исследована стохастическая чувствитель­ность предельных циклов в классических моделях Ван-дер-Поля, брюсселятора, Ресслера и Лоренца; для брюсселятора обнаружена зона параметров, в которой наблюдается сверхвысокая чувствительность и генерация хаоса; для циклов мо­делей Ресслера и Лоренца выявлены закономерности в изменении чувствитель­ности в цени бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.
5. На основе построенной теории стохастической устойчивости исследована задача стабилизации. Получены необходимые и достаточные условия етабили-зируемости и предложены конструкции стабилизирующих регуляторов как для общих инвариантных многообразий, так и для их наиболее важных случаев -точек покоя, циклов, торов.
6. Конструктивные возможности разработанной теории стохастической чув­ствительности демонстрируются в решении новой задачи управления вероят-

**10**

ностными характеристиками стохастических аттракторов. Для рассматривае­мой задачи управления введены понятия и получены критерии достижимости и полной управляемости. Детально исследована задача управления стохастиче­ской чувствительностью точки покоя и цикла. Возможности предложенной тео­рии продемонстрированы в задаче управления хаосом. Разработана конструк­ция регулятора, позволяющего подавить хаос, ранее обнаруженный в модели брюсселятора.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический ха­рактер. Развитый в ней математический аппарат и полученные результаты открывают перспективы эффективного стохастического анализа устойчивости нелинейных динамических систем и дальнейшего развития теорий управления сложными колебательными режимами в том числе и в зонах, непосредственно примыкающих к хаотическим. Эти результаты могут также быть положены в основу анализа конкретных прикладных задач устойчивости и управления ме­ханическими конструкциями, электронными устройствами и технологическими процессами.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались па семинарах от­дела динамических систем ИММ УрО РАН; расширенных семинарах кафедр математического анализа, теоретической механики, вычислительной матема­тики, математической физики УрГУ; городском семинаре по теории управ­ления (Санкт-Петербург); семинаре кафедры кибернетики Московского госу­дарственного института электроники и математики; представлялись в докла­дах на всероссийских и международных конференциях по теории стохасти­ческих дифференциальных уравнений, устойчивости и колебаниям нелиней­ных систем, теории управления, математическому моделированию, математи­ческой физике, статистической физике, в том числе - на на международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математиче­ские модели" (Челябинск, 2002), Крымских Международных математических школах "Метод функций Ляпунова и его приложения"(Алушта, 1993, 1998, 2000), международных семинарах "Устойчивость и колебания нелинейных си­стем управления"(Москва, 1998, 2000, 2002, 2004), международном семинаре "Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби"(Екатеринбург, 2005), "Dynamical Systems Modelling and Stability Inves­tigation" (Kyiv, 1999, 2001, 2003, 2005), международном Конгрессе "Нелиней­ный динамический анализ"(Москва,2002), международном Симпозиуме по про­блемам управления (Москва, 2003), международных конференциях по стати­стической физике StatPbys20 (Paris,1998), StatPhys22 (Bangalore, 2004), Third International Conference on Dynamic Systems and Applications (Atlanta, 1999), Nonlinear Dynamics and Chaos (Bristol, UK, 2001), International Conference on

**11**

Theoretical Physics (Paris, 2002), Europhysics Conference on Computational Physics (Aachen, Germany, 2001), School on Statistical Physics and Probabilistic Methods (Trieste, Italy, 1999), School and Conference on Spatiotemporal Chaos (Trieste, Italy, 2002), Symposium on Synchronization of Chaotic Systems (Trieste, Italy, 2000), School and Conference on Probability Theory (Trieste, Italy, 2002), EURO-MECH Nonlinear Oscillations Conference (Eindhoven, Netherlands, 2005), Interna­tional Congress on Mathematical Physics (London, 2000), 3 European Congress of Mathematics (Barcelona, Spain, 2000), 4 European Congress of Mathematics (Stockholm, Sweden, 2004), International Congress of Mathematicians (Berlin, Ger­many, 1998, Beijing, China, 2002), на Всесоюзной школе-семинаре "Математи­ческое моделирование в науке и технике"(Пермь, 1986), на Уральской реги­ональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" (Пермь, 1988), на Седьмой Всесоюзной конференции "Управление в механических системах" (Свердловск, 1990), на школах-семинарах "Модели­рование и исследование устойчивости физических процессов" (Киев, 1990,1991), на конференциях "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Киев, 1992-1997), на Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 1998), на Всероссийской научной конференции "Алго­ритмический анализ неустойчивых задач" (Екатеринбург, 2001). Публикации. По теме диссертации опубликовано более 50 тезисов докладов, 40 статей. Основные результаты, вынесенные на защиту, опубликованы в 23 работах [1-23].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации со­ставляет 271 страницу, библиографический список включает 291 наименование, иллюстративный материал насчитывает 50 рисунков.

СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

Во введении дан краткий обзор предыстории вопроса, обоснована актуаль­ность темы исследования, сформулированы цели работы, приведена аннотация основных результатов, выносимых на защиту.

Глава 1 «Среднеквадратичная устойчивость*»* состоит из десяти раз­делов. В разделах 1.1-1.6 излагаются общие результаты по анализу экспоненци­альной среднеквадратичной устойчивости компактных инвариантных многооб­разий нелинейных стохастических дифференциальных уравнений.

В разделе 1.1 рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

*dx* = /(z) *dt* (1)

**12**

и соответствующая ей система стохастических уравнений Ито

**m**

*dx* = *f{x)dt + ^T,crr{x)dwT(t).* (2)

**г=1**

Здесь tor(t) (г = 1,..., *т)* - независимые стандартные винеровские процессы, заданные на вероятностном пространстве (П,3", Р), *f(x)* и *о~Т(х) -* достаточ­но гладкие вектор-функции: *x,f,ar* є *Жп.* Предполагается, что системы (1), (2) имеют гладкое компактное инвариантное многообразие McR", при этом , о>|м = 0.

Рассмотрим в окрестности U многообразия *Ж* функции

7(я?) = argmin^ Ця - *у\\,* д(х) *= х- у(х),*

где || • || - евклидова норма, *ч(х)* - ближайшая к *х* точка многообразия *Ж,* а л(ж) - вектор отклонения *х* от *Ж.* Предполагается, что для систем (1), (2) окрестность U - инвариантна.

Определение 1. Инвариантное многообразие *Ж* называется *экспоненциаль­но устойчивым в среднем квадратическом (ЭСК-устойчивым)* для системы (2) в U, если при некоторых *К* > О, *I >* 0 для всех *t* > 0 выполняется условие Е||д(х{і))|]2 ^ *Ке~н* Е||д(а;о)||2, где *x(t) -* решение системы (2) с начальным условием *х(0) = Xq* є U.

В разделе 1.2 дается определение М-квадратичных функций Ляпунова и доказывается теорема 1.

Определение 2. Функция *v{x)* называется *Ж-квадратичной,* если при неко­торых &1 > 0, &2 > 0 для всех х Є U выполняется неравенство

\*і||д(г)|[8 0(s) \*£ «\*)Н2-Для системы (2) рассмотрим производящий дифференциальный оператор

*Lv(x)* = (/(\*),g(x)) + і *JT (ar(x),*g<\*)o-r(\*)) •

Теорема 1. *Для ЭСК-устойчивости компактного инвариантного многооб­разия Ж системы* (2) *в окрестности* U *необходимо, чтобы для любой и до­статочно, чтобы для некоторой Ж-квадратичной функции Ляпунова и>(х) существовала Ж-квадратичная функция Ляпунова v(x) такая, что в* U *спра­ведливо равенство Lv(x)* = — *w{x).*

В разделах 1.3-1.4 вводится конструкция стохастических линейных рас­ширений и исследуется их Р-устойчивость.

С каждым іЄМ связано *Тх* - касательное подпространство к *Ж* в точке *х, Nx -* ортогональное дополнение к Ті в R™, *Рх* - оператор ортогонального проектирования векторов из К™ на подпространство *Nx.*

**13**

Рассмотрим пространство Е, состоящее из всех симметрических пхп-матри-чных функций *V(x),* определенных и достаточно гладких на многообразии *Ж* и удовлетворяющих условию: Vx Є *Ж Vz* Є *Тх V(x)z* = 0. **Определение 3.** Функция *V(x) Є* Е называется *P-положительно определен­ной (V >* 0), если выполняется условие

Vx є *Ж Vz* є Rn *Pxz* ^ 0 =\* (г, Vfr» > 0. В пространстве E рассматривается конус *X,* состоящий из неотрицательно определенных матриц и множество его внутренних элементов

*ХР* = *{V* Є S | V > 0}. Поставим в соответствие детерминированной системе (1) линейное расшире­ние

***dx* = *f(x) dt, х Є Ж, .* .**

ds = F(a;)zdi, г€К", ' '

а стохастической системе (2) - *стохастическое линейное расширение  
dx — f(x) dt, х Є. Ж,*

*dz* = *F{x)zdt+f:ST{x)zdwr{t), F(x) = ?f(x),* &(a0 = ££(\*). (4)

Систему (4) можно рассматривать как семейство всех линеаризации стохасти­ческой системы (2) на решениях детерминированной системы (1), лежащих в *Ж.*

Определение 4. Система (4) называется *Р-устойчивой,* если при некоторых *К >* 0, / > 0 для всех *t* ^ 0 выполняется неравенство E||Px(t);z(t)||2 ^ *Ke~lt* E||PI0zo||2, где *(x(t),z(t)) -* решение системы (4) с начальным условием ***(x(0),z(0))* = (10,-¾). *х0* Є *Ж, zo* ЄГ,**

В анализе Р-устойчивости системы (4) используются функции Ляпунова ви­да *v(x, z) —* (г, *V(x)z), V* Є *Хр,* и оператор £ = Л + S , где

*A[V] =* (у, |£) + *FrV + VF, S[V]* = £ *SjVSr.*

Теорема 2. *Пусть система* (4) *является Р-устойчивой. Тогда*

*а) при любой матрице W ЄХ уравнение &[V] — — W имеет в X единствен­  
ное решение* -• *матрицу V* Є *X,*

*б) если W* Є *Хр, moV* Є *ХР.*

*Пусть для некоторой матрицы W* Є *Хр уравнение £>[V]* = — *W имеет решение V* Є *Хр. Тогда система* (4) *является Р-устойчивой.*

Рассмотрим решение *x(t) — X(t,x) (Х(0,х)* = і£ *Ж)* системы (1). При  
этом пространству Е, конусу *X* и множеству *Хр* соответствуют  
*Z\** = *{V(t)* | *V(t)* = *V(x(t)), V{x) Є* E, *t Є R1}  
Xх* = *{V(t)* I *V{t)* = V(x(t)), *V(x) €X,te* Ж1} (5)

*Xp = {V(t)* | *V{t)* = V(a;(t)), *V{x) eXP,te* R1}.

**14**

В разделе 1.5 доказана теорема о стохастической устойчивости по первому приближению.

**Теорема 3.** *Для ЭСК-устойчивости компактного инвариантного многооб-разия Ж системы* (2) *в окрестности* U *необходимо и достаточно, чтобы система соответствующего стохастического линейного расширения* (4) *яв­лялась Р-устойчив ой.*

В разделе 1.6 получен общий критерий, сводящий исследование Р-устой-чивости к оценкам спектрального радиуса *р(7)* положительного оператора У = *~А'1В.*

**Теорема** 4. *Для того, чтобы стохастическая система* (4) *была Р-устойчива, необходимо и достаточно, чтобы, детерминированная система* (3) *была Р-устойчива и выполнялось неравенство р(У) <* 1.

Результаты, представленные теоремами 1-4, являются целостным и сжатым изложением базовых теоретических материалов, содержащихся в публикаци­ях автора [3],[4],[8],[18],[22], посвященных исследованию детерминированной и стохастической устойчивости разных объектов (точки покоя, циклы, торы, ин­вариантные многообразия).

Для стохастической системы

*dx* = *f(x) dt,*  іЄМ, . .

*dz* = *F{x)zdt* + *y/zTQ(x)zdT},* гЄІ", V

где *Tj(t) -* n-мерный винеровский процесс с параметрами Ed77 = 0, *"Edrj{dr}Y — G(x)dt* (Q, *G* Є *ОС),* спектральный радиус оператора У совпадает со спектраль­ным радиусом более простого оператора *Ъ: Ъ[р] —* — tr({-A-1[9?Q])(7), дей­ствующего на пространстве скалярных функций.

Шумы в системе (6) (шумы второго типа) были введены в [1]. Во многих важных случаях форма шумов второго типа более естественна. Как показа­но в диссертации, для уравнения n-го порядка и в системах с многообразием единичной коразмерности codimM = 1 все действующие шумы можно заме­нить одним шумом второго типа; в общем случае один шум второго типа может быть использован в качестве мажоранты для нескольких шумов, действующих в системе [12].

Как следствие этих результатов, получены конструктивные параметрические критерии стохастической устойчивости как для точки покоя (раздел 1.7), так и основных колебательных режимов - предельного цикла (раздел 1.8) и торо­идального инвариантного многообразия (раздел 1.9).

Раздел 1.7 посвящен случаю, когда инвариантным многообразием М си­стем (1), (2) является точка покоя *х : Ж — {х}.*

Рассмотрим соответствующую систему первого приближения с мультипли

**15**

кативньгми шумами второго типа

*dz* = *Fzdt + ^/zTQzdt]) zeRn* **(7)**

и систему с аддитивными шумами

*dz* = *Fzdt + drj,* (8)

где *F* = *-а~(х), r}(t)* - n-мерный винеровский процесс с параметрами Edn = О,

**т**

*Edr](dr])T* = *Gdt, Q, G ЄХ,а.* конус DC составляют постоянные симметрические неотрицательно определенные n х п-матрицы.

**Теорема 5.[3]** *Для того, чтобы решение* г = 0 *системы* (7) 5ыло *ЭСК-устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы матрица F была устойчива и для стационарно распределенного состояния* z, *системы с аддитивными шу­мами* (8) *выполнялось неравенство E(zjQzs) <* 1.

Раздел 1.8 посвящен случаю, когда инвариантным многообразием *Ж* си­стем (1), (2) является предельный цикл, задаваемый Т-периодическим реше­нием *х —* £(£). Рассмотрим соответствующую систему первого приближения

*dz* = *F(t)zdt* + *^zTQ{t)zd-q, z* Є R", (9)

и систему с аддитивными шумами

*dz* = *F(t)zdt* + *dr)(t),* (10)

где *F(t)* = —— (¢(¢)), *T}(t) -* n-мерный винеровский процесс с параметрами

*ах Edrj* = 0, *Ed7j(drj)~ — G(t)dt, Q(t), G(t)* Є *X.* Здесь конус *X* составляют

неотрицательно определенные матрицы из пространства S всех симметриче­ских *п* х я-матриц, определенных и достаточно гладких на *Ш1,* с условиями периодичности и вырожденности

VieR1 *V(t + T) = V(t),* V(i)/(£(t)) = 0.

Матрица вторых моментов *D(t)* = *Ei(z(i)zT(t))* системы (10) удовлетворяет уравнению

*W = F(t)W + WFr(t) + G(t).* (11)

Пусть m = min[o,r]tr(<3(i)D(£)) иМ = max[0%r]tr(Q(f)Z)(i)).

**Теорема** 6.[4] *Пусть детерминированная система dz = F(t)zdt является Р-устойчивой и матрица D(t)* Є *X есть решение уравнения* (11). *Тогда нера­венство М* < 1 *является достаточным, а неравенство т < 1 является необ­ходимым условием Р-устойчивости стохастической системы* (9).

**16**

В случае цикла на плоскости (п = 2, codimM = 1) имеем

т *р(9)* = *р(Ъ)* = ~^ff, *<\*>= f cx(t)dt,*

о

где *a(t) =pT{t)(FT(t) + F(t))p{t), 0{t)=pT(t)G{t)p(t), p{t)* - ортогональный

***m***

/(£(\*)) и нормированный вектор, *G{t)* = *J2 ST(t)p(t)pT(t)Sj(t).*

**г=1**

Необходимое и достаточное условие Р-устойчивости стохастической системы (9), а, значит, и ЭСК-устойчивости цикла, имеет вид

*т*

***/***

***тп****tv(2F(t) +* 23 *Sr(t)Sj(t))dt <* 0. (12)

**0 ■ г-1**

Данный критерий [4] является естественным обобщением классического крите­рия Пуанкаре на случай стохастических систем.

Раздел 1.9 посвящен случаю, когда инвариантным многообразием 3VC си­стем (1), (2) является лежащая в *Ш."* двумерная тороидальная поверхность *{Ж* - 2-тор). Для JVC рассматривается следующая параметризация. Пусть на М лежит некоторая замкнутая достаточно гладкая кривая і? (экватор), зада­ваемая функцией $(s) на интервале 0 < *s* ^ 1 с условием $(0) = ч?(1). Из каждой точки t?(s) кривой #, как начальной, выходит решение *x[t, s)* систе­мы (1) с условием *х(0, s) —* i?(s). Предполагается, что фазовые траектории семейства решений *x(t, з)* системы (1) полностью покрывают тор *Ж.*

Следуя общему подходу разделов 1.1-1.6 и выбранной параметризации, для (2) строится система первого приближения. Анализ ее Р-устойчивости по теоре­ме 1.4 сводится к оценке спектрального радиуса *р* соответствующего оператора 3>. В работе представлен общий метод получения для *р* оценок снизу и сверху, позволяющих достаточно конструктивно находить достаточные условия устой­чивости, близкие к необходимым.

В трехмерном случае *[п* = 3), когда codimJvt = 1, система первого прибли­жения, связанная с решением *x(t,* s), имеет вид

*dz* = *F[t, sjzdt + y/zTP{t, s)zdr),* (13)

*r)f Пет m*

где *F(t,s) =* g(\*(\*,a)), *Sr{t,s)* = *-£(?{t,a)), ф) = ^wT(t)ST(t,s)p(t,S),* p(£, *s)* - нормированный вектор, ортогональный тороидальной поверхности в точке*x(t,в), P(t,в)* = *p(t,s)pT(its), G(t)* = *Ed7](t)(d-n(t))T* = £ *Sr(t,s)Sj(t,s).*

**17**

Спектральный радиус оператора У равен

г р(У)^тах(-~~</?>~~1, <а>= lim ^ / *adt, a = pT[FT + F]p, 0 = trG.*

***9* I *^. Ot* ^ *J -I* —-\*oo *X J***

**0**

Необходимое и достаточное условие Р-устойчивости стохастической системы (13), а значит, и ЭСК-устойчивости 2-тора М имеет вид [22]

*т*1 Л m

max < a + /? >= max lim - / tr[2F(i, s) + V *ST(t, s)Sj(t, s)]dt <* 0. (14)

*s а* Г-юо і *J \*—\**

**0 r=1**

Возможности представленной теории демонстрируются на примере. Для неко­торой трехмерной системы с двумерным инвариантным многообразием реше­ний проводится детальный параметрический анализ ЭСК-устойчивости с осо­бенностями в случаях резонансов.

Общая теория спектрального анализа стохастической устойчивости из раз­дела 1.6 распространяются в разделе 1.10 на важный случай линейных сто­хастических систем с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейную стохастическую систему

**m**

*dx* = *A(t)x dt +* У^ *ar(t)x dwr,* (15)

**r=l**

где a; - n-мерный вектор, *wr* (г = 1,..., m) - некоррелированные стандартные винеровские процессы, *A(t), aT(t)* - Г-периодические nхn-матричные функции. Пусть *x(t) = x(t, s, х)* - решение системы (15) с начальным условием *x(s)* = *х.* Определение 5. Решение *х* = 0 системы (15) называется *экспоненциаль­но устойчивым в среднем квадратичном* (коротко - *устойчивым),* если су­ществуют *а >* О, *L >* 0 такие, что для всех *х* и всех *t* > я выполняется *V\\x{t,s,x)\\2 ^ Ье-а<~ь-'Щх\\2.*

Рассмотрим детерминированную систему

*dx* = *A{t)xdt* (16)

и операторы

***т***

*A[V} = V(s) + AT(s)V{s)+V(s)A(s), S[V]* = ]T>7(s)^(s>r(s), *7 =-A^S.*

**г=1**

Теорема 7.[14] *Для того, чтобы система* (15) *была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы система* (16) *была устойчива и выполнялось неравенство р(7) <* 1, *где р(У) есть спектральный радиус оператора* У.

**18**

Рассмотрим стохастическую систему с одним шумом второго типа

*dx* = *A (t)x dt + <JxTQ(t)x dr],* (17)

где *T)(t)* - n-мерный винеровский процесс с Е<іт7(і) = 0 , *Edtj^drj7 (t) = G(t)dt,*

*Q* є ЗС1, *G* € *ОС1, Xn* - конус неотрицательно определенных симметрических

Т-периодических n х п-матричных функций.

Для (17) имеем *р{7)* = *р{Ъ),* где *Ъ[<р]* = -tr^\_1[tpQ]G).

%](а) ,

Пусть «7[у>, 5] = —7~Т~> гДе V Є ЭС{, a 3CJ - множество Т-периодических

скалярных функций у > 0.

Теорема 8. [14] Для /о = *р[Ъ) при любом ір Є Х\ справедливы соотношения*

min *J[ip, s]* < *р* < max Jfo si, p — min max *JVp, s]* = max min *J\w, s].* [o,T] l^' *r \%t] ir'* J ^ vex; [од-] ^ J ^эс{ [оді l^' J

Теорема 7 сводит анализ устойчивости к оценке спектрального радиуса *р.* В свою очередь теорема 8 связывает построение таких оценок с решением экс­тремальных задач для функции *J[<p,s].* Отыскание значений *J[<p, s]* предпола­гает вычисление значений оператора Л-1, что требует решения соответству­ющего периодического уравнения Ляпунова. В работе излагаются алгоритмы [14} решения подобных уравнений. Полученные теоретические результаты ил­люстрируются на примере.

Глава 2 «Стохастическая чувствительность» состоит из четырех раз­делов. В разделе 2.1 рассматривается стохастическая система

*dx* = *f(x)dt + ea(x)dw(t), x,feW.* (18)

Здесь *w(t)* - n-мерный винеровский процесс, *<т(х) ~* достаточно гладкая *пхп-*матричная функция, *є -* параметр интенсивности возмущений.

Предполагается, что детерминированная система (1) имеет инвариантное и экспоненциально устойчивое многообразие *Ж.* В результате действия невырож­денных возмущений (сг(ж)|м *Ф* 0) случайные траектории системы (18) покидают многообразие *Ж* и формируют вокруг него некоторый пучок.

В случае малых шумов асимптотика стационарной плотности распределения случайных траекторий в этом пучке имеет вид *р(х,* е)иА'' ехр(—^), где *v(x)* - некоторая функция Ляпунова — *квазипотенциал.* Вблизи многообразия *Ж* для квазипотенциала строится М-квадратичная аппроксимация

*v(x)* = *V(x) +* 0(||д(х)||3), *ф)* = і(д(з), Ф(7(\*))д(х)), Ф(х) = *~{х),*

позволяющая представить асимптотику стационарной плотности в форме нор­мального распределения

*р(х,є)* wKexp/ —

*{А(х),Ф+(Ф))Ф)У*

*2є\**

**19**

с ковариационной матрицей *є2Ф(х)* (Ф(ж) = Ф+(г)> + означает псевдообраще­ние). Определенная на *Ж* функция *Ф(х) — функция стохастической чувстви­тельности* (ФСЧ) - позволяет описать основные вероятностные характери­стики стохастически возмущенного многообразия. Конструктивное построение этой функции и исследование с ее помощью свойств стохастических аттракто­ров составляет основное содержание второй главы.

Решение *x(t)* = *X(t,x) (Х(0,х)* = *х* Є *Ж)* системы (1) позволяет получить для функции *Ф(х)* параметрическое представление *W(t) — Ф(х(і})* и уравнение

*W = F(t)W + WFr(t) + P(t)S(t)P(t),* (19)

где *F(t)* = g(z(i)), *S(t)* = *G(t)GT(t) , G(t)* = <r(x(t)), *P(t) = Px(t).* Рассмотрим системы

*du = F(t)udt + G(t)dw(t),* (20)

*dy* = *F(t)ydt + P(t)G(t)dw(t).* (21)

и £\*, *Xх, %xp* из (5).

Теорема 9. [7], [19] *Пусть детерминированное линейное расширение* (3) *явля­ется Р-устойчивым. Тогда для любого* i?M *справедливы утверждения:*

*(а) Матричное уравнение* (19) *имеет в пространстве* Ег *единственное  
решение W(t)* Є *Xх. Если S{t)* є *Х%, то W(t)* Є *Xх,.*

*(б) Система* (21) *имеет решение y(t) с ковариационной матрицей  
cov{y(tim) = W(t).*

*(в) Для всякого решения y{t) системы* (21) *проекция P(t)V(t)P(i) ковариа­  
ционной матрицы V(t) — cav(y(t),y(t)) сходится к матрице W(t) :*

*]im(P(t)V(t)P(t)-W(t)) = 0.*

*t—\*+oo*

*(г) Для всякого решения y(t) системы* (21) *проекция P(t)y(t) сходится в сред­  
нем квадратичном к y(t) :*

*]imEllP(t)y(t)-y(t)f = 0.*

*t—*»-j-oo

*(д) Для всякого решения u(t) системы* (20) *проекция P(t)U(t)P(t) ковариаци­  
онной матрицы U(t)* — *cav(u(t),u(t)) сходится к матрице W(t)* :

*KmJP(t)U(t)P(t) - W{t))* = 0.

*(є) Для всякого решения и(і) системы* (20) *проекция P(t)u(t) сходится в сред­нем квадратичном к y(t) :*

*]imE\\P(t)u(t)-y(t)f = 0-*

t—»+оо

**20**

Раздел 2.2 посвящен случаю, когда инвариантным многообразием системы (1) является точка покоя *х* : 3VC = *{х}.*

Стохастическая чувствительность *х в* системе (18) характеризуется постоян­ной матрицей *W -* решением алгебраического уравнения

*FW + WFT = -S,* F = |£(2)f *S = GGr, G=\*o{S).*

Для стохастически возмущенного уравнения Ван-дер-Поля получена зависи­мость стохастической чувствительности точки покоя от параметра нелинейно­сти.

В двумерном случае исследована связь стохастической чувствительности с особенностями матрицы динамической системы. Показано, что для систем с ненормальной матрицей традиционных характеристик устойчивости - собствен­ных значений - недостаточно для анализа реакции системы на случайные воз­мущения. Ненормальность может быть причиной чрезвычайно высокой стоха­стической чувствительности и приводить к неожиданным (с точки зрения клас­сической теории детерминированной устойчивости) качественным эффектам. В работе проведен анализ стохастической чувствительности некоторых нели­нейных динамических моделей. Полученные результаты позволяют прояснить вероятностный механизм субкритического перехода ламинарного потока в тур­булентный и вызванную шумами генерацию магнитного поля галактик [17],[20].

Раздел 2.3 посвящен анализу стохастической чувствительности циклов. Рассмотрим случай, когда инвариантным многообразием М системы (1) яв­ляется предельный цикл, заданный *Т-*периодическим решением *х* = £(i).

Решение *£(t)* на интервале [0, *Т)* задает параметризацию точек цикла: •М = {£(\*) | 0 < t < Т}. Предполагается, что цикл *Ж* является экспонен­циально устойчивым. В системе (18) вокруг цикла формируется стационарно распределенный пучок случайных траекторий. Функция стохастической чув­ствительности этого пучка *W(t)* является решением матричного уравнения

*V* = *F(t)V + VFT(t) + P(t)S(t)P(t)* (22)

с условиями периодичности

VteM1 *V(t + T) = V(t)* (23)

и вырожденности

VteR1 y(t)r(t) = 0, r(t) =/Ш). (24)

Здесь *F(t)* = |£(«\*)),- *S(t)* = C(i)GT(i), *G(t)* = <r(f(i)), *P(t)* = *Pm* -Г-периодические коэффициенты.

**21**

В работе получен численный итерационный метод решения задачи (22), (23), (24) в общем n-мерном случае [7].

В случае цикла на плоскости (n = 2), когда codimM = 1, задача (22), (23), (24) решается аналитически [5]. Здесь матрица *W{t)* представима в виде *W(t)* = *ti(t)p(t)pT(t),* где *p(t) -* нормированный вектор, ортогональный каса­тельному вектору /(£(£)), ц(і) > 0 - Т-периодическая скалярная'функция, задающая дисперсию пучка по нормали *p(t).* Для /\*(£) получена краевая задача

0=a(\*)/i + b(t), *р{0) = р(Т), a = pr(Fr + F)p, b = pTSp,*

имеющая, в случае экспоненциально устойчивого цикла, единственное решение

/\*(\*) = *№* (с 4- *h(t)), g(t)* = *exp lja{s)ds* J , *h(t)* = *J ^ds, с* - ^

N \* *9(Т)ЦТ)*

*■д(т)*

Для построения функции стохастической чувствительности в трехмерном случае разработан метод, использующий сингулярное разложение

^(\*) = A'x(\*)«i(\*)«3r(\*) + Aa(\*)wa(\*)»2'(\*)- (25)

по собственным значениям *X\(t),* Аг(£) и соответствующим собственным векто­рам *vi(t},V2(t)* матрицы *V(i).*

В случае невырожденных шумов функции Аі(£),Аг(і) строго положитель­ны и определяют при любом *t* дисперсию случайных траекторий цикла вдоль векторов *vi{t),V2(t).* Значения Ai(£), А2(£) задают размер, a *Vi(t),V2(t)* задают направление осей эллипса рассеивания точек пересечения случайных траекто­рий с нормальной плоскостью lit. Пусть *ui(t), U2(t)* - ортонормированный ба­зис плоскости TIj. Векторы *vi{t), V2{t)* могут быть получены вращением базиса ui(\*)i *ui(t)* на некоторый угол *tp(t)* :

*Vi(t) = U\(t)cQS(p(t) + ll2(t)sin.<p(t),* l/2(i) = — *Ui(t) SW. ip(t)+ U2(t) cos <p(t).* (26)

Теорема 10.[19] *Матрица V(t) является решением системы* (22),(24) *то­гда и только тогда, когда скалярные функции* Ai(t), Aa(t), *<р(і) разложения* (25),(26) *удовлетворяют системе*

*k* = *XivJlF + F^Vi+vlSvi*

А2 = *\*2vJ[F + Fr]v2 + vJSv2* (27)

(А! — *\2)Ф = MvjFv2 + XivjFTV2 + vJSv2* - (Ai — А2)й7«2.

Искомая матрица стохастической чувствительности *W(t)* может быть най­дена методом установления.

**22**

Теорема 11.[19] *Пусть матрица W(t) является решением системы* (22)-(24). *Пусть* Аі(і), Аг(<), *<p(t) есть произвольное решение системы* (27) *на интервале* [0,+со), *a V{t) =* Аі(і) ■ Л(0 + Аа(«) • Я»(\*). \*fe #W = *Vi(t)vJ(t) с векторными функциями Vi(t) из* (26). *Тогда матрица V(t) сходится к мат­рице W(t) при t* —+ -boo

*^JY(t) - w(t))* = о.

Теория стохастической чувствительности предельных циклов иллюстрирует­ся на примерах. В работе представлены результаты анализа чувствительности предельных циклов в классических моделях Ван-дер-Поля, брюсселятора, Рес-слера и Лоренца [6],[9],[15],[16]. Для брюсселятора обнаружена зона параметров, в которой наблюдается сверхвысокая чувствительность и генерация хаоса. Для стохастических циклов моделей Ресслера и Лоренца выявлены закономерно­сти в изменении чувствительности в цепи бифуркаций удвоения периода при переходе к хаосу.

Традиционное направление теории нелинейных колебаний, связанное с раз­ложением по малому параметру, представлено в разделе 2.3.8. Здесь получены рекуррентные формулы разлолсения функции стохастической чувствительно­сти по степеням малого параметра нелинейности. Результаты иллюстрируются на примере анализа стохастически возмущенных автоколебаний в модели Ван-дер-Поля [6].

Раздел 2.4 посвящен исследованию стохастической чувствительности торо­идальных многообразий.

Пусть инвариантным многообразием *Ж* детерминированной системы (1) яв­ляется двумерная тороидальная поверхность (*Ж -* 2-тор).

Предполагается, что 2-тор 3VC является экспоненциально устойчивым и до­пускает параметризацию (см. раздел 1.9), задаваемую решениями *x(t,s)* си­стемы (1). С семейством решений x(t, s) связаны функции *T(s)* и r(s). Здесь *T(s)* = min{ *t >* 0 I *x(t, s)* € 1? } - момент первого возвращения траекто­рии *x(t,s)* на кривую *&,* при этом *x(T(s),s)* есть точка возвращения; *t(s) -*функция последования сечений Пуанкаре кривой *■&* фазовыми траекториями системы (l)(\*?(r(s)) = *x(T(s),s)).*

Рассмотрим пространство Е, состоящее из симметрических *п* х п-матричных функций *V(t, s),* определенных и достаточно гладких на R2 с условиями согла­сования

V(«,s)eR2 *V{t,s + l) = V(t,s), V(T(s) + t,s) = V(t,T(s))*

и вырожденности

V *(t, s)* Є R2 V *z* Є TsM *V(t, a)z* = 0. **23**

В пространстве £ рассматривается конус неотрицательно определенных мат­риц *X* и множество *ХР* = *{V* Є Е | *V >* 0}.

Функция стохастической чувствительности Ф(г) для 2-тора *Ж* для системы (18) имеет параметризацию *W(t, s) — ${x{t,* s)), где W^t, *s) -* единственное в £ решение матричного уравнения

*~~dW~~~~!%'~~~~S)~~* = \*Ч\*. \*)W(t, в) + W(«, *s)FT(t, s) + P(t, a)S(t, s)P(t, a).* Здесь

F(tf j) = *~~дПХ~~~~д1'~~~~3)~~~~\~~ S(t, s)* = G(r, 5)GT(t, 5), G(i, в) - *\*(x(t,,)), P(t, s)* = *PxM.*

В случае n = 3, когда codimM = 1, матрица *W{t, s)* стохастической чув­ствительности тора имеет вид *W(t,s)* = *n{t, s)p(t, s)pT(t, s),* где *p(t,s)* - нор­мированный вектор, ортогональный тороидальной поверхности в точке *x(t, s),* а скалярная функция *p(t, s) >* 0 является решением краевой задачи

*^(t,s) = a{t,s)u{t,s) + b(t,s),* (28)

*fi(t,s + l)=fz{t,s),* Ai(T(e)+\*,s) =/\*(«, т(в)). Здесь a = *pT(Fr + F)p, Ь* = *prSp.* Решение задачи (28) имеет вид

*fi(t,s) =g(t,s)[c(s)+h(t,s)], g(t,s)* = exp J / *a(r,s)dT* J , *h(t,s)* =■ / ~~|^'^~~tfr.

\o / о '

Здесь функция c(s) удовлетворяет системе

c(T(«)) = a(s)c(s)+/?(«), ф + 1)=ф), (29)

где а(в) = <?(T(s), s), /J(s) = о(а)А(Г(в), *s).*

Решение *c(s)* системы (29) может быть найдено методом установления. Рассмот­рим последовательности *s0* = s, sb..., *sk,*... , где sa+i = r(sfc), и со, clt..., с\*,..., где 5¾ = *c(sk).* Значения c/t, благодаря (29), связаны уравнением

*Ск+i — акск + Рк, ак* = a(sfc) , /¾ = /?(s\*)-

Для элементов *ск* рассмотрим приближения *ск,* задаваемые рекуррентной фор­мулой Cfc+i = *акск* 4- *Рк,* где со - некоторое приближение для Со. Теорема 12. *Пусть тор Ж системы* (1) *является экспоненциально устой­чивым. Тогда* lim *(ск* — *ск) —* 0 *независимо от выбора начального прибли-*

***к—*юо** *оісения* Со-

Конструктивность полученных теоретических результатов иллюстрируется

примером.

**24**

Глава 3 «Стабилизация» состоит из пяти разделов. Здесь на основе тео­рии устойчивости из главы 1 исследуется стабилизируемость и решается задача синтеза стабилизирующих управлений.

В разделе 3.1 представлены общие теоретические конструкции, связанные со стабилизацией инвариантных многообразий.

Рассматривается управляемая детерминированая система обыкновенных диф­ференциальных уравнений

*dx* = *f(x, и) dt,* 1,/єй", *и Є Rl* (ЗО)

и соответствующая ей стохастически возмущенная система

***т***

*dx* = *f(x,u)dt + ^2<Tr(x,u)dwr(t),* і,/, су є Rn, *иеШ1.* (31)

Здесь *f(x, и), <гТ(х, и)* -достаточно гладкие вектор-функции, *wr(t)* (г = 1,..., *т)* - независимые стандартные шнеровские процессы, *и* - управляющий параметр.

Предполагается, что при *и* = 0 система (30) имеет компактное инвариант­ное многообразие М С М", которое остается инвариантным и для системы (31), если *аТ{х,* 0)|м = 0. Рассматривается задача выбора управления *и,* при котором многообразие *Ж,* сохраняя инвариантность, становится для (31) ЭСК-устойчивым. Стабилизирующий регулятор выбирается из класса достаточно гладких функций *и(х),* удовлетворяющих условию *и(х)\м* = 0.

По теореме 3 вопрос о стабилизации многообразия *Ж* нелинейной системы сводится к задаче стабилизации системы соответствующего линейного расши­рения. Такими линейными расширениями для (30),(31) являются системы

*dx* = /о (ж) *dt, хе Ж, .* .

*dz* = *(A(x)z + B(x)v)dt,* zeR", *{ }*

***dx* = /0(2:) *dt, x* Є M,**

*dz* = *(A{x)z + B(x)v)dt+Jt{Cr(x)z + HT(x)v)dwr(t),* г€К", ^

**r=l**

*Mx) = f(x,Q), A(x)* = g(z,0), *B[x)* = g(x,0), *CT(x)* = ^M),

*HT{x)* = *-^-{x,* 0). Здесь управление *v* формируется регулятором *ou*

*v* = *K{x)z* (34)

с матрицей *К(х) —* я-(г), удовлетворяющей вследствие *и{х)\м* = 0 условию

Var Є *Ж К(х)Рх* = *К(х).* (35)

**25**

В задаче стабилизации нелинейной системы (31), не теряя общности, можно ограничиться классом управлений вида

*и(х)* = *К{ф))&(х).* (36)

В случае codim *Ж —* 1 возможна факторизация матрицы обратной связи: *К{х) — k(x)pT(x).* Здесь *к{х) -* Z-вектор-функция, *р(х)* - п-вектор-функция, нормированная и ортогональная *Ж* в точке *х* € *Ж.* При этом регуляторы (36),(34) будет иметь вид

■и=й(7(х))рт(7(ї0)д(а:), *v* = *k(x)pr(x)z* (37)

Рассмотрим множество К, состоящее из *I* х гс-матричных функций *К(х),* определенных и удовлетворяющих на *Ж* условию (35), для которых замкнутая система (32), (34) является Р-устойчивой. Множество К задает класс регуля­торов (34), стабилизирующих детерминированную систему (32).

Для исследования возможностей стабилизации стохастической системы (33) регулятором (34) используется спектральный критерий Р-устойчивости теоре­мы 1.4. Рассмотрим операторы *AK[V]* = *(* /0, —- ] + *(A+BK)TV->t-V{A+BK),*

***m***

*$k[V} =* £ (О- + *HTK)TV{CT + HrK), УK* = *-A^Sk-*

Теорема 13. *Для стабилизируемости стохастической системы* (33) *управ­лениями вида* (34) *необходимо и достаточно, чтобы детерминированная си­стема* (32) *была стабилизируема некоторым управлением* (34) *(К Ф %) и вы­полнялось неравенство* inf *р{Ук) <* 1. *При этом стабилизировать систему*

(33) *будет любое управление* (34) с *матрицей К* Є К, *для которой рі^Рк) <* 1-

Данная теорема сводит исследование стабилизяруемости стохастической си­стемы (33) к задаче оптимального управления детерминированной системой (32) с критерием *р(Ук)-* Представленный критерий является общим вариантом результатов, опубликованных в [Щ2],[3].

На основе этих общих результатов получены конструктивные решения задач стабилизации как для точки покоя (раздел 3,2), так и основных колебательных режимов - предельного цикла (раздел 3,3) и тороидального инвариантного многообразия (раздел 3.4).

В разделе 3.2 рассматривается случай, когда инвариантное многообра­зие *Ж* управляемых систем (30), (31) состоит из единственной точки покоя *х* : *Ж = {х}.*

Соответствующая система первого приближения имеет вид

*dz* = *{Аг + Bv)dt* + *<JzrQz + Vх Rvdrj, z* Є *Rn,* (38)

*v* = *Kz,* (39)

**26**

где *A* = |£(S, 0), *В = У^{х,* 0), *Ed-q* = 0, *Edri(dT))r* = G<ft.

Рассмотрим множество К, состоящее из *I х* n-матриц *К,* при которых мат­рица *А + ВК* является устойчивой. Пусть пара *(А, В)* - стабилизируема, тогда

К 7^0.

Для системы (38) спектральный радиус оператора *У к* имеет представление

*рфк)* = *E(zjQzs + vTRv),* (40)

где *zs* - стационарно распределенное решение системы

*dz* = (Аг + *Bv)dt + drj* (41)

с матрицей *К* Є К в регуляторе (39).

Как видим, исследование стабилизируемости стохастической системы (38) с мультипликативным шумом, зависящим от состояния и управления, сводится здесь по теореме 13 к классической задаче минимизации квадратичного крите­рия (40) для системы с аддитивным шумом (41). Для случая, когда матрицы *Q* и *R* положительно определенные, задача оптимизации min/f€K *р(Ук)* име­ет единственное решение *Ко — —R~1BTV,* где матрица *V* является решением уравнения Риккати

*ATV + VA-VBBr1BrV = -Q.* (42)

При этом *рС^Ко)* = niinjfgK *р№к) —* tr(VG). Таким образом, здесь, в случае точки покоя, критерий теоремы 13 приобретает следующий конструктивный вид.

Теорема 14. [3] *Для стабилизируемости системы* (38) *регулятором* (39) *необ­ходимо и достаточно, чтобы пара (А, В) была стабилизируема и выполня­лось неравенство* tr(VG) < 1, *где матрица V - решение уравнения* (42). *При этом стабилизировать систему* (38) *будет регулятор* (39) *с матрицей К0 = -Rr1BTV.*

Раздел 3.3 посвящен стабилизации циклов.

Рассматривается инвариантное многообразие *Ж* системы (31),(36), задавае­мое Т-периодическим решением х = £(t).

Соответствующая система первого приближения имеет вид

*dz* = *(A(t)z + B{t)v)dt + ^zTQ(t)z + vrR(t)vdt)',* (43)

*v* = *K(t)z,* (44)

где *A(t)* = |£fc(i), 0), *B(t)* = |£fc(i), 0), *Edr,(t)* = 0, *Edrj(t)(dr](t))r* = *G(t)dt, Q(t), R(t), G(t), K(t) —* Т-периодические матрицы,

*K(t)P(t)* s *K(t), P(t)=Pm.* (45)

**27**

Рассмотрим детерминированную систему

*dz = {A{t)z + B{t)v)dt* (46)

и множество К всех Т-периодических матриц *K(t)* с условием (45), при кото­рых система (46) с регулятором (44) является Р-устойчивой. Для системы (43) спектральный радиус *рк — рС^к)* оператора *Ук* удовлетворяет неравенствам

min *Jx(t)* ^ *Рк* < max./#■(£)■ (47)

[оді w [оді w ч *'*

Здесь *JK(t)* = *E{zT(t)Q(t)z{t)+vT(t)R(t)v(t))* = tr((Q*(t)+KT (t)R(t) К(t))D*{\*)), *z(t)* - решение системы

*dz = (A(t)z + B{t)v)dt + drj* (48)

с регулятором (44). Это решение соответствует некоторому существующему у (48) при *К* Є К периодическому режиму с матрицей вторых моментов *D(t) = E(z(t)zT(t)).*

Оценки (47) позволяют, решая соответствующие задачи оптимизации для системы с аддитивными шумами (48) и квадратичного критерия *Jk,* получать как достаточные, так и необходимые условия стабилизируемости.

В двумерном случае *(п* = 2), когда коразмерность цикла равна единице и ре­гуляторы в системах (31), (33) имеют форму (37), соответствующая замкнутая система первого приближения имеет вид

*dz* = *Fk{t)zdt + yJzTP{t)zdrjk,* (49)

где *Fk(t)* = *A(t) + B(t)k(t)pr(t), A(t) =* g(f(t), 0), *B(t)* = gtf(t), 0),

*P(t) = p(t)pT(t), k{t) -* Т-периодическая Z-вектор-функция, *p(t)* - норми-

***m***

рованная вектор-функция, ортогональная /(£(\*), 0), *t}k{t)* = *^2wT(t)grk(t),*

**r=l**

**571**

*9rk(t)* = *CT(t)p(t) + HT(t)k(t), Gk(t)* = *EdVk(t){dVk(t))r* = £<?rJt(i)&\*(\*).

*Cr{t) =* ^(l(f)'0)> *Hr{t) = ^m'*0)-

Критерий Р-устойчивости (12) для системы (49) с коэффициентом *k(t)* в обратной связи *v* = *k(t)pr{t)z* имеет вид *Jk* = < а\* (і) + *(3k(t)* > < 0. Здесь *ak = рт (F^ + Fk) p, fik — pTGkp.* Для *Jk* справедливо явное представление

*Jk =<а + /3 + 2(Ъ + c)rk + kTHk* >,

**m m m \_**

*a = pT{AT + A)p, b = BTp,* /?=£c», c-Ecrftr, *H^^hrhJ,*

**r=l r=l r=l**

Cr=(pTCrp)2, *hr = Hjp.*

**28**

В работе имеется пример, иллюстрирующий возможность конструктивного анализа стабилизируемости и построения для системы (49) стабилизирующего регулятора.

Раздел 3.4 посвящен стабилизации тороидальных многообразий [8].

Рассматривается случай, когда инвариантным многообразием *Ж* системы (31) с регулятором (36) является лежащая в R3 двумерная тороидальная по­верхность с параметризацией, задаваемой семейством решений *x(t,s).*

В трехмерном случае, когда codimM = 1 и регуляторы в системах (31), (33) имеют форму (37), соответствующая замкнутая система первого приближения имеет вид

*dz* = *Fk(t, s)zdt + \JzTP{t, s)zdr)k,* (50)

где *Fk(t,s) = A(t,s) + B(t,s)k(t,s)pT{t,s), P{t,s)* = *p{t,s)pT(t,s), k(t,s)* -J-вектор-функция, *p{t, s) -* нормированная вектор-функция, ортогональная то­роидальной поверхности в точке *x{t, s), Edrjk(t, s)(dr]k(t, s))T — Gk{t,s).* Здесь коэффициенты *A,B и Gk* выражаются через параметры системы (31).

Критерий (14) Р-устойчивости замкнутой системы (50) с фиксированным коэффициентом *к* имеет вид

max .7\*(s) < 0.

Для функционала *Jk* получена явная связь

*Jk(s)* = < *a(t, s) + j3(t, s)* + *2(b(t, s) + c(t, s))Tk(t, s) + kT(t, s)H{t, s)k(t, s) >*

с коэффициентом регулятора *k(t,* s), что позволяет проводить конструктивный анализ задачи стабилизации системы (50).

Раздел 3.5 посвящен стабилизации линейных стохастических систем с пе­риодическими коэффициентами.

Рассматривается линейная стохастическая система с мультипликативными шумами, зависящими от состояния и управления

**го**

*dx = (A(t)x + B{t)u) dt + Y^Mtfx + i>T{t)u) dwr,* (51)

**r=l**

где *x* - n-мерный вектор состояния, *u* - 2-мерный вектор управления, *wr (г* = 1, *...,т)* - некоррелированные стандартные винеровские процессы, *A{t),aT{t)* -Г-лериодические п х n-матрицы, *B(t),* Vv(£) - Т-периодические n х 2-матрицы. Пусть управление в (51) формируется обратной связью

*u* = *K(t)x,* (52)

где *K(t)* - Т-периодическая *I* х n-матричная функция.

**29**

Рассмотрим множество матриц К = *{K(t)* | система (51), (52) устойчива}, при которых регулятор (52) является стабилизирующим. В случае К *ф* 0 система (51) называется *стабилизируемой.*

Рассмотрим для системы (51),(52) задачу оптимальной стабилизации с квад­ратичным критерием

***со***

*J\u, s, х]* = Е *f(xTQx + urPu)dt*

mm .

*K(t)eK*

Здесь *Q* Є *ОСІ, Р* Є *Х\, x{t)* = *x(t, s, х) -* решение системы (51) с начальным-условием *x{s)* = я, при управлении, формируемой обратной связью (52), где *K{t)* є К.

В предположении стабшшзируемости решением этой задачи является опти­мальный регулятор

*т т*

*щ =* \*■„(\*)», *K0{t) = -{P + Y, $JRA)~\BTR + Y^* ^гТЛ<7г). Здесь Д є 3Cj - единственная матрица, удовлетворяющая уравнению

*R + RAr + RA +* ]Г) *cJR<tt-*

*-{RB + J2<T-R^^P + Yl^r^r)-1(BTR+^jRaT) = -Q.*

Для исследования стабшшзируемости используется спектральная теория устой­чивости (см. теоремы 7, 8).

Систему (51) с управлением (52) перепишем в виде

*т*

*dx* = *А(К,t)xdt +* ^ *аТ{К,t)xdwr, А{К,t)* = *A{t)* + *B{t)K(t),* Рассмотрим операторы *Ак, &к,* заданные соотношениями

*m*

*AK[V]* = *V + АТ(К, t)V + VA(K, t), SK\V]* = ]Г>ГТ(ЛГ, *t)Var(K, t).*

r=l

Пусть детерминированная система

*dx = A{K,t)xdt,* (53)

является стабилизируемой: Ко = *{К(t)* | система (53) устойчива} *-£* 0. Для каждого Л' є Kq существуют операторы *А^1* и *У к* = — *A^Sk-*

**30**

Из теоремы 7 вытекает следующий критерий. **Теорема 15.(14]** *Система* (51) *стабилизируема тогда и только тогда, когда система* (53) *стабилизируема* (Ко *Ф§) и выполняется неравенство*

хі£р№0<і.

Рассмотрим стохастическую систему с мультипликативным шумом второго ти­  
па

*dx* = *(A(t)x + B{t)u) dt + yJxTQ{t)x + urP(t)u drj,* (54)

и обратной связью *и — K(t)x.* Здесь *rj(t) -* n-мерный винеровский процесс с параметрами *Ш,Т)(І) -* 0 , *EdT)(t)dnT (t)'- G(t)dt, Q* Є ОС? , *G* Є 3CJ, *Р* Є *Х{.*

Будем считать, что соответствующая детерминированная система (53) ста­билизируема (Ко *ф* 0). Рассмотрим множество

Є - {\*(\*) Є Е1 J 0(t) удовлетворяет условию

При каждом *в* є в уравнение Риккаги

*R + (A(t) + -d{t)I)TR + R(A(t) +* **tf(t)J)** - *RBr(t)P-1(t)B{t)R* = ***-Q(t)***

имеет решение *R(i9,* \*). Пусть *J[d, s]* = тіп^-єк,, *і[К,* і?, s] == tr(J?(i?, *s)G(s)).* **Теорема 16.(14]** Систгселщ (54) *стабилизируема тогда и только тогда, когда система* (53) *стабилизируема и выполняется неравенство*

minmax *J\-&. s\ <* 1. t»ee [о,г]

.Если ярт *некотором fl* є © *выполняется неравенство* max ./ft?, 5] < 1, mo

*регулятор u(t)* = —P\_1(i)ST(t)JJ(i?,f)a:(t) *будет стабилизировать систе­му* (54).

Полученные теоретические результаты иллюстрируются на примере.

Глава 4 «Управление стохастической чувствительностью» состоит из трех разделов. Здесь на основе общего подхода и методов, разработанных в главе 2, решается задача синтеза управлений, формирующих стохастические аттракторы с заданными вероятностными характеристиками.

В разделе 4.1 представлен теоретический материал, связанный с управле­нием чувствительностью общих инвариантных многообразий.

Рассматривается управляемая детерминированная система

*dx* = *f(x,и) dt,* і,/£Г,«Є *Щ}* (55)

и соответствующая ей стохастическая система

*dx* = *f(x,u) dt + EO-(x,u)dw(t),* І,/ЄМ°, we *Rl.* (56)

31

Здесь *w(t) -* n-мерный винеровский процесс, £ - скалярный параметр интен­сивности возмущений. Предполагается, что при *и* = 0 система (55) имеет ком­пактное инвариантное многообразие М с R".

Рассматривается задача выбора управления и, гарантирующего экспоненци­альную устойчивость многообразия *Ж* для детерминированной системы (55) и формирующего для *Ж в* системе (56) желаемую функцию стохастической чув-ствительности. Регулятор выбирается из класса достаточно гладких функций *и{х),* удовлетворяющих условию *и{х)\ж* = 0.

Для описания динамики отклонений траекторий систем (55), (56) от много­образия *Ж* используются системы линейного расширения

*dx - f0(x)dt,* ,

*dz* = *(A(x) + B(x)K(x))zdt, { }*

*dx —* /o(x) *dt,*

*dz* = *{A{x) + B(x)K(x))zdt + eG(x)dw,* где

*fo(x) = f(x,Q),* Л(г) = !£(х,0), *B(x) = j£(x,0)t.G{x)=<r(x,0).*

Для *K(x) — -£-(х)* выполняется условие *ox*

Vi6M *K(x)Px* = *K(x).* (58)

Здесь, как и в главе 3, можно, не теряя общности, ограничиться классом управ­лений вида

*и{х) = К(ч{х))ь{х).* (59)

Рассмотрим множество К, состоящее из *I* х n-матричных функций *К{х)* с ус­ловием (58), для которых система (57) является Р-устойчивой. Предполагается, что множество К непусто.

Возьмем произвольную фиксированную точку *х* є *Ж* и решение *x(t)* = *X{t,x)* уравнения *dx —* /о(х) *dt* с начальным условием *Х(д,х) — х.* Перей­дем к параметрическому описанию: *A(t)* = *A(x(t)), B(t)* = *B(x(t)), G(t) — G(x{t)), S(t) = G(t)Gr(t), P(t) = Px{t), K{t) = K(x(t)).*

Рассмотрим множество *Kx* = *{K(t) \ K(t)* = *K(x(t)), K(x)* є К}. Для всех *К (і)* Є Кг вследствие (58) выполняется условие

VieM1 *K(t)P(t)* = *K(t).* (60)

Для системы (56) функция стохастической чувствительности в точках траек­тории *x(t)* задается матрицей *W{t),* являющейся единственным в Xх решением уравнения

*W* = *(АО)* + *B{t)K{f))W* + *W(A(t)* + *B(t)K(t))r* ■+- *P(t)S(t)P{t).* (61)

Матрица *W{t)* связана соотношением lim *(P(t)V(t)P(t) — W(t))* = 0 с ко-вариационной матрицей *V(t) — cav(y(t),y(t))* произвольного решения *y(t)* ли­нейной стохастической системы

*dy* = *(A(t)y + B{t)v)dt + P(t)G(t)dw* (62)

с регулятором

*v\*=K(t)y.* (63)

Матрица *W(t)* определяется выбором матрицы *K{t)* обратной связи (63). Здесь представляет интерес следующая задача управления. Рассмотрим мно­жество *Мх* = *{W(t)* Є *Х%* | *W(t)* — непрерывно дифференцируема на Е1} до­пустимых ФСЧ.

Задача 1. Для наперед заданной матрицы *W(t)* 6 *Мх* требуется подобрать такую матрицу *К* Є *Кх,* чтобы матрица *Wxit)* - решение уравнения (61) - при всех *t* Є *Ж1* удовлетворяла равенству *Wx{t) — W(t).*

Пусть *W{t) -* желаемая ФСЧ *(W є Мх).* Решение задача 1 сводится к отыс­канию подходящей матрицы *K(t),* удовлетворяющей уравнению

*BKW* + *WK7Вт + PSP* - — *[W] + AW + WAT ~* 0. (64)

Если при всех *t* Є R1 матрица *B(t)* является квадратной *(п* = *I)* и невырожден­ной (ranks = *п),* то система (64) имеет решение

***к = в***

*-^mW+ + \w±[W+]-\pSW+-A)*

Если rankS < п, то система (64) разрешима не всегда.

Определение б- Если элемент *W* є Мх при некотором *К* Є К1 для всех *t* удовлетворяет равенству Wic(£) = *W{t),* то *W* называется *достижимым* в системе (56). Множество всех достижимых элементов

W1 = *{W* Є М\* | *BK(t)* Є *Кх WK(t)* s *W(t)}* называется *множеством достижимости* системы (56).

Определение 7. Многообразие М будем называть *полностью стохастически управляемым* в системе (56), если

VieM VffeM1 *ЗКєК\* Wx{t)s=W(t).*

Для того, чтобы М было полностью стохастически управляемым, необходи­мо и достаточно, чтобы равенство W1 = М1 выполнялось при всех *х* Є *Ж.*

Условие rank-^— *(х,* 0) = *п — I* является достаточным для полной стохасти-*ди* ческой управляемости системы (56).

**33**

Раздел 4.2 посвящен управлению чувствительностью точки покоя.

В случае, когда инвариантное многообразие *Ж* состоит из единственной точ­ки покоя *х* : *Ж = {х},* система (56), (59) имеет систему первого приближения вида

*dz ~ (A + BK)zdt + eGdr\.*

Здесь *А = -£-(х,* 0), *В ——(х,* 0), *G — сг(х,* 0), *К* - постоянные матрицы.  
*ох ои*

Предполагается, что пара *(А, В) -* стабилизируема:

К = {А' | *А + ВК -* устойчива} *ф* 0.

Множество М допустимых ФСЧ составляют положительно определенные

*п* х n-матрицы. Решение задачи 1 синтеза желаемой функции стохастической

чувствительности *W* Є *М.* сводится здесь к решению уравнения

*BKW* + *WKTBT + H(W) =* 0, *H{W) =S + AW + WAT, S* = *GGJ.*

Рассмотрим в *Шп* линейное подпространство *Щ* =< bj,..., *bi* >, натянутое на вектор-столбцы Ьі,.„,Ь( матрицы *В,* и его ортогональное дополнение Вг. Обо­значим через Pi и *Рг* проекторы на Bj и 1¾.

Теорема 17. *Для того, чтобы матрица W* є М *была достижимой, необхо­димо и достаточно, чтобы выполнялось условие PiH(W)P2 —* 0 *и матрица А + ВК для К* = *B+H{W)* (0.5Pi -*1) W'1 была устойчивой.*

Если *W* достижима, то матрица *К* решает поставленную задачу синтеза регуля­тора, формирующего желаемую матрицу стохастической чувствительности *W.*

**Теорема 18.** *Если* rankS == *п, то система* (56) *является полностью стоха­стически управляемой. Если система* (56) *является полностью стохастиче­ски управляемой при невырожденных шумах* (гапкС? = *п), то* ranki? == *п.*

Теоретические результаты данного раздела иллюстрируются на примере ре­шения задачи управления разбросом случайных траекторий вокруг точки покоя стохастически возмущенного уравнения Ван-дер-Поля.

Раздел 4.3 посвящен управлению чувствительностью циклов.

Рассматривается случай, когда инвариантным многообразием *Ж* системы (56) с регулятором (59) является предельный цикл, задаваемый Т-периодичес-ким решением *х = £(t).*

Исследование возможностей управления нелинейной стохастической систе­мой (56), (59) сводится к анализу линейной системы (62), (63), имеющей для цикла следующий вид

*dy* = *(A(t) + B(t)K(t))ydt + P(t)G{t)dw,*

где *A(t) =* !£(£(\*).0), В(\*) = !£(Є(\*),0), G(\*) = <7($(t),0), *P{t)=Pm.*

**34**

Здесь матрица обратной связи *K(t)* выбирается из множества *К,* состоящего из всех Т-периодических матриц, для которых выполняется условие (60), а замкнутая детерминированная система *dz* = *(A(t) + B(t)K(t))zdt* является Р-устойчивой. Предполагается, что множество К непусто.

Рассмотрим М = {W(£) Є *ОСр \ W{t)~*непрерывно дифференцируема на К.1} - множество допустимых функций стохастической чувствительности.

Решение задачи 1 синтеза желаемой матрицы стохастической чувствитель­ности *W(t)* Є М сводится здесь к отысканию матрицы *K(t),* удовлетворяющей на отрезке [0, *Т]* уравнению

*B(t)K(t)W(t) + W(t)KT(t)BT(t) + H(W(t))* = 0, (65)

где

*H{W{t))* = *P{t)S{t)P{t)-jt [W{tj\ +A(t)W(t)+W(t)AT(t), S(t) = G{t)GT{t).*

В случае, когда при всех *t* є [0,Т] матрица *B(t)* является квадратной и невырожденной (rankS*(t) — п = 1),* система (65) имеет единственное решение

*K(t)* - *B-\t) (jt [W(t)] W+(t) + \w{t)^ [W+(t)]* - *±P(t)S(t)W+(t)* - Л(\*)) .

В случае цикла на плоскости (п = 2) матрица *W(t),* задающая стохасти­ческую чувствительность цикла М, представима в виде *W(t)* = А\*(£)|>(£)рт(£)-Здесь *p(t)* - нормированная вектор-функция, ортогональная вектору /(£(i), 0), а скалярная функция' *ц{і) >* 0, задающая дисперсию пучка по нормали *p(t)* к циклу, является решением краевой задачи

*іі = ак(І)іі + Щ,* /і(0) = а\*(Т)

с Т-периодическими коэффициентами а\*(£) = *a.o(t) + 2/3r(t)k(t), b(t) = pT(t)S(t)p(t),* где *a0(t)* = *2qT(t)p(t), q[t)* = *Ar(t)p(t), 0{t)* - *BT(t)p(t), k(t) = K(t)p(t).* При этом регулятор исходной нелинейной стохастической си­стемы будет иметь вид

*и* = *k(t(x))pT(t(x))A{x).* (66)

Рассмотрим множество допустимых ФСЧ

М - {м Є (¾ | *n(t) >* 0, /\*(0) = *fi(T),* А(0) = А(Г)},

Пусть функция *Ц(і)* Є М является желаемой ФСЧ. Функция *p,(t)* Є М явля­ется достижимой, если найдется *k(t),* при котором *fJ.t(t)* = Д(і). Цикл М будет полностью стохастически управляемым, если любая функция Д(£) Є М явля­ется достижимой.

**35**

Теорема 19.(23] *Для полной стохастической управляемости цикла Ж уело-вие 0(t) ф 0 при всех* і Є [О, Г] *является достаточным, а в случае, когда* Oq(0 + *№(Ь) ф* 0 *при всех t* Є *[0,Т], и необходимым.*

Пусть *p,(t)* Є М является желаемой ФСЧ. Для того, чтобы регулятор (66) обеспечивал для цикла выбранную *p.(t),* функция *k(t)* должна удовлетворять уравнению

**/гм\*(\*)-«(«. *ait)==Kt)~a,(t)m~b(t)* (67)**

В случае скалярного управления *(I —* 1), когда *B(t)* является п-вектор-столбцом, a/?(i), *k(t)* являются скалярными функциями, уравнение (67) имеет

единственное решение *k{t)* = -Г77Г-

*p(t)*

В случае векторного управления (/ ^ 2) уравнение (67) имеет бесконечное множество решений (желаемая ФСЧ может быть получена различными управ­лениями). Здесь естественно рассмотреть дополнительный критерий оптималь­ности

||A(t)||3 *—* mm. (68)

Задача конструирования оптимального регулятора (67), (68) имеет единствен­ное решение

***и\** - *a{-t)l3{t) -* А(\*)-до(\*)Р(\*)-ь(\*)д,^ *т~\\РЩ2~ Щ\*)\\№\\2* Д}"**

Полученная формула задает явную связь желаемой функции стохастической чувствительности *p[t)* и коэффициента *k(t)* регулятора (66), обеспечивающего эту чувствительность.

-Возможности представленных теоретических результатов иллюстрируются на примере управления чувствительностью и подавления хаоса для модели воз­мущенного брюсселятора [10],[23].

Завершая обзор содержания и основных результатов диссертации, заметим, что среди возможных направлений дальнейших исследований в русле данной работы можно отметить вопросы, связанные с анализом индуцированных шу­мом переходов как между отдельными аттракторами (точка покоя - точка по­коя, точка покоя - цикл, цикл - цикл, цикл - тор, ...), так и внутри одногс аттрактора между его отдельными частями (соседними участками и пєтлямї многооборотных циклов). Продвижение в этом направлении позволит поняті вероятностный механизм стохастических бифуркаций разрушения и рождеши аттракторов при изменении параметров случайных возмущений. Весьма ивте ресным представляется исследование воздействия шума на хаотические аттрак торы. Разработка соответствующих конструктивных процедур и численных ме •годов стохастического анализа позволит перейти к решению задачи синтез

**36**

- построению регуляторов, управляющих вероятностными характеристиками стохастических бифуркаций и переходов между аттракторами.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов Минобразования (97-0-1.9-111) и РФФИ (00-01-00076, 00-01-10643, 02-01-96418урал, 04-01-96098урал).

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Рашко Л.Б. Стабилизация линейных стохастических систем с возмущениями, зависящи­ми от состояния и управления // *Прикл. математика и механика.* 1979. Т. 43. Вып. 4. С. 612-620.

[2] Ряшко Л.Б. Линейный фильтр в задаче стабилизации линейных стохастических систем при неполной информации // *Автоматика и телемеханика.* 1979. Л\*7. С. 80-89.

*&*

[3] Ряшко Л.Б. Стабилизация линейных систем с мультипликативными шумами при непол­ной информации // *Прикл. математика и механика.* 1981. Т. 45. Вып. 5. С. 778-786.

[4] Ряшко Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений *//При- .* /  
кл. .математика *и механика.* 1996. Т. 60. Вып. 4. С. 582. *( '*

[5] Башкирцева ИА., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в анализе чувствительности ав- .. токолєбаний к стохастическим возмущениям // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная* динамика. 7-1998. Т. 6. Л'» 5. С. 19-27.

***■f***

[6] Башкирцева И.А., Исакова М.Г., Ряшко Л.Б. Асимптотическое разложение квазипотен­циала для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора // *Дифференциальные уравнения.* 1999. Т. 35. № 10. С. 1319-1324.

[7] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Метод квазипотенциала в исследовании локальной устой- .  
чивости предельных, циклов к случайным возмущениям // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная* —*L-  
динамика.* 2001. Т. 9. № 6. С. 104-114. '

[8] Ряшко Л.Б. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации дву­  
мерного инвариантного тора // *Изв. вузов- Прикл. нелинейная динамика.* 2001. Т. 9. X" —*L*4,5. С. 140-153. '

[9] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б., Стихии П.В. Стохастическая чувствительность циклов системы Ресслера при переходе к хаосу // *Изв. вузов. Прикл. нелинейная динамика.* 2003. ./— №-6. С. 32-47.

***S-***

[10] Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Управление стохастически возмущенными автоколебани­ями // *Автоматика и телемеханика.* 2005. №6. С. 104-113.

[11] Васин В.В., Ряшко Л.В. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследо­ваний, 2006,164 с.

[12] Ryashko L.B., Schurz Н. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems // *Dynamic Systems and Applications.* 1997. V.6. P. 165-189.

[13] Bashkirtseva I.A., Isakova M.G., Ryashko L.B. Quasipotential in stochastic stability analysis of the nonlinear oscillator orbits // *J. Neural, Parallel* & *Scientific Computations.* 1999. V. 7. № 3. P. 299-310.

**37**

[14] Ryashko L.B. Stability and stabilization of SDEs with periodic coefficients // *Dynamic Systems and Applications.* 1999. V. 8. P. 21-34.

[15] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator // *Phys. A.* 2000. V. 278. P. 12&-139.

[16] Bashkirtseva I.A., Ryashko L.B. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period-doubling bifurcations // *Dynamic Systems and Applications.'* 2002. V. 11. P. 293-309.

[17] Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic analysis of a non-normal dynamical system mimicking a laminar-to-turbulent subcritical transition // *Phys. Rev. E.* 2002. V. 66. P. 066310.

[18] Ryashko L.B., Shnol Б.Е. On exponentially attracting invariant manifolds of ODEs // *Nonlinearity.* 2003. V. 16. P. 147-160.

[19] Bashkirtseva LA., Ryashko L.B. Stochastic sensitivity of 3D-cycles // *Mathematics and Computers in Simulation.* 2004. V. 66. P. 55-67.

[20] Fedotov S., Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic analysis of subcritical amplification of magnetic energy in a turbulent dynamo // *Phys. A.* 2004. V. 342. P. 491-506.

[21] Ryagin M.Yu, Ryashko L.B. The analysis of the stochastically forced periodic attractors for Chua's circuit // *Int. J. of-Bifurcations and Chaos.* 2004. V. 14(11). P. 39S1-3987.

[22] Ryashko L.B. Exponential mean square stability of stochastically forced 2-torus // *Nonlinearity.* 2004. V. 17. P. 729-742.

[23] Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations *H Chaos, Solitons and Fractals.* 2005. V.26. P. 1437-1451.

**38**

ИД ЛЬ 06117 от 23.10.2001

Подписано в печать 19.04.2006.

Формат 60x84/16. Бумага типографская №2. Печать - ризография.

Усл. печ. л. 2,4 Уч..-изд. л. 2,2 Тираж 100 экз. Заказ 852.

Московский государственный институт электроники и математики 109028, Москва, Б. Трехсвятительский пер., 3/12

***Центр оперативной полиграфии (495) 916 8804,916 8925***